Лекция 13: пространственно-неоднородные задачи сверхпроводимости

I. Уравнения Боголюбова-Де Жена

$$H = \int d^3r \left[\sum_\alpha \psi_\alpha^+ H_0 \psi_\alpha + \Delta(r)\psi_\uparrow^+ \psi_\downarrow^+ + h.c. \right]$$

+ у-ние $\Delta(\bar{r}) = V_0 \langle \psi_\uparrow(\bar{r}) \psi_\downarrow(\bar{r}) \rangle$

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + V(\bar{r}) - E_F + g\mu_B \vec{H}\vec{\sigma}$$

$H_0 = H_0^*$ при $\vec{A}, \vec{H} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\uparrow}(\bar{r}) = \sum_{\lambda} \left[u_{\lambda}(\bar{r})\, \alpha_{\lambda\uparrow} - v^{*}_{\lambda}(\bar{r})\, \alpha^{\dagger}_{\lambda\downarrow} \right]$$

$$\psi_{\downarrow}(\bar{r}) = \sum_{\lambda} \left[u_{\lambda}(\bar{r})\, \alpha_{\lambda\downarrow} + v^{*}_{\lambda}(\bar{r})\, \alpha^{+}_{\lambda\uparrow} \right]$$

$$\psi_{\sigma}(\bar{r}) = \sum_{\lambda} \left[u_{\lambda}(\bar{r})\, \alpha_{\lambda\sigma} + (\sigma\downarrow)\, v^{*}_{\lambda}(\bar{r})\, \alpha^{+}_{\lambda,-\sigma} \right]$$

$$(\sigma\downarrow) = \begin{cases} - & \sigma = +1 \\ + & \sigma = -1 \end{cases}$$

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\lambda\alpha} \varepsilon_{\lambda}\, \alpha^{+}_{\lambda\sigma} \alpha_{\lambda\sigma}$$

$$\begin{cases} [H, a_{\lambda\sigma}] = -E_\lambda a_{\lambda\sigma} \\ [H, a^+_{\lambda\sigma}] = E_\lambda a^+_{\lambda\sigma} \end{cases}$$

$$[H, \psi_\sigma(\bar r)] = -\hat H_0 \psi_\sigma(\bar r) + (\sigma\downarrow)\Delta\psi^+_{-\sigma}(\bar r)$$

подставим разложение $\psi_\alpha(\bar r)$ через a_λ и a^+_λ

$$\sum_\lambda \left(-E_\lambda u_\lambda(\bar r) a_{\lambda\sigma} + (\sigma\downarrow) E_\lambda v^*_\lambda(\bar r) a^+_{\lambda,-\sigma}\right) =$$

$$= -\hat H_0 \sum_\lambda \left(u_\lambda(\bar r) a_{\lambda\sigma} + (\sigma\downarrow) v^*_\lambda(\bar r) a^+_{\lambda,-\sigma}\right) +$$

$$+ (\sigma\downarrow)\Delta(\bar r) \sum_\lambda \left(u^*_\lambda(\bar r) a^+_{\lambda,-\sigma} - (\sigma\downarrow) v_\lambda(\bar r) a_{\lambda\sigma}\right)$$

собираем коэфф. при $a_{\lambda,\sigma}$ и $a^+_{\lambda,-\sigma}$

$$\hat{\mathcal{H}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \Delta \\ \Delta^* & -\hat{H}_0^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Б-О.Ж

<u>однородный случай</u>

$$\begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} e^{i\bar{k}\bar{r}}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_k & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = E_k\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_k+\xi_k}{2E_k}} \\ \sqrt{\frac{E_k-\xi_k}{2E_k}} \end{pmatrix}$$

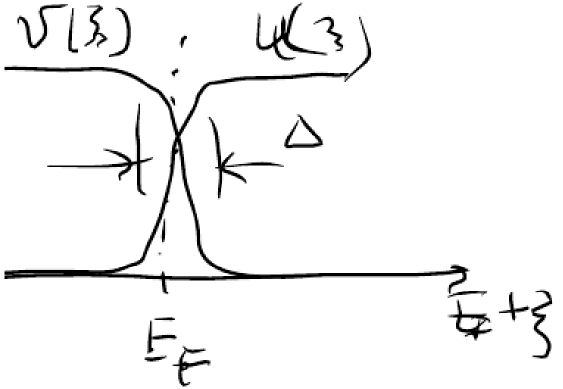
$$\underline{E_k^2 = \Delta^2 + \xi_k^2}$$

$$E_k = \pm\sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2} \quad ?$$

$$\mathcal{H} = -\tau_y \mathcal{H}^T \tau_y \qquad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathcal{H}\begin{pmatrix} v^* \\ -u^* \end{pmatrix} = -E\begin{pmatrix} v^* \\ -u^* \end{pmatrix}$$



