Лекция 11.

Эффекты температуры и магнитного поля

Изложение по АГД и книге Минеева-Самохина

1. Зависимость щели в спектре от температуры. Исследуем более подробно зависимость величины щели от температуры. Рассмотрим сначала случай низких температур $T \ll T_c$ и произведем соответствующее разложение условия (34.37). Имеем тождественно:

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} - 2\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \cdot \frac{1}{\exp\left(\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}/T\right) + 1}, \tag{36.1}$$

где $\zeta = |\lambda| \frac{mp_0}{2\pi^2}$

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right) \qquad \text{(здесь } \Delta_0 \equiv \Delta(T = 0)\text{)}$$

При низких температурах $\Delta \gg T$,

$$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{2\pi T\Delta_0}\left(1 - \frac{T}{8\Delta_0}\right)e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

Вблизи T_c величина щели мала,

Разлагаем в ряд по Δ у-ние самосогласования

$$1 = \frac{|\lambda|\, T}{(2\pi)^3}\sum_n \int \frac{dp}{\omega + \xi^2 + \Delta^2}.$$

$$\frac{1}{\zeta} = T\sum_n \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \left\{ \frac{1}{\omega^2+\xi^2} - \frac{\Delta^2}{(\omega^2+\xi^2)^2} + \frac{\Delta^4}{(\omega^2+\xi^2)^3} + \dots \right\}.$$

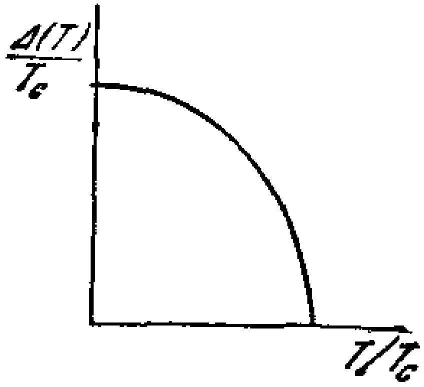
$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} - \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{3}{4} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} = \frac{2^z - 1}{2^z} \zeta(z).$$

В результате получаем

$$\ln \frac{T}{T_c} = -\frac{7\zeta(3)}{8} \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} + \frac{93\zeta(5)}{128} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} + \dots$$

$$\Delta = \pi T_c \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \simeq 3{,}06\, T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}.$$



D-wave pairing: $\Delta(\hat{\mathbf{k}}) = \Delta \cdot g(\hat{k})$

$$\hat{G}_\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega_n + \xi_k}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2} & \frac{\Delta(\hat{\mathbf{k}})}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2} \\ \frac{-\Delta^*(\hat{\mathbf{k}})}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2} & \frac{i\omega_n - \xi_k}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k}})|^2} \end{pmatrix}$$

Уравнение самосогласования: $$\Delta \cdot g(\hat{\mathbf{k}}) = T \sum_n \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k_1}) \Delta g(\hat{\mathbf{k_1}})}{\omega_n^2 + \xi_{k_1}^2 + |\Delta(\hat{\mathbf{k_1}})|^2}$$

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k_1}) = 2V_2 \cos 2\theta(\mathbf{k}) \cos 2\theta(\mathbf{k}_1)$$

two-dimensional d-wave
(for layered material)

$$g(\hat{\mathbf{k}}) \propto \hat{k}_x^2 - \hat{k}_y^2$$

$$\Delta = 2V_2 N_0 \int_0^{\varepsilon_c} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\Delta \cos^2 2\theta}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}} \, th \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}}{2T}$$

Нормировка $2V_2$ выбрана, чтобы иметь $\boxed{T_c = \frac{2\gamma}{\pi} \varepsilon_c e^{-1/N_0 V_2}}$

При $T \ll T_c$: $\ln \frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = 2 \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos^2 2\theta}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2 \cos^2 2\theta}}{T}\right) + 1}$

Термодинамика сверхпроводника.

