Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН

Р. Б. Сапцов

Образование конденсата и возникновение вихрей в бозе-газе при охлаждении

Дипломная работа по кафедре
проблем теоретической физики.

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, проф.
Иорданский С.В.

Черноголовка - 2004

Содержание

1 Введение

Представления о кинетике фазовых переходов развито достаточно подробно для фазовых переходов первого рода и связано с существованием как самой метастабильной фазы, так и равновесного критического зародыша. Соотвествующая теория была развита в работах [1], [2] и подробно изложена в обзоре [3]. В то же самое время, теоретические представления о кинетике фазовых переходов второго рода, где оба эти факта не имеют места, развиты мало. В работе И.М. Лифшица [4] предложена некоторая специальная модель возникновения упорядоченной фазы после быстрой стадии фазового перехода в "ближнем" порядке при наличии только двух типов упорядочения.

В последнее время возник интерес к проблеме фазового перехода при быстром изменении внешних параметров (например, температуры) в связи с космологическими представлениями о "Большом Взрыве", когда быстро расширяющаяся Вселенная должна охлаждаться и может пройти через серию фазовых превращений с изменением симметрии физических полей [5]. Предполагается, что кинетика превращения может быть смоделирована в конденсированных средах [6].

В работах Зурека, подробно изложенных в обзоре [7], была развита теория фазового перехода второго рода при быстром изменении температуры в жидком ^{4}He. Основным в предложенном механизме является предположение о "критическом замедлении" всех процессов в окрестности температуры перехода, и "быстром" возникновении очагов новой фазы при достаточном последующем охлаждении. В результате получалось возникновение огромного количества дефектов, порядка числа флуктуаций далеко выше точки перехода. Это связано с тем, что при спонтанном нарушении симметрии полей в разных областях пространства могут устанавливаться средние значения вырожденного вакуума, принадлежащие различным связным компонентам группового многообразия последнего. Тогда между такими областями не может быть гладкого перехода, и между ними должны образоваться топологические дефекты.

Экспериментально, однако, никаких задержек в образовании новой фазы неизвестно, а критическое замедление связано с длительностью процесса установления равновесия на макроскопических расстояниях, что является несущественным при неоднородном процессе образования новой фазы.

В настоящей работе будет рассмотрен переход в новую фазу путем развития флуктуаций на масштабах значительно меньших длины корреляции, который может происходить достаточно быстро и вблизи критической температуры. При этом кинетика перехода оказывается связанной непосредственно с самим процессом охлаждения. Будет рассмотрен процесс образования конденсата в модели слабонеидеального бозе-газа, включающей внешнее охлаждение, и показано существование некоторой аналогии с фазовыми переходами первого рода. Мы увидим, что в предлагаемой модели сверхтекучие области начнут возникать в результате флуктуаций, когда система в целом еще находится выше критической температуры. Вероятность таких флуктуаций будет расти по мере приближения к T_c. Кроме того, будет показано, что образование дефектов в зародышах начнется уже в процессе эволюции последних, гораздо раньше перехода всей системы как целого в сверхтекучее состояние.

2 Слабонеидеальный бозе-газ с внешним охлаждением

Мы будем работать в модели слабонеидеального бозе-газа с специфически устроенным механизмом внешнего охлаждения. Стандартная теория слабонеидеального бозе-газа имеет дело с гамильтонианом вида:

$$\hat{H} = \sum_p \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{a_p}^+ \hat{a_p} + \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m} \sum_p \hat{a_{p_4}}^+ \hat{a_{p_3}}^+ \hat{a_{p_2}} \hat{a_{p_1}} \tag{1}$$

где a_0 – амплитуда рассеяния, имеющая атомную величину, m – масса атома. Свойства такого газа при малой плотности n (малость определяется газовым параметром $\eta = n{a_0}^3 \ll 1$) близки к свойствам идеального бозе-газа с температурой перехода [8]:

$$T_c = \frac{3.31}{\sqrt{2}} \frac{\hbar^2 n^{\frac{2}{3}}}{m} \tag{2}$$

Идеальный бозе-газ при температурах ниже перехода имеет давление зависящее только от температуры:

$$p_{id} = 0.0851 \frac{m^{\frac{3}{2}} T^{\frac{5}{2}}}{\hbar^3} \tag{3}$$

что соответствует нулевой изотермической скорости звука.

С учетом ненулевой амплитуды рассеяния можно написать качественное уравнение состояния ниже точки перехода:

$$p = p_{id}(T) + \frac{\hbar^2 a_0 n^2}{m} \tag{4}$$

Мы опустили несущественную постоянную во втором члене.