$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\substack{\varepsilon_\lambda > 0 \\ \sigma}} \varepsilon_\lambda \alpha^+_{\lambda\sigma} \alpha_{\lambda\sigma}$$

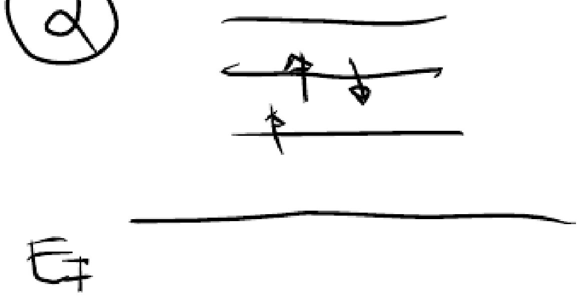
Можно ввести другие операторы

$$\gamma_\lambda = \begin{cases} \alpha_{\lambda\uparrow} & \text{для } E_\lambda > 0 \\ \alpha^+_{\lambda\downarrow} & \text{для } E_\lambda < 0 \end{cases}$$

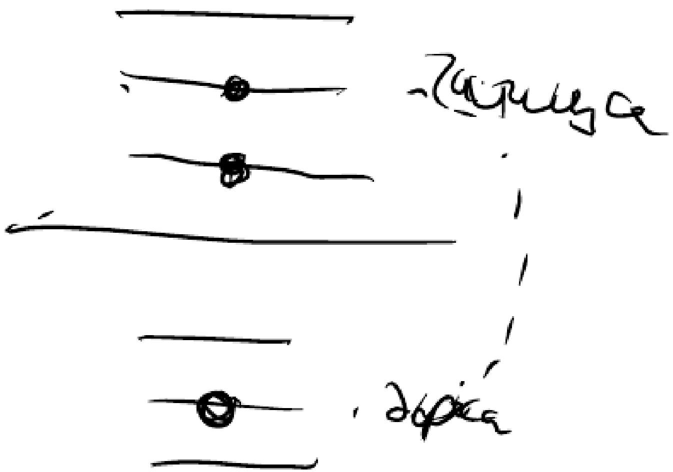
$$u_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\varepsilon(p)}\right) \qquad v_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\varepsilon(p)}\right)$$

$$H = \sum_\lambda E_\lambda \gamma^+_\lambda \gamma_\lambda$$ по всем λ, с E_λ любого знака

а



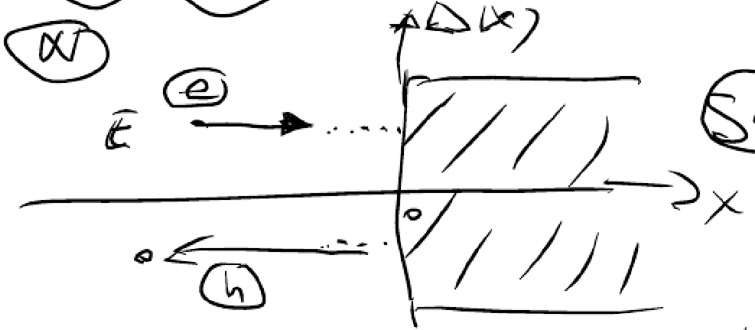
б



Самосогласование:

$$\Delta(r) = V_0 \sum_\lambda u_\lambda(r)\, v^*_\lambda(r)\, \mathrm{th}\frac{E_\lambda}{2T}$$

② Андреевское отражние



$x<0$ $\quad \psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_+x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} e^{ik_-x}$

$x>0$ $\quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{i\varkappa x} \qquad \operatorname{Im}\varkappa > 0$

$$k_\pm = \sqrt{k_F^2 \pm 2mE} = k_F \pm \frac{mE}{k_F} = k_F \pm \frac{E}{\hbar v_F}$$

$$E^2 = \left(\frac{\varkappa^2}{2m} - E_F\right)^2 + \Delta^2$$

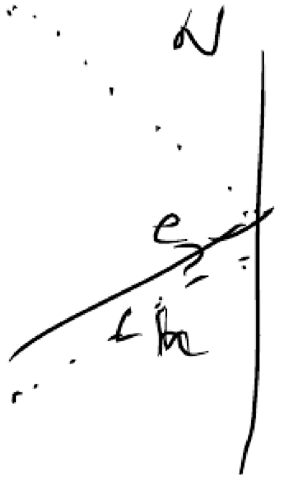
$$\varkappa = k_F + \frac{i}{\hbar v_F}\sqrt{\Delta^2 - E^2}$$

Сшиваем по непрерывности Ψ, Ψ'

