Грязные сверхпроводники

$$H_0 = \hat{H}_{kin} + \int V(\vec{r})\,\psi^+\psi(r)\,d^3\vec{r} \qquad G(\omega_n|\bar{r},\bar{r}') = \sum_{\lambda} \frac{\psi_\lambda(r)\,\psi_\lambda^*(r')}{-i\omega_n + \xi_\lambda}$$

$$K(\bar{r},\bar{r}') = T\sum_{\omega_n}\sum_{\lambda,\mu} \frac{\psi_\lambda(r)\psi_\lambda^*(r')\,\psi_\mu(r)\psi_\mu^*(r')}{(+i\omega_n + \xi_\lambda)(-i\omega_n - \xi_\mu)}$$

$$= \sum_{\lambda\mu} \frac{\psi_\lambda(\bar{r})\psi_\mu(\bar{r})\,\psi_\lambda^*(r')\psi_\mu^*(r')}{2(\xi_\lambda + \xi_\mu)}\left(\operatorname{th}\frac{\beta\xi_\lambda}{2} + \operatorname{th}\frac{\beta\xi_\mu}{2}\right)$$

Уравнение на T_c:

$$\boxed{\Delta(\bar{r}) = V_0\int K(\bar{r},\bar{r}')\,\Delta(\bar{r}')\,d^3\bar{r}'} \qquad (*)$$

Предположим, что $\Delta(\vec{r}) \equiv \Delta$. Тогда $(*)$

сводится к $1 = V_0 \int K(\vec{r}, \vec{r}\,')\, d\vec{r}\,'$ $\Longrightarrow$

$$1 = V_0 \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda^2(r)\, \mathrm{th}\frac{\beta\xi_\lambda}{2}}{2\xi_\lambda} \cong V_0 \sum_\lambda \overline{\psi_\lambda^2(r)} \cdot \frac{\mathrm{th}\frac{\beta\xi}{2}}{2\xi}$$

$$1 = V_0\, \nu N_0 \int d\xi \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{th}\frac{\beta\xi}{2}}{2\xi} = V_0 N_0 \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi}\, \mathrm{th}\frac{\beta\xi}{2}$$

$$\boxed{T_c = T_c^{(\text{чистый})}}$$

"теорема Андерсона"

А.Абрикосов и Л.Горьков (1958)
P.W.Anderson (1958)

Выражение для $\Pi(q)$ при наличии беспорядка

$$\Pi(q) = \int e^{i\bar{q}\bar{\rho}}\, d^3\bar{\rho}\; \overline{K(\bar{r}, \bar{r}+\bar{\rho})}$$

$$K(\bar{r}, \bar{r}+\bar{\rho}) = T \sum_{\omega_n} \sum_{ij} \frac{\psi_i(r)\psi_j(r)\psi_i^*(\bar{r}+\bar{\rho})\psi_j^*(\bar{r}+\bar{\rho})}{(\xi_i - i\omega_n)(\xi_j + i\omega_n)}$$

$$\equiv T \sum_{\omega_n} G(\bar{r}, \bar{r}+\bar{\rho}, \omega_n)\, G(\bar{r}, \bar{r}+\bar{\rho}, -\omega_n)$$

$$\overline{K(\bar r, \bar r+\bar\rho)} = T\sum_{\omega_n} \overline{G(\bar r, \bar r+\bar\rho, \omega_n)\, G(\bar r, \bar r+\bar\rho, -\omega_n)}$$

$$\Pi(q) = T\sum_{\omega_n} \sum_{k=0}^{\infty} B^{K+1}(i\omega_n, q)\,(2\pi N_0 \tau)^{-K}$$

$$B(i\omega_n\, q) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}\, \overline{G(\omega_n, \bar p+\tfrac{\bar q}{2})}\; \overline{G(-\omega_n, \bar p-\tfrac{\bar q}{2})}$$

$$B(i\omega_n, q) = \frac{2\pi N_0 \tau}{1 + 2\tau|\omega_n| + D\tau q^2}$$

where $\boxed{D = \frac{v_F^2}{3}\tau = \frac{1}{3} v_F l}$

$$\overline{G}(\omega_n, \bar p) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p + \frac{1}{2\tau}\,\mathrm{sgn}\,\omega_n}$$

