1. Имеются две урны, содержащие в начальный момент времени k_1 и k_2 шаров, причем $k_1 + k_2 = k$. В каждый момент времени n с вероятностью $1/k$ выбирается один из этих шаров и перекладывается из той урны, где он лежал, в другую. Пусть X_n — это число шаров в первой урне в момент времени n. Докажите, что $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — однородная марковская цепь, и найдите ее стационарное распределение. Является ли оно предельным?

2. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что

   а) у нее есть несколько стационарных распределений, но нет предельного;

   б) у нее нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \to \infty$.

   Докажите, что если однородная марковская цепь с дискретным временем имеет несколько стационарных распределений, то их, на самом деле, бесконечно много.

3. Ветвящийся процесс построен по случайной величине, равномерно распределенной на множестве $\{0, 1, 2, 3\}$. Найдите вероятность вырождения этого процесса.

4. Система “массового обслуживания” состоит из прибора и ремонтного устройства. Прибор работает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром λ. Ремонт прибора занимает случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ. Обозначим

   $$p_1(t) = \mathsf{P}(\text{прибор работает в момент времени } t),$$

   $$p_2(t) = \mathsf{P}(\text{прибор ремонтируется в момент времени } t).$$

   Найдите $p_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, при условии $p_1(0) = p_2(0) = 1/2$, предполагая, что процесс образует марковскую цепь.

5. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Является ли процесс $Y = (Y(x), x \geq 0)$, где

   $$Y(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I(X_j \leq x)$$

   — это эмпирическая функция распределения, марковской цепью? Если да, то найдите ее переходные вероятности и проверьте на однородность.