Лекция 14

Микроскопическая теория слабых контактов

① Туннельный контакт Джозефсона

① S | S ② $H = H_1 + H_2 + H_T$

$$H_T = \sum_{\bar p \bar q \sigma} \left(t_{pq} a^+_{p\sigma} a_{q\sigma} + h.c. \right)$$

$$H_1 = \sum_{\bar p \sigma} \left[\xi_{\bar p} a^+_{\bar p \sigma} a_{\bar p \sigma} + \frac{1}{2}\left(\Delta_{\bar p \sigma} a^+_{\bar p \sigma} a^+_{-\bar p, \sigma} + h.c. \right) \right]$$

$E_0(\varphi)$ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ $I_s(\varphi) = \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial E_0}{\partial \varphi}$

Нормальный тунн. ток

$$\vec\Gamma(V) = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{V_1 V_2}\sum_\sigma \iint (d\bar p)(d\bar q)\, |t_{pq}|^2 \delta(\xi_p - \xi_q - eV) f(\xi_q)(1 - f(\xi_p))$$

$$= \frac{4\pi}{\hbar}\nu_1 \nu_2 \overline{|t_{pq}|^2} \underbrace{\int d\varepsilon\, f(\varepsilon)(1 - f(\varepsilon + eV))}_{eV \text{ при } T=0}$$

$$\overleftarrow\Gamma(V) = \dots \int d\varepsilon\, f(\varepsilon)(1 - f(\varepsilon - eV))$$

$$I = e(\vec\Gamma - \overleftarrow\Gamma) = \frac{V}{R_n} \qquad \frac{1}{R_n} = \frac{4\pi e^2}{\hbar}\nu_1 \nu_2 \overline{|t_{pq}|^2}$$

Верно при $\forall T$ – проверить!

Сверхпроводники $E_0^{(2)} = \sum_{\bar p \bar q} |(H_T)_{\bar p \bar q}|^2 / E_0 - E_{pq}$

$$E_0^{(2)} = -2\sum_{\bar p \bar q} |t_{\bar p \bar q}|^2 \frac{|v_{\bar p} u_{\bar q} + v_{\bar q} u_{\bar p}|^2}{\varepsilon_{\bar p} + \varepsilon_{\bar q}} \qquad \varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2}$$

$$u_p = \frac{\varepsilon_p + \xi_p}{\sqrt{(\varepsilon_p + \xi_p)^2 + |\Delta_1|^2}} \qquad v_p = -\frac{\Delta_1}{\sqrt{(\varepsilon_p + \xi_p)^2 + |\Delta_1|^2}}$$

$$u_p^2 - v_p^2 = \frac{\xi_p}{\varepsilon_p} \qquad 2 u_p v_p^* = \frac{\Delta_1}{\varepsilon_p}$$

$$E_0^{(2)} = -\sum_{\bar p \bar q} \frac{|t_{pq}|^2}{\varepsilon_p + \varepsilon_q}\left[1 - \underbrace{\frac{\xi_p \xi_q}{\varepsilon_p \varepsilon_q}}_{\to 0} + \mathrm{Re}\frac{\Delta_1 \Delta_2^*}{\varepsilon_p \varepsilon_q} \right]$$

$$E_\varphi(T=0) = -E_J \cos\varphi$$

$$E_J = |\Delta_1||\Delta_2|\nu_1\nu_2 \iint d\xi_1 d\xi_2 \frac{|t_{pq}|^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} =$$

$$= \frac{\hbar}{4\pi e^2 R_n}|\Delta_1||\Delta_2| \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \Delta_1^2}\sqrt{\xi_2^2 + \Delta_2^2}\left(\sqrt{\xi_1^2 + \Delta_1^2} + \sqrt{\xi_2^2 + \Delta_2^2} \right)}$$

$\xi_i = \Delta_i \,\mathrm{sh}\, x_i$ $$E_J = \frac{\hbar}{e^2 R_n}\frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} K\left(\frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

