А) Вихрь в потенциале слабых дефектов

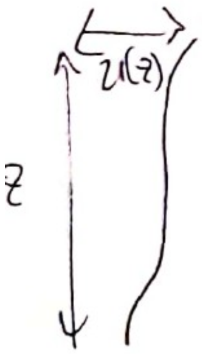
$$F = \int \left[\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\frac{\partial \bar u}{\partial z}\right)^2 + V(\bar u, z)\right] dz$$

случайный гауссов потенциал

$$\langle V(\bar u, z)\, V(\bar u', z')\rangle = \gamma\, \cancel{\xi^2 \delta_\xi^{(2)}(u-u')\,\delta_\xi(z-z')} = \gamma\, K(\bar u - \bar u')\,\delta_\xi(z-z')$$

$$\dim(\gamma) = E^{2} L$$

$$K(u \lesssim \xi) = 1$$



$$\varepsilon_1 \frac{u^2(z)}{z} \sim \sqrt{\gamma z}$$ при малых z

Верно пока $u(z) \lesssim \xi$, т.е.

$$\varepsilon_1 \xi^2 \sim \sqrt{\gamma}\, z_*^{3/2} \Rightarrow z_* = \left(\frac{\varepsilon_1 \xi^2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2/3}$$

При $z \lesssim z_*$ гауссов случайный процесс некоррелированное сложение вкладов в $\int V(\bar u, z)\,dz$

Пример для множества задач о поведении границ, интерфейсов и т.п. в случайных средах

$W(\vec{u}, z)$ — частичная статсумма с условием $\vec{u}(\vec{z}) = \vec{u}$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{T}{2\varepsilon_1} \frac{\partial^2 W}{\partial \vec{u}^2} + \frac{1}{T} V(\vec{u}, z) W$$

— аналог У.Ш. в мнимом времени

$$F(\vec{u}, z) = -T \ln W(\vec{u}, z)$$

— free energy

$$\vec{v} = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}$$

тогда для $\vec{v}$ имеем уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{T}{2\varepsilon_1} \nabla_{\vec{u}}^2 \vec{v} - (\vec{v} \nabla_{\vec{u}}) \vec{v} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_1} \nabla_{\vec{u}} V(\vec{u}, z)}_{\text{noise}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{v} + f(\vec{r}, t)}$$

Уравнение Бюргерса в гидродинамике

В нашем случае

$\dim[\vec{v}] = 1$

$\dim(\vec{u}) = b$

Уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{T}{2\varepsilon_1} \nabla_{\vec{u}}^2 \vec{v} - (\vec{v}\,\nabla_{\vec{u}})\vec{v} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_1} \nabla_{\vec{u}} V(\vec{u}, z)}_{\text{noise}}$$

Для $d = 1$ решения у. Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{T}{2\varepsilon_1} \frac{\partial^2}{\partial u^2} v - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial V(u,z)}{\partial u}$$

удовлетворяют аналогу ФДТ:

$$P[v(u,z)] = \exp\left[-\frac{\lambda}{2} \int du\, v^2(u,z)\right]$$

Раздел 4B статьи

PhysRev A16 732 (1977)

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 T}{\gamma \xi} \qquad \overline{v(u,z)\, v(u',z)} = \frac{1}{\lambda}\,\delta(u-u')$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\left(F(u,z) - F(u',z)\right)^2} = \frac{\gamma \xi \varepsilon_1}{T} |u - u'|$$

Кроме того: если типичное $u(z) \sim z^{\zeta}$, а флуктуации энергии $F(z) \sim z^{\chi}$

то всегда выполнено $\boxed{2\zeta - 1 = \chi}$

$F \sim u^2/z$

это верно в любой размерности

Для 1+1 задачи имеем также

$$\overline{\left(F(u,z)-F(u',z)\right)^2} = \frac{\gamma \xi \varepsilon}{T} |u-u'| \Rightarrow \boxed{2\chi = \zeta}$$

В результате

$$\underline{\zeta = 2/3} \qquad \chi = 1/3$$

только в $d=1$
т.е. линия на плоскости

Тот же ответ совсем другим способом:

Depinning by Quenched Randomness

Mehran Kardar PRL 55, 2235 (1985)

Оценка для критического тока

$$\delta F(z) \sim j \frac{\Phi_0}{c} U(z) \qquad j_c \simeq \frac{c}{\Phi_0} \frac{\delta F(z)}{U(z)} \sim \frac{z^{1/3}}{z^{2/3}}$$

Максимум $j_c^{(z)}$ соответсвует мин. масштабу

$$\tilde{z} \sim z_* = \left(\frac{\varepsilon_1 \xi^2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2/3}$$