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ E - i\sqrt{\Delta^2 - E^2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(-i\theta_E) \end{pmatrix}$$

$$\theta_E = \arccos\frac{E}{\Delta}$$

при $E \ll \Delta$ $\quad \theta_E \to \pi/2$



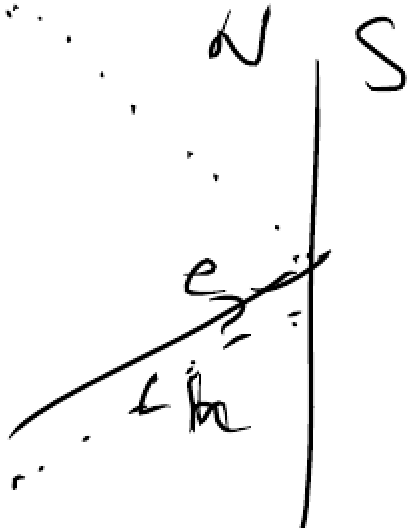
$\vec{p}^{\,e}_{\parallel} = \vec{p}^{\,h}_{\parallel}$ $\qquad p_\perp$ меняется мало

Скорость меняет знак
(все компоненты!)

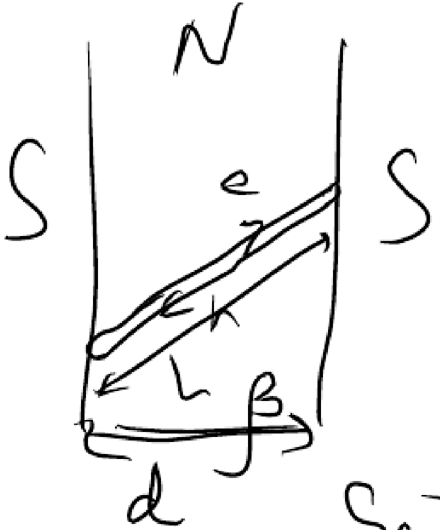
$$E = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$$

$$\vec{v} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{p}\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\vec{p}}{p}\frac{\xi}{E}\frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{\vec{p}}{p}\frac{v_F \xi}{E} =$$

$$= \frac{\vec{p}}{p}\frac{v_F^2 (p - p_F)}{E}$$



Отражение обратно по той же траектории !



$$\exp\left(\frac{iS_e}{\hbar} - \frac{iS_h}{\hbar} - i\pi\right) = 1$$

$-\frac{i\pi}{2}$ фаза при отражении

[illegible] $E \ll \Delta$

$$\frac{S_e - S_h}{\hbar} = (k_+ - k_-)L = \frac{2E}{\hbar v_F} \cdot L$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = 0}$$

$$E_n = \frac{\pi \hbar v_F}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

пока $E_n \ll \Delta$

$$L = d/\cos\beta$$

$$d \gg \frac{\hbar v_F}{\Delta} \sim \xi_0$$

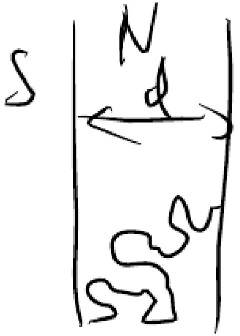
Квазиклассическое квантование в S-N-S структуре

Многоканальная металлическая проволока между S берегами

$$E_n^{(\pm)} = \frac{\pi\hbar v_F}{d}\left(n \mp \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

при $\varphi = \pi$ есть $E_n^{*} = 0$

Здесь $d \gg \hbar v_F/\Delta$



$d \gg l$ (длина пробега)

$$L_{эфф} \sim v_F \frac{d^2}{D} \sim \frac{d^2}{l}$$

$$E_{Th} = E_{diff} \sim \frac{\hbar v_F}{L_{эфф}} \sim \frac{\hbar D}{d^2}$$

Энергия Таулеса (D. Thouless)

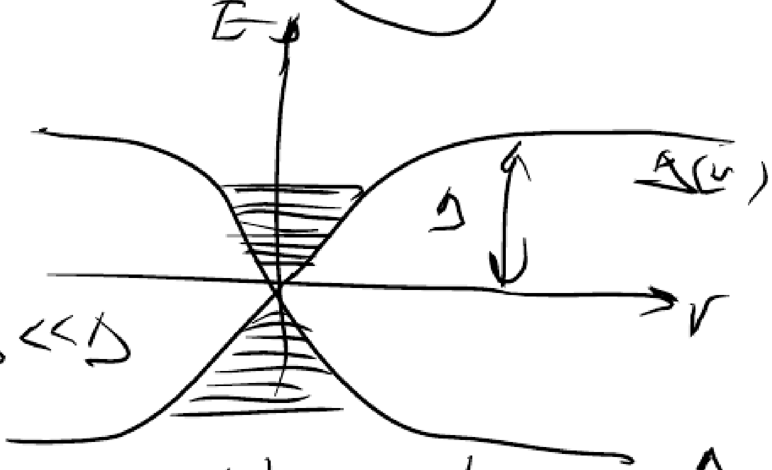
Жесткий край спектра (квазикл. квантование неприменимо)

