Лекция 2 — Теория ГЛ

$$F_s - F_n = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\bar{A}\Psi\right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{BH}{4\pi}$$

$$\bar{B} = \nabla\times\bar{A}$$

Уравнения ГЛ:

$$(1)\quad \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{1}{2m^*}\left(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\bar{A}\right)^2\Psi = 0$$

$$(1')\quad \left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\bar{A}\Psi\right)\cdot\vec{n} = 0 \leftarrow$$ гран. условия

вывод см. в Шмидт §54

$$-\frac{i\hbar e}{m^*}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{4e^2}{m^*c}\bar{A}|\Psi|^2 - \frac{c}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\bar{A} = 0$$

плотность тока

$$\vec{j} = c\frac{\delta F_s}{\delta A} = en_s\vec{V}_s \qquad (2)$$

$$\cancel{\vec{V}_s = -i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\vec{A}\Psi}$$

$$\psi = \frac{\Psi}{\Psi_0} \qquad \Psi_0^2 = |\alpha|/\beta = \frac{n_s}{2}$$

!!! Начало здесь !!!

$$F_s - F_n = \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \qquad F_s - F_n = -\alpha^2/2\beta$$

$$H_c^2 = 4\pi\alpha^2/\beta \sim |T_c - T|^2$$

$$H_c \sim T_c - T$$

$$\Delta C = T\frac{\partial S_s}{\partial T} - T\frac{\partial S_n}{\partial T} = -T\frac{\partial^2(F_s - F_n)}{\partial T^2} = T_c\frac{\tilde{\alpha}^2}{\beta}$$

Лекция 2

Градиентная инвариантность

$$\Psi \to \Psi e^{i\chi} = \Psi'$$

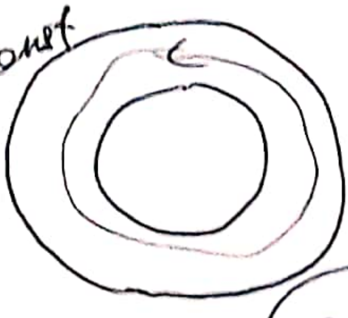
$$\vec{A} \to \vec{A} + \frac{\hbar c}{2e}\nabla\chi = \vec{A}'$$

У-ние для Ψ' и $\vec{A}'$ не меняются

Квантование магн. потока

$$\Psi = |\Psi| e^{i\varphi}$$

$|\Psi|^2 = const$



$$j = \frac{2\hbar e}{m^*}|\Psi|^2\nabla\varphi - \frac{4e^2}{m^* c}|\Psi|^2\vec{A} = \frac{2e\,|\Psi|^2}{m^*}\left(\hbar\nabla\varphi - \frac{2e}{c}\vec{A}\right) = \vec{v}_s$$

Заряд пары

плотность пар

$$0 = \oint \vec{j}\, d\vec{l} = 2\pi n\hbar - \frac{2e}{c}\Phi \Rightarrow \Phi = \frac{2\pi\hbar c}{2e} n = \Phi_0 n$$

$\Phi_0 = 2\cdot 10^{-7}$ Гс·см²

Φ_0 на $\square$ мкм = H = 20 Гс

Глубина проникн. и длина когерентности

$$\lambda^2 = \frac{m^* c^2 \beta}{16\pi e^2|\alpha|} = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \qquad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}$$

λ/ξ не содержит $|\alpha|$!

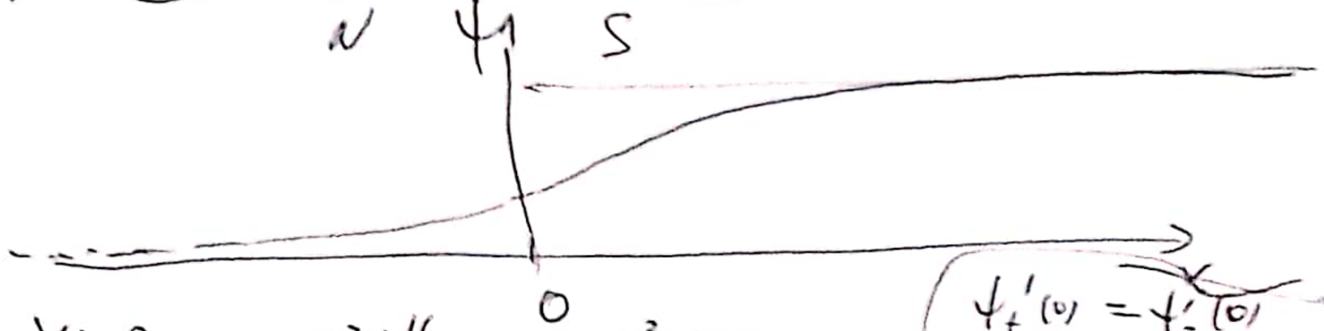
$$\boxed{\lambda/\xi = \varkappa}$$

$$\xi^2\left(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\vec{A}\right)^2\psi - \psi + \psi|\psi|^2 = 0 \qquad (1')$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = -i\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - \frac{|\psi|^2}{\lambda^2}\vec{A} \qquad (2')$$

