1. Про гауссовский вектор (X, Y, Z) известно, что $\mathrm{cor}(X, Y) \le \alpha$, $\mathrm{cor}(Y, Z) \le \alpha$, $\mathrm{cor}(X, Z) \le \alpha$. Найдите наименьшее возможное значение α.

2. Про случайный вектор (X, Y, Z), у которого существует конечная матрица ковариаций, известно, что $\mathrm{cor}(X, Y) \le \alpha$, $\mathrm{cor}(Y, Z) \le \alpha$, $\mathrm{cor}(X, Z) \le \alpha$. Найдите наименьшее возможное значение α.

3. Пусть (X, Y) — гауссовский вектор с вектором средних $(0, 0)$, $\mathsf{E}X^2 = \mathsf{E}Y^2 = 2$, $\mathsf{E}XY = 1$. Найдите плотность случайной величины $\mathrm{arctg}(Y/X)$.

4. Гауссовский вектор (X, Y) сдвинули на неслучайный вектор $r \in \mathbb{R}^2$. При условии, что X, Y — независимые стандартные нормальные, докажите, что распределение модуля полученного вектора $(X, Y) + r$ зависит только от модуля вектора r.

5. Некоторый процесс деления частиц описывается следующей математической моделью. В каждый момент времени каждая частица системы распадается на случайное число $k \in \mathbb{N}$ частиц или умирает ($k = 0$). В предположении, что количества потомков k всех частиц в каждый момент времени независимы и имеют распределение $\mathrm{Pois}(\sqrt[3]{\lambda})$, предложите асимптотически нормальную состоятельную несмещенную оценку λ по наблюдаемым количествам потомков $X_1, \ldots, X_n$ (для различных частиц в различные моменты времени). Найдите асимптотическую дисперсию этой оценки.

6. Задан набор независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с распределением $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Рассмотрим статистики $Y = \overline{|X|}$, $Z = \overline{X^2}$, $T = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Z/Y$. Найдите предел сходимости по распределению выражения $\sqrt{n}(T - \sigma)$.

7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Лапласа, с параметром σ (плотность равна $\frac{1}{2\sigma} e^{-|x|/\sigma}$). Пусть $Y = \overline{|X|}$, $Z = \overline{X^2}$. Докажите, что $\frac{Z^2}{4Y^3}$ — асимптотически нормальная оценка σ и найдите ее асимптотическую дисперсию.

8. Частица на целочисленной прямой в момент времени 0 находится в точке 0. Далее в каждый момент времени частица с вероятностью $1/2$ либо переходит в точку с координатой на единицу большей, либо в точку с координатой на единицу меньшую текущей. Найдите математическое ожидание количества возвращений в 0 за время n и его асимптотику по n.

9. Частица на целочисленной прямой в момент времени 0 находится в точке 0. Далее в каждый момент времени частица с вероятностью p либо переходит в точку с координатой на единицу большей, либо с вероятностью $1-p$

— в точку с координатой на единицу меньшую текущей. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — координаты частицы в моменты времени $1, \ldots, n$ соответственно. Найдите состоятельную несмещенную асимптотически нормальную оценку p и вычислите ее асимптотическую дисперсию.