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\lambda} = \frac{1}{\lambda}\langle H_{int}\rangle = -\frac{1}{\lambda^2}|\Delta|^2.$$

$$\Omega_s - \Omega_n = \int_0^{\Delta}\left(\frac{d\,\frac{1}{|\lambda|}}{d\Delta}\right)\Delta^2\,d\Delta.$$

При учете связи

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}} - 2\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}\cdot\frac{1}{\exp\left(\sqrt{\xi^2+\Delta^2}/T\right)+1},$$

Воспользовавшись соотношением (36.2), согласно которому

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{mp_0}{2\pi^2}\left\{\ln\frac{2\omega_D}{\Delta} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right)\right\},$$

получим

$$F_s - F_n = -\left(\frac{mp_0}{2\pi^2}\right)\left\{\frac{\Delta^2}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T^2}{n^2}\int_0^{\frac{n\Delta}{T}}K_1(x)\,x^2dx\right\}.$$

При низких температурах $\Delta/T \gg 1$.

$$\int\limits_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x)\, x^2\, dx = 2 - \int\limits_{\frac{n\Delta}{T}}^{\infty} K_1(x)\, x^2\, dx.$$ Последний интеграл

нужно вычислить лишь для $n=1$, воспользовавшись для этого асимптотическим разложением функции $K_1(x)$.

Остающийся ряд по n легко суммируется. В результате находим:

$$F_s - F_n = \frac{mp_0T^2}{6} - \frac{mp_0}{2\pi^2}\left[\frac{\Delta^2}{2} + \sqrt{2\pi\Delta_0^3T}\left(1+\frac{15}{8}\frac{T}{\Delta_0}\right)e^{-\Delta_0/T}\right].$$

где $$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{2\pi T\Delta_0}\left(1 - \frac{T}{8\Delta_0}\right)e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

$$C_n = \frac{mp_0T}{3}$$

Энтропия сверхпроводящей фазы:

$$S_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}}\, e^{-\frac{\Delta_0}{T}},$$

а теплоемкость равна

$$C_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}}\, e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

$$\boxed{C_s = 2N_0\Delta_0\sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T^3}}\,e^{-\Delta_0/T}}$$

б) Другой метод: разложение по квазичастицам

Полюса Ф.Г.: $i\omega \to \varepsilon + i0$ $\qquad \varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2+\Delta^2}$

Ферми-газ квазичастиц с энтропией

$$S = -\underset{\text{спин}}{2}\sum_k f_k \ln f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k); \quad f_k = \frac{1}{e^{\varepsilon_k/T}+1}$$

$$C = T\frac{\partial S}{\partial T} = 2\sum_k \varepsilon_k \frac{\partial f_k}{\partial T} = 2N_0\int_0^\infty d\xi \int\frac{d\Omega_F}{4\pi}\,\varepsilon_k\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{e^{\varepsilon_k/T}+1}\right)$$

S-wave: $C_s = 2N_0\int_0^\infty d\xi\,\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\,\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}/T}+1}\right) \underset{T\ll\Delta}{\simeq} 2N_0\frac{\Delta^2}{T^2}\sqrt{2\pi T\Delta_0}\,e^{-\Delta/T}$

3. Парамагнитная восприимчивость и сдвиг Найта

$$M = \mu_B \sum_{\mathbf{k}} [f(E_{\mathbf{k},-}) - f(E_{\mathbf{k},+})].$$

, $f(E)$ — фермиевская функция распределения

$$E_{\mathbf{k},\pm} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2} \pm \mu_B H$$

$$M = -2\mu_B^2 N_0 H \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \frac{\partial f(E_{\mathbf{k}})}{\partial E} = 2\mu_B^2 N_0 H \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{\mathbf{k}}, T),$$

$$Y(\hat{\mathbf{k}}, T) = \frac{1}{4T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^2(E_{\mathbf{k}}/2T)},$$

(Yosida function)

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2 |g(\mathbf{k})|^2}$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \chi_n Y(T), \qquad \chi_n = 2\mu_B^2 N_0$$

$$Y(T) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{\mathbf{k}}, T) = \begin{cases} 1, & \text{при } T = T_c, \\ 0, & \text{при } T = 0 \end{cases}$$

В области низких температур $T \ll T_c$

$$Y(T) \sim \begin{cases} e^{-\Delta_0/T}, & g(\mathbf{k}) \neq 0, \\ \left(\frac{T}{T_c}\right)^2, & g(\mathbf{k}) \text{ обращается в нуль в изолированных точках,} \\ \frac{T}{T_c}, & g(\mathbf{k}) \text{ обращается в нуль на линиях.} \end{cases}$$