③ Состояния в коре вихря

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0 \end{pmatrix} \qquad \Delta = |\Delta(r)| e^{i\theta}$$

$$\begin{pmatrix} H_0 & |\Delta(r)| e^{-i\theta} \\ |\Delta(r)| e^{i\theta} & -H_0 \end{pmatrix}$$

$\omega_0 \ll \Delta$



$$\frac{\omega_0}{\Delta} \sim \frac{1}{k_F \xi} \sim \frac{\Delta}{E_F}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_+(r)\, e^{i(\mu-\frac{1}{2})\theta} \\ f_-(r)\, e^{i(\mu+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \qquad \mu = \frac{1}{2} + n$$

В $\hat{H}_0$ пренебрегаем $\vec{A}$ – можно при

$B \ll H_{c2}$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(\mu \mp \frac{1}{2}\right)^2 + k_F^2 \pm \frac{2mE}{\hbar^2}\right] f_\pm$$

$$\mp\ \Delta(r)\, f_\mp = 0$$

$$f_\pm(r) = g_\pm(r)\, H_{\mu\mp\frac{1}{2}}(k_F r)$$

$$\mp \frac{\hbar^2}{m}\frac{d}{dr}\ln H_{\mu\mp\frac{1}{2}}(k_F r)\frac{d}{dr}g_\pm(r) +$$

$$+ \Delta(r)\,\frac{H_{\mu\pm 1/2}(k_F r)}{H_{\mu\mp\frac{1}{2}}(k_F r)}\, g_\mp(r) = \mathcal{E} g_\pm$$

$$\frac{d}{dr}\ln H_{\mu\mp\frac{1}{2}}(k_F r) = i k_F + \alpha(k_F r) \pm \beta(k_F r)$$

$$\frac{H_{\mu\pm 1/2}}{H_{\mu\mp 1/2}} = \mp i + \varkappa(k_F r) \pm \eta(k_F r)$$

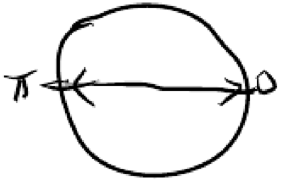
$$\tilde{\mathcal{H}} g = \varepsilon g \qquad \text{где} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_1$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = -i\hbar v_F \frac{d}{dr}\tau_z + \Delta(r)\tau_y$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = -\frac{\hbar^2}{m}\left[\alpha\tau_z + \beta\right]\frac{d}{dr} + \left[\varkappa\tau_x + i\eta\tau_y\right]\Delta(r)$$

1) Нулевое приближение: только $\tilde{\mathcal{H}}_0$

$$g^{(0)} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{-K(r)} \qquad K(r) = \frac{1}{\hbar v_F}\int_0^r \Delta(r')\,dr'$$



$E_0 = 0$

2) Учтем $\tilde{\mathcal{H}}_1$ как возмущение

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{\langle g^{(0)} | \tilde{\mathcal{H}}_1 | g^{(0)} \rangle}{\langle g^{(0)} | g^{(0)} \rangle}$$

$$\frac{B}{K_F} + \varkappa = \frac{1}{2}\left(\frac{H_{\mu-1/2} - H'_{\mu+1/2}}{H_{\mu+1/2}} + \frac{H_{\mu+\frac{1}{2}} + H'_{\mu-\frac{1}{2}}}{H_{\mu-\frac{1}{2}}} \right) = \frac{\mu}{K_F r}$$

$$\varepsilon_\mu = \mu \omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{\int_0^\infty \frac{\Delta(r)}{k_F r} e^{-2k(r)}\, dr}{\int_0^\infty e^{-2k(r)}\, dr}$$

$r \sim \xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta}$ интеграл сходится

$$\omega_0 \sim \Delta / k_F \xi_0 \sim \frac{\Delta^2}{E_F}$$

$$\psi_\mu(r) = \begin{pmatrix} J_{\mu-\frac{1}{2}}(k_r r)\exp\left(i\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\theta\right) \\ J_{\mu+\frac{1}{2}}(k_r r)\exp\left(i\left(\mu\mp\frac{1}{2}\right)\theta\right) \end{pmatrix} e^{-K(r)}$$

Это все для $k_r = 0$

Обобщение: $H_0^{(b+e)} = H_0 + \frac{\hbar^2}{2m}k_z^2$

$$k_r \to \sqrt{k_r^2 - k_z^2}$$

$$E_\mu(k_z) = \mu\,\omega_0(k_z)$$

$$\frac{\partial E_\mu}{\partial k_z} = \frac{k_z}{M}$$