1. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процессы $-W_t$, $\sqrt{c}W_{t/c}$ $(c > 0)$, $W_{t+a} - W_a$ $(a > 0)$, $W_t I(t < T) + (2W_T - W_t)T(t \geq T)$ тоже являются винеровскими.

2. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые стандартные нормальные случайные величины. Докажите, что процесс $X_t = \frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}\xi_k$ является винеровским на отрезке $[0, \pi]$ (ряд понимается в смысле сходимости в L^2).

   Указание. Надо разложить функцию $I_{[0,t]}(x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе на $[0, \pi]$, составленной из $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx)$.

3. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $\tau_x = \inf\{t : W_t = x\}$ — первый момент достижения уровня x. С помощью теоремы Башелье вычислите плотность τ_x и $\mathsf{E}\tau_x$.

4. Пусть $(W_t^1, t \geq 0)$, $(W_t^2, t \geq 0)$ — два независимых винеровских процесса. Найдите распределение момента первой встречи процессов W_t^1 и $W_t^2 + 1$.

5. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau = \min\{t : W_t = y\}$ для некоторого $y > 0$. Найдите плотность случайной величины $Y_a = \sup_{t \in \{\tau, \tau+a\}} W_t$.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс, а $u > s > 0$. Найдите $\mathsf{P}(W_t$ не имеет нулей на отрезке $[s, u])$.

7. Рассмотрим симметричное простейшей случайное блуждание на плоскости. Иными словами, частица в момент времени 0 находится в точке (n, m), где $n, m \in \mathbb{Z}$. В каждый момент времени $t \in \mathbb{Z}_+$ частица смещается равновероятно в любую из соседних целочисленных точек (т.е. из точки с координатами (a, b) частица может сместиться в любую точку из $(a+1, b)$, $(a-1, b)$, $(a, b+1)$, $(a, b-1)$, каждая соответствующая вероятность равна $1/4$). Найдите вероятность того, что частица никогда не посетит начало координат $(0, 0)$.