Вся кинетика существенно зависит от механизма охлаждения бозе-газа. Мы рассмотрим наиболее простую модель, когда бозе-газ находится в матрице некоторого твердого тела, с которой он слабо взаимодействует. Такая ситуация может возникнуть , например, для газа экситонов в кристалле. Кристалл может быть быстро охлажден до низкой температуры, и в этом случае охлаждение бозе-газа будет происходить путем излучения фононов. Считая теплоемкость кристалла большой по сравнению с теплоемкостью бозе-газа, можно пренебречь наличием тепловых фононов в кристалле и их влиянием на бозе-газ. В результате мы будем иметь однородный механизм потерь энергии, описываемый феноменологически величиной

$$-\frac{T}{\tau_{ph}}$$

Другие модели охлаждения приводят к необходимости рассматривать передачу тепла на границах образца, что существенно сложнее. Скорость потерь $\frac{1}{\tau_{ph}}$ определяется столкновениями частиц между собой и взаимодействием с фононами, которое мы будем считать слабым:

$$1/\tau_{ph} \ll 1/\tau_{tr}$$

что в силу того, что $1/\tau_{ph} \sim n v_T \sigma_{ph}$, $1/\tau_{tr} \sim n v_T {a_0}^2$ (v_T тепловая скорость), означает

$$\sigma_{ph} \ll {a_0}^2$$

и в чем, собственно, и состоит слабость взаимодействия газа с кристаллом. Под σ_{ph} подразумевается сечение рассеяния с излучением фононов.

Ввиду малости величины $\frac{1}{\tau_{ph}}$ эволюция бозе-системы будет медленной, в частности, мы будем считать, что длина звуковой волны $c\tau_{ph} \sim v_T \tau_{ph}$ будет велика по сравнению с характерными расстояниями $\sim \sqrt{\chi \tau_{ph}}$, где χ - коэффициент температуропроводности:

$$\frac{\sqrt{\chi \tau_{ph}}}{v_T \tau_{ph}} \sim \sqrt{\frac{l^2}{{v_T}^2 \tau_{tr} \tau_{ph}}} \sim \sqrt{\frac{\tau_{tr}}{\tau_{ph}}} \ll 1$$

(через l обозначена длина свободного пробега). Это обстоятельство позволяет считать, что эволюция флуктуации происходит при постоянном давлении, совпадающем с термодинамически равновесным.

При этом изменение плотности δn в области флуктуации, как следует из (4), связано с изменением температуры:

$$\frac{\delta n}{n} = -\frac{\delta T}{T} \frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} \tag{5}$$

Относительная флуктуация плотности велика по сравнению с относительной флуктуацией температуры в области $T < T_c$. Это обстоятельство приводит к быстрому росту обратного фононного времени:

$$\delta \frac{1}{\tau_{ph}} \sim -\frac{\delta T}{T} \frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\tau_{ph}{}^{0}} \tag{6}$$

(где $\frac{1}{\tau_{ph}{}^{0}} = n v_T \sigma_{ph}$) с падением температуры и усилением охлаждения в области флуктуации. В связи с этим мы будем пренебрегать излучением фононов в области вне развитой флуктуации, полагая:

$$\frac{1}{\tau_{ph}} \sim -\frac{\delta T}{T_c} \frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\tau_{ph}{}^{0}} U(T_c - T) \tag{7}$$

где $U(T_c - T) = 1$ при $\delta T = T - T_c < 0$, и $U(T_c - T) = 0$ при $T - T_c > 0$.

Это позволяет рассматривать задачу о кинетике флуктуации в рамках теории гидродинамических флуктуаций, с добавлением в уравнения гидродинамики потока энергии, уносимого излучением фононов:

$$\frac{T}{\tau_{ph}{}^{0}} \frac{\delta n}{n} = -\frac{T_c - T}{\tau_{ph}} U(T_c - T) \tag{8}$$

где $1/\tau_{ph} = (1/\tau_{ph}{}^{0})(1/\eta^{2/3})$. Ввиду постоянства давления, эволюция флуктуации температуры будет описываться уравнением теплопроводности:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \right) = \nabla(\varkappa \nabla T) + \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} U(T_c - T) \tag{9}$$

где добавлен поток энергии, уносимой фононами, $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности, c_p – теплоемкость на одну частицу при постоянном давлении. В этом уравнении имеется сносовый член с массовой скоростью $v(\mathbf{r})$, возникающий из-за большей плотности в ядре флуктуации. В дальнейшем он будет опущен как член более высокого порядка по величине флуктуации.