Взаимодействие вихрея на плоскости из-за беспорядка - комментарий

Б) Решетка вихрей

Теория упругости вихревой решетки

$$E = \frac{1}{2}\int d^3r\left[(C_1 - C_{66})(\nabla \bar{u})^2 + C_{66}(\nabla_\alpha u_\beta)^2 + C_{44}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\frac{C_{11} - C_{66}}{B^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial B^2} = \frac{\partial H}{\partial B}\frac{1}{4\pi} \qquad (\nabla \bar{u}) = \frac{\delta B}{B}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \frac{B}{2} = \delta B \Rightarrow \delta B \frac{\delta F}{\partial B} = \frac{H}{4\pi}\frac{B}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 \Longrightarrow C_{44} = \frac{HB}{4\pi}$$

C_{66} надо считать суммами по решетке для $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$: $\boxed{C_{66} = \frac{\Phi_0 B}{(8\pi\lambda)^2}}$

$$F_{el} = \frac{1}{2}\sum_{k,\bar{q}}\left\{\left[C_{11}\bar{q}^2 + C_{44}k^2\right]u_{\parallel}^2(\bar{q}) + \left[C_{66}q^2 + C_{44}k^2\right]u_{\perp}^2(\bar{q})\right\}$$

B) Плавление решетки вихрей

$\langle u^2\rangle_T = c_L^2 a_0^2 \qquad c_L \simeq 0.15$ - число Линдемана

можно считать $\langle u^2\rangle_T = \int\frac{d^2q\,dk}{(2\pi)^3}\left[\frac{T}{C_{11}q^2 + C_{44}k^2} + \frac{T}{C_{66}q^2 + C_{44}k^2}\right]$

Но в области $H_{c1} \ll B \lesssim H_{c2}$ формулы для C_{11}, C_{44} надо модифицировать при $\lambda k, \lambda q \gtrsim 1$

$$C_{11}(q) = C_{44}(q) = \frac{B^2}{4\pi}\frac{1}{1+(q\lambda)^2}.$$

Проще всего оценить положение линии плавления при $B \gg H_{c1}(T)$ заметив, что

$$T_m \simeq \varepsilon_0 a_0 \Rightarrow B_m(T) \simeq \# \frac{\Phi_0}{T^2}\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda}\right)^4 \propto \left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2$$

$$\frac{B_m(T)}{H_{c2}(T)} \simeq \alpha_m \frac{1-t}{G_i} \qquad t = T/T_c$$

$$\alpha_m \simeq 2\cdot 10^{-2} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{T_m}{\varepsilon_0 a_0} \simeq 0.1}$$

А.И.Ларкин

ЖЭТФ 58, 1466 (1970)

Г) Разрушение дальнего порядка

Вихревой решетки

$$E_{el}^{3D} = \frac{1}{2}\int d^3r\left[(C_{11}-C_{66})(\nabla\cdot\mathbf{u})^2 + C_{66}(\nabla_a u_b)^2 + C_{44}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dz}\right)^2\right]$$

$$F\{\vec{u}(\vec{r})\} = E_{elastic} + \int \vec{u}\,\vec{f}(\vec{r})\,d^3r$$

случайная сила

$$\overline{f_\alpha(\vec{r})f_\beta(\vec{r}')} \sim \delta_{\alpha\beta}\overline{f^2}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

нет корреляций

$$\frac{\delta E_{pin}}{\partial \vec{u}}$$

$$\vec{u}_{\vec{p}}^{\perp} = \frac{\vec{f}_{\vec{p}}^{\perp}}{C_{66} q^2 + C_{44} K^2} \qquad \frac{\vec{f}_{\vec{p}}^{\parallel}}{C_{11} q^2 + C_{44} K^2} = \vec{u}_p^{\parallel}$$

$$\overline{(\vec{u}(0) - \vec{u}(\vec{r}))^2} = 2\int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{dk}{2\pi} \frac{\overline{|\vec{f}_p^{\perp}|^2} (1 - \cos(\vec{q}\vec{\rho} + kz))}{(C_{66} q^2 + C_{44} K^2)^2} + \parallel \text{ (parallel)}$$

Растет неограниченно с ростом $|\vec{r}|$

$$\frac{\overline{f^2}}{4\pi} \left\{ \frac{\sqrt{\rho^2 C_{44} + z^2 C_{11}}}{C_{44} C_{11}^{3/2}} + \frac{\sqrt{\rho^2 C_{44} + z^2 C_{66}}}{C_{44} C_{66}^{3/2}} \right\}$$

При некотором ρ_c, z_c эта величина сравнивается с постоянной решетки вихрей $a_0 = \sqrt{\frac{\Phi_0}{B}}$

$$\rho_c \simeq \frac{a_0^2 \sqrt{C_{44}}}{f^2 \left(C_{11}^{-3/2} + C_{66}^{-3/2}\right)} \qquad z_c \simeq \frac{a^2 C_{44}}{f^2 \left(C_{11}^{-1} + C_{66}^{-1}\right)}$$

Сколь угодно слабые примеси приводят к <u>конечному</u> радиусу ближнего порядка вихревой решетки