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi N_0 \tau)^k} B^{k+1}(i\omega_n, q) = \frac{B(i\omega_n, q)}{1 - B(i\omega_n, q)/2\pi N_0 \tau} = \frac{2\pi N_0}{2|\omega_n| + D q^2}$$

$$\Pi(q) = T \sum_{\omega_n} \frac{2\pi N_0}{2|\omega_n| + D q^2}$$

$$C = \frac{\partial \Pi}{\partial q^2}\Big|_{q=0} = D \cdot 2\pi N_0 T \sum_{\omega_n} \frac{1}{4\omega_n^2} = \frac{\pi D N_0}{T} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2 \pi^2}}_{\frac{1}{8}}$$

$$C = \frac{\pi D N_0}{8 T_c}$$

$$\overline{K(\bar r, \bar r + \bar\rho)} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Pi(q) e^{i\bar q \bar r} = \frac{N_0 T}{2D} \sum_{|\omega_n|} \frac{1}{\rho} e^{-\rho\sqrt{2|\omega_n|/D}}$$

$$\boxed{\xi_{dirty} = \sqrt{\frac{D}{2\pi T_c}} = \sqrt{\frac{1}{6} l \xi}}$$

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{\pi T_c}$$

Последствия <u>для H_{c2} и H_{c1}</u>

Диамагнитный отклик грязных сверхпроводников

$$\left(i\omega_n - \xi_k - \Sigma(\omega_n)\right) G(k,\omega_n) + \left(\Delta + \tilde{\Sigma}(\omega_n)\right) F^+(k,\omega_n) = 1$$

$$\left(i\omega_n + \xi_k - \tilde{\Sigma}(\omega_n)\right) F^*(k,\omega_n) + \left(\Delta^* + \tilde{\Sigma}^*(\omega_n)\right) G(k,\omega_n) = 0$$

Вводя обозначения $i\tilde{\omega}_n = i\omega_n - \Sigma(\omega_n) = i\omega_n \eta_\omega$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \tilde{\Sigma}(\omega_n) = \Delta \eta_\omega$$

Запишем решение в виде (обычном виде)

$$G = -\frac{\tilde{\omega}_n + \xi_k}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + \tilde{\Delta}^2} \qquad F = \frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + \hat{\Delta}^2}$$

где $\eta_\omega = 1 + \frac{\eta_\omega}{2\pi\tau}\int \frac{d\xi}{\xi^2 + (\omega_n^2+\Delta^2)\eta_\omega^2}$

Подробнее приведем вычисление η_ω ниже

то есть $\eta_\omega = 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}$ (сравнить с норм. (вблизи T_c))

Эти функции G и F используем как и ранее (лекция 11)

Для вычисления n_S:

$$n_S = \frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m} T\sum_n \int d\xi \left[\frac{\xi^2+\tilde\Delta^2-\tilde\omega_n^2}{(\xi^2+\tilde\Delta^2+\tilde\omega_n^2)^2} - \frac{\xi^2-\tilde\omega_n^2}{(\xi^2+\tilde\omega_n^2)^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{N_0 p_F^2}{m}\cdot\pi\Delta^2\cdot T\sum_n \frac{1}{(\omega_n^2+\Delta^2)\left(\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}+\frac{1}{2\tau}\right)}$$

n

При $\frac{1}{\tau} \ll \Delta$ вернемся к „чистому пределу"

При $v_\tau \gg \Delta$

$n_s = n\pi\Delta\tau\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}$ при $T\to 0$ фактор подавления $\Delta\tau \ll 1$

Для $Q = \frac{e^2 n_s}{mc} = \frac{ne^2\tau\Delta}{mc}\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T} = \frac{\pi\sigma\Delta}{c}\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}$

$$\boxed{\vec{j} = -Q\vec{A}}$$

$\tau \to \tau_{tr}$

Вернемся к вычислению η_ω

$$\Sigma(\omega_n) = n\overline{V^2}\int G(k,\omega_n)\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\tau}\,\mathrm{sgn}(\omega_n)$$

для нормального металла

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi n\overline{V^2}\nu(0) \qquad \Sigma(\omega_n) = \frac{1}{2\tau}\frac{\omega_n}{|\omega_n|}$$