$K(k) = \frac{\pi}{2}\Big|_{k=0}$ медленно меняется при малых k

в интервале $0.5 < \frac{\Delta_1}{\Delta_2} < 2$

$$E_J = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{e^2 R_n}\frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \longrightarrow \frac{\pi\hbar}{4e^2 R_n}\Delta = \frac{R_Q}{2R_n}\Delta$$

$$R_Q = \frac{h}{(2e)^2} \simeq 6.5\,\text{kОм}$$

1-ый член

$$E^{(2,1)} - E^{(2,n)} = \frac{\hbar \Delta_1 \Delta_2}{4\pi e^2 R_n}\iint d\xi_1 d\xi_2 \left(\frac{1}{|\xi_1| + |\xi_2|} - \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)$$

Можно показать $= E_J(T=0)$

$$\boxed{E^{(2)}_{tot}(\varphi) = E_J(1 - \cos\varphi)}$$

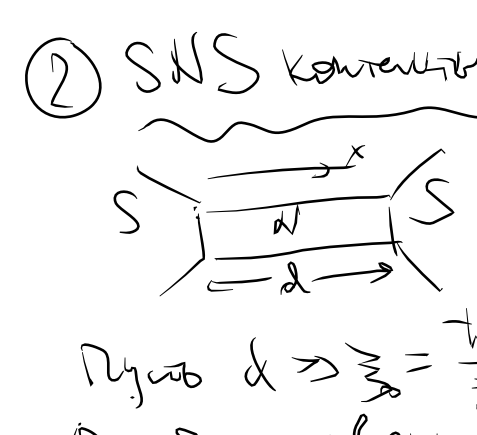
$T \neq 0$ $F(\varphi) \longrightarrow I_s = \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial F}{\partial\varphi}$

Термодинамическая теория возмущений

§32 Стетфиз 1

$$E_J(T) = \frac{\hbar \Delta_1 \Delta_2}{4\pi e^2 R_n}\iint d\xi_1 d\xi_2 \frac{\varepsilon_1 \,\mathrm{th}\,\varepsilon_2/2T - \varepsilon_2 \,\mathrm{th}\,\varepsilon_1/2T}{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

$$E_J(T) = \frac{\hbar \Delta_1 \Delta_2}{\pi e^2 R_n}\int_{\Delta_1}^{\infty}\int_{\Delta_2}^{\infty} \frac{d\varepsilon_1 d\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - \Delta_1^2}\sqrt{\varepsilon_2^2 - \Delta_2^2}} \frac{1}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}\left[\varepsilon_1 \,\mathrm{th}\frac{\varepsilon_2}{2T} - \varepsilon_2 \,\mathrm{th}\frac{\varepsilon_1}{2T} \right] =$$



$$= \frac{\hbar \Delta_1 \Delta_2}{\pi e^2 R_n}\pi^2 T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2}}\frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2}}$$

$$\omega_n = \pi T(2n+1)$$

при $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ $$\boxed{E_J(T) = \frac{\pi\hbar}{4e^2 R_n}\Delta\, \mathrm{th}\frac{\Delta}{2T}}$$

② SNS контакты и Андреевские уровни

S | N | S, d

$$\varepsilon_n^{(\pm)} = \frac{\hbar v_x}{2d}\left[2(\pi n + \theta_{\varepsilon_n}) \mp \varphi \right]$$

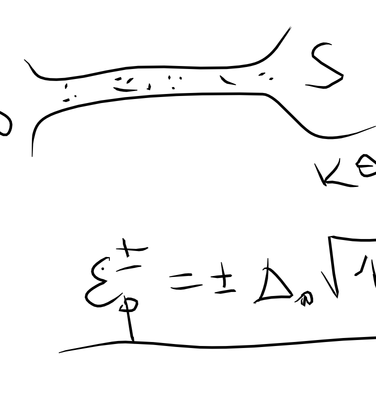
$$\theta_\varepsilon = \arccos(\varepsilon/\Delta)$$

Пусть $d \gg \xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi\Delta}$ много решений с $\varepsilon < \Delta$

Особый уровень при $\varphi = \pi$: $\varepsilon_0 = 0$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt 2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\,\mathrm{sgn}(k_x) \end{pmatrix} \exp\left[-\frac{\hbar}{v_x}\int_0^x \Delta(y)\, dy \right]$$

При $d \ll \xi_0$ – пара решений $\boxed{\varepsilon = \pm\Delta\cos\frac{\varphi}{2}}$