Лекция 2

Граница S – N и эффект близости



$x>0$: $-\xi^2\psi_+'' - \psi_+ + \psi_+^3 = 0$

$x<0$: $-\xi_n^2\psi_-'' + \psi_- = 0$

$$\begin{aligned}\psi_+'(0) &= \psi_-'(0)\\ \psi_+(0) &= \psi_-(0)\end{aligned}$$

1-ый интеграл: $(\psi')^2 = -\psi^2 + \psi^4/2 + C$

$x>0$: $\psi_+(x) = \mathrm{th}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\,\xi}\right)$ x_0 – произвольн.

$x<0$: $\psi_-(x) = A e^{x/\xi_n}$

$$\begin{aligned}A &= -\mathrm{th}\frac{x_0}{\sqrt{2}\,\xi}\\ \frac{\xi_n}{\sqrt{2}\,\xi}(1-A^2) &= A\end{aligned}$$

из сшивки

Когда $T\to T_c-0$, $\xi(T)\to\infty$

$\frac{\xi_n}{\xi}\to 0$ $\psi(0) \simeq \frac{\xi_n}{\sqrt{2}\,\xi} \sim \sqrt{1-T/T_c}$ – нормирован. п. порядка

Полный п.п. $\boxed{\Psi(x=0) \sim (1-T/T_c)}$

появление сверхпров. на границе с N мет.

Лекция 2

Энергия границы раздела фаз S–N в магнитном поле

$\vec{A} = (0, A(x), 0)$ $\quad \psi(+\infty) = \Psi_0$

$\vec{B} = (0, 0, A')$ $\quad \psi(-\infty) = 0$

При $H = H_c$ $\; F_n = F_s$, а энергия границы раздела (на ед. площади) есть

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(F_s - F_n)$$

где F_s, F_n в присутствии магн. поля $\vec{H}$

$$F_n = F_{n0} - \frac{H_c^2}{8\pi} = F_{n0} - \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

$$\sigma_{ns} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \frac{4e^2}{\hbar^2 c^2} A^2 |\psi|^2\right] + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{H_c B}{4\pi} + \frac{\alpha^2}{2\beta} \right\} dx$$

$\{\ldots\}$ обращается в нуль при $x \to \infty$ $\left(B = 0,\ \psi = \Psi_0\right)$

при $x \to -\infty$ $\left(B = H_c,\ \psi = 0\right)$

Вводим безразмерные величины

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda} \qquad \psi = \frac{\Psi}{\Psi_0} \qquad \bar{A} = \frac{A}{H_c \lambda} \qquad \bar{B} = \frac{B}{B_c}$$

Лекция 2

$$\begin{cases} \psi'' = \varkappa^2\left[\left(\frac{A^2}{2}-1\right)\psi + \psi^3\right] & \text{(I)} \\ A'' = A\psi^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

$\psi = 1 \quad A' = 0 \quad x = \infty$

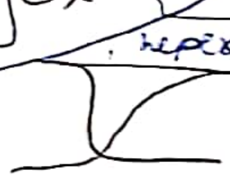
$\psi = 0 \quad A' = B = 1 \quad x = -\infty$

Первый интеграл: $\underline{\frac{2}{\varkappa^2}(\psi')^2 + (2-A^2)\psi^2 - \psi^4 + (A')^2 = 1}$ (*)

Тогда можно переписать $\boxed{\sigma_{ns} = \frac{\lambda H_c^2}{8\pi}\int\left[\frac{2}{\varkappa^2}(\psi')^2 + (A^2-2)\psi^2 + \psi^4 + (A'-1)^2\right]dx}$

$$\sigma_{ns} = \frac{\lambda H_c^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2}{\varkappa^2}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + A'(A'-1)\right]dx \qquad (1)$$

переход с учётом ψ^4 из (*)



Пусть $\varkappa \ll 1$ $\quad \psi = th\left(\frac{\varkappa x}{\sqrt{2}}\right)$,

$$\sigma_{ns} \simeq \frac{\lambda H_c^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{ch^2\frac{\varkappa x}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{H_c^2}{8\pi}$$

При $\varkappa \gg 1$ $\quad \sigma_{ns} < 0$

Убедимся, что $\sigma_{ns} = 0$ при $\underline{\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Преобразуем (1) к виду

$$\frac{H_c^2\lambda}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left[(A'-1)^2 - \psi^4\right]$$

интегрируя (1) по частям и подставляя ψ'' из (I)

Теперь достаточно убедиться, что при $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ уравнение ГЛ (I–II) приводит к

$$\{A' - 1 = -\psi^2\},\ \text{т.е.}\ \sigma_{ns} = 0.$$

$\varkappa_c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ разделяет I и II род сверхпроводников

Неустойчивость N state при $\varkappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ – задан