~~Для~~ сверхпроводника зашщем

$$i\omega_n - \Sigma(\omega_n) \equiv i\tilde{\omega}_n \equiv i\omega_n \eta(\omega_n)$$

$$\Delta + \tilde{\Sigma}(\omega_n) \equiv \tilde{\Delta} \equiv \Delta \eta(\omega_n)$$

Интеграл по (d^3k) теперь сводится для $\tilde{\Sigma}$ к виду

$$\overline{nV^2}\,\nu(0)\int d\xi\,\frac{\tilde{\Delta}}{\tilde{\omega}_n^2+\xi^2+\tilde{\Delta}^2} = \frac{1}{2\tau}\frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2+\tilde{\Delta}^2}}$$

то есть

$$\tilde{\Sigma}(\omega_n) = \Delta\left(\eta(\omega_n) - 1\right) = \frac{1}{2\tau}\frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}}$$

$\eta(\omega_n)$ сокращена в правой части

получим, что $\eta(\omega_n) = 1 + \frac{1}{2\tau}\frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}$

Такое же выражение получается и для нормальной части $\Sigma(\omega_n)$

Спин-орбитальное взаимодейст

$$H_0 = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\vec{\nabla}\hbar - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + V(r)\right]\hat{1} + \underbrace{i\vec{V}_{SO}(r)\left[\vec{\sigma}\times\vec{\nabla}\right]}_{SO}$$

$$+ \underbrace{\vec{\sigma}\cdot\vec{h}(r)}_{\ominus\ \text{Зееман}}$$

$\ominus$

T-inversion: а) комплексное сопряжение
б) $\vec{\sigma} \to -\vec{\sigma}$

При $\vec{A} = \vec{h} = 0$ $\qquad H_0 = H_0^*$

Однако СО связь не позволяет отделить $\vec{k}$ – зависимость от спиновой

$$\hat{H}_0 \Psi_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} \Psi_{\lambda} \qquad \varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{-\lambda}$$

$$\psi_{\lambda}(r) = \sum_{\bar{k},\bar{\sigma}} \langle \lambda | \bar{k}, \bar{\sigma} \rangle \psi_{\bar{k},\sigma}(r)$$

Time reversed!

$$\Psi_{-\lambda}(r) = \sum_{k,\sigma} \langle \lambda | \bar{k}, \bar{\sigma} \rangle^* \Psi_{-k,-\sigma}(r)$$

$$F(\vec{r}) = \sum_{\lambda} \langle a_\lambda a_{-\lambda} \rangle \Psi_\lambda(r) \Psi_{-\lambda}(r)$$

аномальная Ф.Г.

спариваются состояния связанные

Т-инверсией

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} S_{\lambda\lambda'} (a_\lambda^* a_{\lambda'} - a_{\lambda'}^* a_\lambda)$$

вместо $\frac{1}{2} \sum_k (a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} - a_{k\downarrow}^* a_{k\downarrow})$

$\hbar/\tau_{so}$ – ширина полосы энергий в

которой $S'_{\lambda\lambda'}$ не малы

P.W.Anderson
PRL, **3**, 325 (1959)

Результат $\chi_s/\chi_n = 1 - \#\left(\frac{\tau_{so}\Delta}{\hbar}\right)$

$T = 0$ $\chi_s/\chi_n \simeq \frac{\hbar}{\tau_{so}\Delta} \ll 1$ $\ll 1$

Сдвиг Найта:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{8\pi}{3n_{at}}|\psi(0)|^2\chi$$

Парамагнитный предел при наличии SO:

$$F_s = -\frac{\Delta^2}{2}N_0 - \chi_s H^2/2 = -\frac{\Delta^2}{2}N_0 - \mu_B^2 H^2 N_0 \times \chi_s/\chi_n$$

$$F_n = -\chi_n H^2/2 = -\mu_B^2 H^2 N_0$$

$$F_s = F_n \Rightarrow \boxed{H_p^{(so)} \sim H_p^{(0)}/\sqrt{\tau_{so}\Delta/\hbar} \gg H_p^{(0)}}$$

Когда это важно?

$$\frac{\tau}{\tau_{SO}} \sim \left(Z\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4$$