Лекция 6-5

Д) Коллективный пиннинг: что определяет крит. ток j_c

Аналогично 1-вихревому примеру, смотрим величины ρ_c и z_c при которых $\overline{(u(0)-u(r))^2} \sim \xi^2$

Если $\rho_c, z_c \gtrsim \lambda$, то дисперсия модулей не важна, получаем

$$R_p \simeq \lambda \left(\frac{z_c^{(1)}}{a_0}\right)^3 \qquad Z_p \simeq \frac{\lambda}{a_0} R_p$$

Длина пиннинга 1-вих

$$z_c^{(1)} = \left(\frac{\varepsilon_1^2 \xi^4}{\gamma}\right)^{1/3}$$

Такой же ответ получится из сравнения упругой энергии деформации и энергии пиннинга

$$C_{66}\frac{\xi^2}{\rho_p^2}\rho_p^2 z_p \sim C_{44}\frac{\xi^2}{z_p^2}\rho_p^2 z_p \sim \sqrt{\frac{B}{\Phi_0}\rho_p^2 z_p \cdot \gamma}$$

Заметим: при $B \ll H_{c2}$, т.е. $a_0 \gg \xi$, получаем что длины пиннинга $\rho_p, z_p \ll \rho_c, z_c$ (длины корреляции решетки)

Результат:

$$R_p \simeq \lambda\left(\frac{L_p}{a_0}\right)^3, \quad L_p^{3D} \simeq \frac{\lambda}{a_0}R_p, \qquad E^{3D}_{\text{пинн}} \simeq H_{cm}^2\xi^3\frac{\xi}{L_p}\left(\frac{\lambda}{a_0}\right)^2\left(\frac{L_p}{a_0}\right)^4$$

Кроме того, для определения критической плотности тока j_c следует, как и выше, приравнять силу Лоренца $j_c \frac{1}{c} B V_p$ (теперь — действующую на единицу объема вихревой решетки) к максимальной объемной силе пиннинга $\mathcal{F}_{\text{пинн}} \simeq E^{3D}_{\text{пинн}}/\xi$. В результате

$$j_c^{3D} \simeq j_c \left(\frac{a_0}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{a_0}{L_p}\right)^4 \propto B^{-3}.$$

С увеличением индукции B, а потому и жесткости вихревой решетки, растет размер области пиннинга, и падает критический ток

Трехмерный критический ток (выше) не переходит в одномерный аналог при $a_0 \sim L_p$.

$$j_c \simeq j_0 \left(\frac{\xi}{L_p}\right)^2$$

Причина: для малых длин пиннинга надо учесть дисперсию упругих модулей

$$C_{11}(q) = C_{44}(q) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{1}{1+(q\lambda)^2}.$$

Лекция 6-6

Е) Крип потока и релаксация намагниченности

1) Критическое состояние (Bean)

$$\frac{dB}{dx} = \frac{4\pi}{c} j = \frac{4\pi}{c} j_c(B)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

2) Creep at $j < j_c$

$$\bar{E} = \frac{1}{c}(\bar{B} \times \bar{V})$$

$$\bar{B} \parallel z \qquad j, \bar{E} \parallel y$$

$$\boxed{v = v_0 \exp\left(-\frac{U(j, B, \ldots)}{T}\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{B} &= -c\frac{\partial E}{\partial x} \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= -\frac{4\pi}{c} j \end{aligned}\right\} \text{(максвелл)} \Rightarrow \boxed{\dot{j} = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(vB)}$$

Ищем решение в виде $j(x,t) = j(t) + \delta j(x,t)$

$$\frac{dj}{dt} = -\left(\frac{j_c}{\tau_0}\right) e^{-U(j)/T} \qquad \tau_0 \simeq \frac{d^2}{c^2 \rho_{ff}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U(j(t)) = T \ln(1 + t/t_0)}$$

$$t_0 = \tau_0 \frac{T}{j_c \left|\frac{\partial U}{\partial j}\right|} \sim \frac{T}{U_c} \frac{d^2}{c^2 \rho_{ff}}$$

$$t_0 = \tau_0 \frac{T}{j_c \left|\frac{\partial U}{\partial j}\right|} \sim \frac{T}{U_c} \frac{d^2}{c^2 \rho_{ff}}$$

3) Как найти $U(j)$?

$$U(j) \sim F_{pin}(L(j)) \sim [L(j)]^{\dot{x}} = [L(j)]^{2\zeta-1}$$

$$U(j) \sim j^{-\varphi/c} L(j)\cdot u[L(j)] \sim j\,[L(j)]^{1+\zeta}$$

$$\frac{L^{\zeta-2}}{j} = \text{const} \qquad L(j) \sim j^{\frac{1}{\zeta-2}}$$

$$\boxed{U(j) \sim j^{-\mu} \qquad \mu = \frac{2\zeta-1}{2-\zeta}}$$