S-wave, S=L=0

Этот результат (для S=L=0) оказался противоречащим эксперименту на пудре из очень мелких частиц алюминия (конец 1950-х гг.)
Эксперимент дал χ_S близкой к χ_n при самых низких T
Разгадку нашел P.W.Anderson: спин-орбитальное рассеяние

4. Парамагнитный предел

$T = 0$: $\chi_s(H) = 0$

$$F_s(\Delta, H) = -\frac{N_0}{2}\Delta^2$$

$$F_n(H) = -\frac{\chi_n H^2}{2} = -N_0 \mu_B^2 H^2$$

$$H_p^2 = \frac{\Delta^2}{2\mu_B^2} \qquad \boxed{H_p = \frac{\Delta}{\mu_B\sqrt{2}}}$$

пример: Al $\quad T_c \simeq 1.2\,K$

$\Delta \simeq 2\,K$

$$H_p = \frac{\Delta}{\sqrt{2}\mu_B} \simeq \frac{2 \cdot 1.36 \cdot 10^{-16}}{1.4 \cdot 10^{-20}} \simeq$$

$$\simeq 2 \cdot 10^4\,\text{г} = 2\,\text{Тл}$$

Это ф.п. 1-ого рода, там где $F_s(\Delta, H) = F_n(H)$

Независимость F_s от H – это только при $T = 0$!

5. Диамагнитный отклик

$$\frac{\vec{K}^2}{2m} \to \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \frac{1}{2m}$$

В действии появляется член где $\vec{v}_p = \frac{\partial \xi_p}{\partial \vec{p}}$

$$\frac{e}{c}\vec{v}_{\vec{k}}\cdot\vec{A}\,\bar{\psi}\psi + \frac{e^2}{c^2}\frac{\vec{A}^2}{2m}\bar{\psi}\psi$$

$$\vec{j} = -c\,\frac{\delta F}{\delta \vec{A}} \Rightarrow \boxed{\vec{j}_{\vec{q}} = Q(\vec{q})\,\vec{A}_{\vec{q}}}$$

причем используя $\vec{q}\cdot\vec{A}_{\vec{q}} = 0$ $(\vec{\nabla}\vec{A} = 0)$

$$Q(\vec{q}) = Q_1(\vec{q}) - \frac{e^2}{mc}\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = n$$

матрица $\hat{M} = \begin{pmatrix} -i\omega + \xi_k & \Delta \\ -\Delta^* & i\omega + \xi_k \end{pmatrix}$ получает добавку

$$\delta\hat{M}(\vec{A}) = \frac{e}{c}\vec{v}_q \vec{A} \times \hat{1}$$

$$Q_{ij} = -T\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{c^2} v_i\left(\bar{k}+\frac{\bar{q}}{2}\right) v_j\left(\bar{k}-\frac{\bar{q}}{2}\right) \times G_{\alpha\beta}\left(\bar{k}+\frac{\bar{q}}{2}, i\omega_n\right) \times G_{\beta\alpha}\left(\bar{k}-\frac{\bar{q}}{2}, i\omega_n\right)$$

$$= -2T\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{c^2} v_\alpha\left(\bar{k}+\frac{\bar{q}}{2}\right) v_\beta\left(\bar{k}-\frac{\bar{q}}{2}\right) \times \left\{ G\left(i\omega_n, \bar{k}+\frac{\bar{q}}{2}\right) \times G\left(i\omega_n, \bar{k}-\frac{\bar{q}}{2}\right) + F\left(i\omega_n, \bar{k}+\frac{\bar{q}}{2}\right) F^*\left(i\omega_n, \bar{k}-\frac{\bar{q}}{2}\right) \right\} =$$

$$= -\underbrace{\frac{2}{3}}_{}\overset{\delta_{ij}}{} T \sum_n \frac{e^2}{c} N_0 \int d\xi \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \frac{\bar{k}+\bar{q}/2}{m} \cdot \frac{\bar{k}-\bar{q}/2}{m} \frac{(\xi_{k_+} - i\omega_n)(\xi_{k_-} - i\omega_n) + \Delta^2}{(\omega_n^2 + \xi_{k_+}^2 + \Delta^2)(\omega_n^2 + \xi_{k_-}^2 + \Delta^2)}$$

$$Q_1^{ij}(q) = \delta_{ij} \cdot Q_1(q)$$

$\boxed{\text{S-wave}}$

$$Q_1(q) = \frac{2}{3} \frac{e^2 N_0}{m^2 c} \overset{p_F^2}{} T \sum_n \int d\xi_k \frac{\xi_{k_+}\xi_{k_-} + \Delta^2 - \omega_n^2}{(\omega_n^2 + \xi_{k_+}^2 + \Delta^2)(\omega_n^2 + \xi_{k_-}^2 + \Delta^2)}$$