$\tau_{SO} \sim 30\,\tau$ — уже может быть меньше $\hbar/\Delta$

тяжелые металлы

Сверхпроводимость при нарушении Т-инвариантности

Куперовский пропагатор в $\bar H \neq 0$, $\bar A \neq 0$

$$\overline{K(\vec r, \vec r+\vec\rho, \vec A)} = T\sum_{\omega_n} \overline{G(\vec r, \vec r+\vec\rho; \omega_n, \vec A)\, G(\vec r, \vec r+\vec\rho, -\omega_n, \vec A)}$$

$$G(\vec r, \vec r+\vec\rho, \vec A) = G(\vec r, \vec r+\vec\rho)\, e^{i\frac{e}{\hbar c}\vec A\vec\rho}$$

$$B(i\omega_n, \vec A) = B(\omega_n) - \frac{2e^2}{\hbar^2 c^2} A_\alpha A_\beta \times$$

$$\underbrace{\int d^3\rho\, \overline{G}(\omega_n,\rho)\, \overline{G}(-\omega_n,\rho)}\cdot \rho_\alpha \rho_\beta$$

$$\rightarrow \exp(-\rho/l)$$

При A=0 было так (напоминание):

$$B(i\omega_n, q) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \overline{G(i\omega_n, p+\tfrac{q}{2})}\; \overline{G(-i\omega_n, p-\tfrac{q}{2})}$$

$$B(i\omega_n, q) = \frac{2\pi N_0 \tau}{1 + 2\tau|\omega_n| + D\tau q^2}$$

Сингулярность:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi N_0 \tau)^k} B^{k+1}(i\omega_n, q) = \frac{B(i\omega_n, q)}{1 - B(i\omega_n, q)/2\pi N_0 \tau} = \frac{2\pi N_0}{2|\omega_n| + D q^2}$$

$$B(i\omega_n, \bar{A}) = B(i\omega_n) - \frac{2e^2}{\hbar^2 c^2} A_\alpha A_\beta \times$$

$$\underbrace{\int d^3p\, \bar{G}(\omega_n, p)\, \bar{G}(-\omega_n, p)\, p_\alpha p_\beta}$$

$$\exp(-\rho/l)$$

$$\frac{\partial^2 B(i\omega_n, q)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\bigg|_{q=0} = 2\pi\nu_0\tau \frac{2D\tau\delta_{\alpha\beta}}{(1+2\tau|\omega_n|)^2}$$

$$1 - \frac{B(\omega_n, \bar{A})}{2\pi\nu_0\tau} = 2\tau|\omega_n| + D\tau q^2 + \underbrace{\frac{4e^2}{(\hbar c)^2}\vec{A}^2 D\tau} \Longleftrightarrow \Gamma\tau$$

Здесь τ - упругое время пробега

Найдем величину Γ для шара

Шар радиуса $a \ll \xi$

$\bar{A} = \frac{H}{2}[\bar{r} \times \bar{n}]$ калибровка

div A = 0

А. И. Ларкин, 1965

$$\overline{\vec{A}^2(r)} = \frac{H^2 a^2}{10}$$

$$\Gamma = \frac{2e^2 H^2 a^2}{5\hbar c^2} D$$

Появление “фактора распаривания” обрезает сингулярность
сверхпроводящего пропагатора и подавляет сверхпроводимость

Распаривание - пример №2

Нетривиальное спаривание + потенц. примеси

$$\langle g(\hat{k}) \rangle_{\text{ф.п.}} = 0$$

$$\frac{1}{\tau} \gg \frac{\Delta}{\hbar}$$

$$\left(i\omega_n - \xi_k - \Sigma(\omega_n)\right) G(k,\omega) + \Delta(\hat{k})\, F^*(\hat{k},\omega_n) = 1$$

$$\left(i\omega_n + \xi_k - \Sigma(\omega_n)\right) F^* + \Delta^*(\hat{k})\, G(k,\omega) = 0$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int (dk)\, G(k,\omega_n)$$

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau}\int d\vec{k}\, F(\vec{k},\omega_n) = 0$$

$$G = -\frac{i\tilde{\omega}_n + \xi_k}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta(\vec{k})|^2}$$

$$i\tilde{\omega}_n = i\omega_n - \Sigma(\omega_n)$$

$$F = \frac{\Delta(\vec{k})}{\tilde{\omega}_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta(\vec{k})|^2}$$