Есть N рассеяние

Beenakker 1991

S ~ S N каналов

коэфф. прохождения $0 < T_p < 1$

$p = (1, \dots, N)$

$$\varepsilon_p^{\pm} = \pm\Delta_0\sqrt{1 - T_p \sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

для $d \ll \frac{\hbar v_F}{\Delta_0}$

T_p не зависит от ε

$$I(\varphi) = \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial F}{\partial\varphi} \qquad F(\varphi) = -T\sum_k \ln\left(1 + e^{-\varepsilon_k(\varphi)/T} \right)$$

$$I(\varphi) = -\frac{2e}{\hbar}\sum_{\varepsilon_k > 0} \mathrm{th}\frac{\varepsilon_k}{2T}\frac{\partial\varepsilon_k}{\partial\varphi} - \frac{2e}{\hbar}2T\int_\Delta^\infty d\varepsilon \frac{\partial\rho(\varepsilon,\varphi)}{\partial\varphi}\ln\left(2\,\mathrm{ch}\frac{\varepsilon}{2T} \right)$$

главный для $d \ll \xi_0$

$$I(\varphi) = \frac{e\Delta}{2\hbar}\sin\varphi\sum_{p=1}^{N}\frac{T_p}{\sqrt{1 - T_p\sin^2\frac{\varphi}{2}}}\,\mathrm{th}\left(\frac{\Delta}{2T}\sqrt{1 - T_p\sin^2\frac{\varphi}{2}} \right)$$

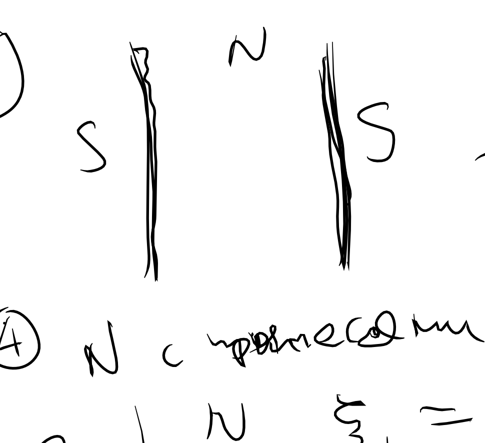
а) Туннельный предел $T_p \ll 1$ $\sum_p T_p = \frac{h}{2e^2}\frac{1}{R_n}$

$$I = \frac{e\Delta}{2\hbar}\frac{2\pi\hbar}{2e^2 R_n}\sin\varphi \longleftarrow \text{точно AB}$$

б) при $T \ll \Delta$, и $T_p \sim 1$ $I(\varphi)$ отличается от $\sin\varphi$

в) $N \gg 1$, $d \gg l$ распределение $\mathcal{P}(T_p)$

Дорохов (1983): $$\mathcal{P}(T)\,dT = \frac{dT}{2T\sqrt{1 - T}}$$



$$\overline{I(\varphi)} = \int \underset{\text{Beenak}}{I(\varphi)}\,\mathcal{P}(T)\,dT$$

③

S | N | S SINIS

$$I(\varphi) \sim \frac{1}{R_T^2}$$

④ N с примесями

диффузия с коэфф. $D = \frac{v l}{3}$

S | N $$\xi_N = \sqrt{\frac{\hbar D}{2\pi T}}$$

S | N | S, d $I(\varphi) \sim \exp(-d/\xi_N)$

$$F(\bar k, \omega_n) = \frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + \Delta^2}$$ нет зависимости от $\vec x$

$\Psi(\vec x) \sim \Delta(\vec x)$

$F(\bar k_1, \bar k_2; \omega_n)$

или $F(\bar x_1, \bar x_2; \omega_n)$

функция Вигнера $F\left(X = \frac{\bar x_1 + \bar x_2}{2}; \vec k; \omega_n \right)$

$\vec k \underset{FT}{\Leftrightarrow} (\bar x_1 - \bar x_2)$

Избавимся от $\vec k$ используя квазиклассику $k_F\xi \gg 1$

$$\Psi = T\sum_{\omega_n}\int d\xi\, F(k, \omega_n) = \pi T\sum_{\omega_n}\frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}} = \pi T\sum_{\omega_n} f(\omega_n)$$

$$\Delta = V_0 \nu_0 \Psi = \pi\nu_0 V_0 T\sum_{\omega_n} f(\omega_n)$$

Как учесть неоднородность по $\vec x$

упрощение: $\Delta \ll T \implies f(\omega_n) = \frac{\Delta}{|\omega_n|}$

Ядро оператора GL!