Здесь возьмем $\vec{q} \to 0$

$$Q(0) = Q_1(0) - \frac{e^2 n}{mc} \equiv -\frac{e^2 n_s}{mc}$$

$$n - n_s = -\frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m} T \sum_n \int d\xi \, \frac{\xi^2 + \Delta^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \Delta^2 + \omega_n^2)^2} \qquad (1)$$

При $\Delta = 0$ $\quad n_s = 0$, т.е.

$$n = -\frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m} T \sum_n \int d\xi \, \frac{\xi^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \omega_n^2)^2} \qquad (2)$$

(1) − (2) :

$$n_s = \frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m} T \sum_n \int d\xi \left[\frac{\xi^2 + \Delta^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \Delta^2 + \omega_n^2)^2} - \frac{\xi^2 - \omega_n^2}{(\xi^2 + \omega_n^2)^2} \right]$$

Теперь можно взять $\int d\xi$!

$$n_s = \frac{2N_0 p_F^2}{3m} T \sum_n \frac{\pi\Delta^2}{(\omega_n^2+\Delta^2)^{3/2}}$$

а) $T \to 0$: $\quad n_s = \frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m}\int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{\pi\Delta^2}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}} = \frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m} = \frac{p_F^3}{3\pi^2} = n$

б) $T \to T_c$: $\quad \frac{n_s}{n} = T\sum_n \frac{\pi\Delta^2}{[\pi T(2n+1)]^3} = \frac{2\Delta^2}{\pi^2 T^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2n)^3} =$

$$= \frac{7\Delta^2 \zeta(3)}{4\pi^2 T_c^2} = 2\left(1 - T/T_c\right)$$

чистый, изотропный случай

Теперь обобщеем на $q \neq 0$!

$$Q(q) = -\frac{e^2}{mc} \times \underbrace{\frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m}}_{n} \times \frac{3\pi}{4} T \sum_n \int_0^\pi \frac{\sin^3\theta\, d\theta}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}} \frac{\Delta^2}{\omega_n^2+\Delta^2+\frac{v^2}{4}q^2\cos^2\theta}$$

$$\frac{3\pi}{4} T \sum_n \int_{-1}^{1} \frac{(1-\mu^2)\,d\mu\; \Delta^2}{\omega_n^2+\Delta^2+\frac{v^2q^2}{4}\mu^2} \times \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}$$

При $vq \gg T_c$ нужны $\mu \ll 1$

$$Q(q) = -\frac{e^2}{mc} n \times \frac{3\pi^2}{2vq} T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2+\Delta^2}$$

$$= -\frac{e^2}{mc} n \times \frac{3\pi^2}{4vq} \Delta \,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}$$

Пиппард

Другой способ вычисления n_s

$n_s = n - n_n$ $\qquad$ n_n – плотность нормальных возбуждений

Скорость дрейфа $\vec{w}$ сверхпров. компонент

$$E_k(w) = \varepsilon_k - \vec{w}\vec{k}$$

импульс $\vec{P} = 2\sum_{\vec{k}} \vec{k}\, f(E_k(w)) = -2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k}(\vec{k}\vec{w}) \frac{\partial f}{\partial E} =$

$$= \frac{2}{3}\vec{w}\, N_0 p_F^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \frac{1}{4T\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{2T}\sqrt{\xi^2+\Delta_k^2}\right)} =$$

$$= \vec{w}\,\underbrace{n \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{k}, T)}_{n_n}$$

$$n_s = n\left[1 - \int \frac{d\Omega}{4\pi} Y(\hat{k}, T)\right]$$

Ограничение метода:

требуется трансл. инвар. (только тогда $n_s(0) = n$)