Self-energy $\tilde{\Sigma}$ = 0 из-за усреднения по углам на Ф.П.

$$\Sigma(\omega_n) = -\frac{i\tilde{\omega}_n}{2\tau}\int \frac{d\Omega}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + |\Delta(\vec{k})|^2}}$$

Вблизи T_c: $\Sigma(\omega_n) = -\frac{i\,\mathrm{sgn}(\omega_n)}{2\tau}$

$$F(\bar{k},\omega_n) = \frac{\Delta(\bar{k})}{\left(|\omega_n| + 1/2\tau\right)^2 + \xi_k^2}$$

$$\Delta(\bar{k}) = \pi\nu_0 V_e T \sum_{\omega_n} \frac{2}{2|\omega_n| + 1/\tau}\,\Delta(\bar{k})$$

$$\Gamma = 1/\tau \longrightarrow \tau_{tr}$$

Куперовский логарифм обрезается снизу величиной 1/τ

Тогда ур-ние на T_c имеет вид

$$\frac{1}{V_0} = 2\pi\nu_0 T_c \sum_{\omega_n} \left(\frac{1}{2|\omega_n| + \Gamma} - \frac{1}{2|\omega_n|} + \frac{1}{|2\omega_n|} \right)$$

$$\frac{1}{V_0\nu_0} = \ln \frac{1.14\,\varepsilon_0}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{4\pi T_c}\right)$$

$$\ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{4\pi T_c}\right) - \psi(1/2)$$

$$\underline{\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)} \sim \ln z + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

при $z \to \infty$

$T_c \to 0$ при $\Gamma \to \Gamma_c$

$$\Gamma_c = \pi e^{-C} T_{c0} = \Delta_0$$

$$\ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \ln\left(\frac{\Gamma_c}{4\pi T_c}\right) + C + 2\ln 2$$

$T_c \to 0$

верно

gapless SC (Абрикосов, Горьков 1962)

$$\Delta(0) = \frac{\pi}{\gamma} T_c$$

$$\gamma = e^{C}$$

$$\Gamma_1 \simeq 0.9\,\Gamma_c$$

Уравнения на функции Грина сверхпроводника с распариванием имеют одинаковый вид для трех разных механизмов распаривания:

1) Spin-flip $\Gamma = \frac{1}{\tau_s}$ магнитные примеси

2) Магнитное поле $\Gamma = \frac{2e^2H^2a^2}{5\hbar^2c^2}D$

3) LFO беспорядок $\Gamma = 1/\tau$

Бесщелевая сверхпроводимость

Те же уравнения на self-energy но для реальной энергии

$$i\omega_n \to E + i0 \qquad i\tilde{\omega}_n \to t(E)$$

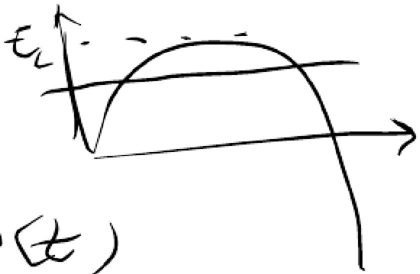
$$t(E) = E + \frac{i}{2\tau}\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{t(E)}{\sqrt{t^2 - |\Delta(k)|^2}}$$

$$\nu(E) = \underline{2\nu_0 \tau \,\mathrm{Im}\, t(E)}$$

В-фазе ^3He $|\Delta(\vec{k})|^2 = \Delta^2$

$$t(E) = E + \frac{i}{2\tau}\frac{t(E)}{\sqrt{t^2(E) - \Delta^2}} \quad (**)$$

при $E < E_c$ $\exists$ решение с $\operatorname{Im} t = 0$



$$E = \underbrace{t - \frac{t}{2\tau}\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - t^2}}}_{\varphi(t)}$$

$$\varphi'_t = 0 \quad E_c = \Delta\left[1 - \left(\frac{1}{2\tau\Delta}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$$

$E_c \to 0$ при $\frac{1}{\tau} = 2\Delta > 0$

Есть бесщелевое решение