$$\Pi(\bar q) = \int e^{-i\bar q\bar\rho}\,d\bar\rho\, \overline{K(\bar r, \bar r + \bar\rho)} = T\sum_{\omega_n}\frac{2\pi\nu_0}{2|\omega_n| + Dq^2}$$

$$f(\omega_n, \bar q) = \frac{2}{2|\omega_n| + Dq^2}\Delta(q)$$

$$\begin{cases} -\frac{D}{2}\nabla^2 f(\bar r, \omega_n) + |\omega_n| f(\bar r, \omega_n) = \Delta(\bar r) \\ \Delta(\bar r) = V_0 \nu_0 \pi T\sum_{\omega_n} f(\bar r, \omega_n) \end{cases}$$

$f(\bar r, \omega_n)$ – аном. ф.Г. не содержит масштаба λ_F

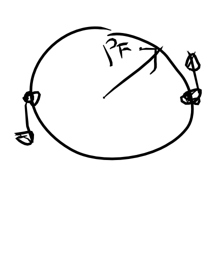
$$|\omega_1| = \pi T \qquad \xi^2(T) = \frac{D}{2\pi T}$$

$$I_s(\varphi) \sim \exp(-d/\xi(T)) \quad \text{при } d \gg \xi_T$$

⑤ SFS

S | F | S

$$\xi_{\bar p\uparrow} = \xi_{\bar p} + \mu_B H \qquad \xi_{\bar p\downarrow} = \xi_{\bar p} - \mu_B H$$



спарим $\left(\bar p + \frac{\bar q}{2} \right)$ и $\left(-\bar p + \frac{\bar q}{2} \right)$

$$\xi_{p + \frac{q}{2}, \uparrow} = \xi_p + \frac{\hbar v_F}{2}\bar q + \mu_B H$$

$$\xi_{p - \frac{q}{2}, \downarrow} = \xi_p - \frac{\hbar v_F}{2}\bar q - \mu_B H$$

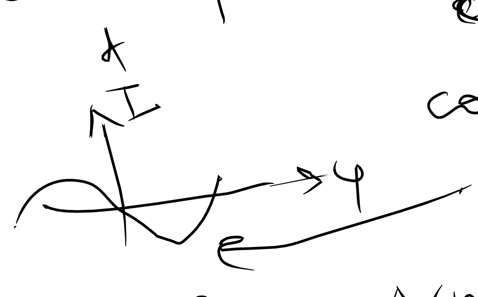
$\hbar q v_F = -2\mu_B H$ Полный импульс пары $\vec q$, $|q| = 2\mu_B H / \hbar v_F$

$$q = \frac{E_{ex}}{\hbar v_F}$$

$$\Delta(x) \sim \cos(qx)$$

S | F | S, d $$I_c^{(SFS)} \sim \cos(qd)$$

$\cos(qd) < 0 \implies$ π-контакт

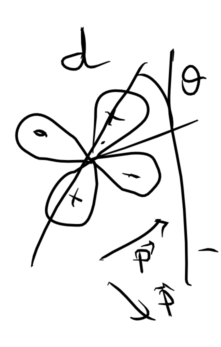


Грязный предел $$\Delta(r) \sim \exp\left\{ -r\sqrt{\frac{iE_x}{\hbar D}} \right\}$$

толщина d малой

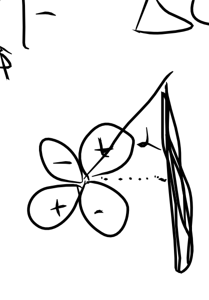
⑥

$$\Delta(\hat k) \sim \hat k_x^2 - \hat k_y^2$$



d-I-S

$$\Delta(\vec p) \sim \cos 2\theta_{\vec p}$$



в главном по $|t_{pq}|$ порядке результат = 0

$\alpha = \pi/4$

$$I(\varphi) = \underbrace{I_1}_{\to 0 \text{ при } \alpha = \pi/4}\sin\varphi + I_2\sin 2\varphi$$