3 Уравнение Фоккера-Планка для полей температуры в бозе-газе с охлаждением

Нас интересуют флуктуации поля T и их развитие во времени. Для рассмотрения флуктуаций необходимо ввести случайные потоки тепла $\mathbf{q}$ [3], [9], то есть ланжевеновский член $\nabla \mathbf{q}$. Эти потоки дельта-коррелированы (т.е. коррелированы на расстояниях и временах малых по сравнению с гидродинамическими масштабами). В данном случае это обеспечивается большой величиной времени ${\tau_{ph}}^0$ и расстояния $\sqrt{\chi \tau_{ph}}$ (χ – коэффициент температуропроводности) по сравнению с микроскопическими характеристиками.

Хорошо известно, что в этом случае вероятность реализации $W_t(T(r))$ заданной конфигурации флуктуационного поля $T(r)$ в момент времени t подчиняется уравнению Фоккера-Планка в вариационных производных [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = -\int \frac{\delta}{\delta T(r)} \left[\frac{\chi {T_\infty}^2}{n c_p} \nabla^2 \frac{\delta}{\delta T(r)} W + \left[\chi \nabla^2 T + U(T_c - T) \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} \right] W \right] d^3 r \tag{10}$$

На потоки $\mathbf{q}$ здесь были взяты, в соответствии с ФДТ, следующие корреляционные правила

$$\left\langle q_i(\mathbf{r}, t) q_k(\mathbf{r}', t') \right\rangle = 2\kappa {T_0}^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \delta(t - t') \delta_{ik}$$

где κ - теплопроводность, а T_0 - равновесная температура среды. При отсутствии взаимодействия с фононами стационарное решение этого уравнения дает результат, совпадающий с результатом термодинамической теории флуктуаций, что будет показано ниже (см пункт 5). Величина

$$\chi \nabla^2 T + U(T_c - T) \frac{T - T_c}{\tau_{ph}} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{11}$$

дает скорость изменения температуры при ее отклонении от средней $T = T_\infty$.

Мы считаем, что флуктуация происходит при некотором фиксированном $T_\infty > T_c$. Флуктуации с $\triangle T = T - T_\infty \ll T_\infty$ происходят достаточно часто и имеют некоторое, фактически стационарное распределение в пространстве , которое определяет величину $W_t(T)$. Последняя, в силу нормировки, дает число небольших флуктуаций в единице объема. Однако, иногда происходят редкие флуктуации достаточно большой амплитуды $T \sim T_c - T_\infty$, $T < T_c$, при которых начинается эффективное охлаждение фононами и флуктуация оказывается необратимой, возникает очаг новой фазы. Нашей целью является вычисление вероятности таких флуктуаций в единице объема и времени. Поскольку эти флуктуации редки и распределение в области малых $T_\infty - T$ стационарно, можно использовать метод характеристик для отыскания экспоненциально малой вероятности образования такого зародыша - инстантона для уравнения Фоккера-Планка. Существенное отличие от теории образования зародышей в фазовых переходах первого рода состоит в том, что вероятность образования инстантона в данном случае определяется самим процессом охлаждения. Если обычно входящая в уравнение Фоккера-Планка скорость определяется из вида гидродинамических уравнений, отражающих законы сохранения, то данном случае содержатся дополнительные члены, нарушающие эти законы из-за потока фононов, уносящих энергию из бозе-системы.

4 Анализ одномерных уравнений. Возможность многомерного обобщения

Рассмотрим с целью разъяснения ситуацию с отысканием инстантонного решения в случае одной степени свободы. Если есть уравнение со случайной силой:

$$\frac{dx}{dt} = v(x) + \xi(t)$$

которая дельта-коррелирована с постоянной мощностью: $\left\langle \xi(t)\xi(t^{'})\right\rangle = 2D\delta(t-t^{'})$, то уравнение Фоккера-Планка на одновременную функцию распределения W величины x имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial W}{\partial x} - vW\right) \tag{12}$$

где D - постоянный коэффициент диффузии (совпадающий с мощностью случайных сил), $v(x)$ - макроскопическая скорость изменения величины x с учетом процесса релаксации при отклонении ее от равновесного значения, а так же внешнего воздействия (аналога излучения фононов). Полагая $W = e^{S}$, и считая, что по модулю S и его первая производная велики, получим, оставляя главные члены, уравнение :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - v\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{13}$$

Это уравнение Гамильтона-Якоби с гамильтонианом ($\frac{\partial S}{\partial x} = p$)

$$H(\frac{\partial S}{\partial x}, x) = -Dp^2 + pv + \frac{\partial v}{\partial x}$$

уравнения Гамильтона являются характеристиками этого уравнения в частных производных

$$\frac{dx}{dt} = -2Dp + v$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dv}{dx}p - \frac{d^2v}{d^2x}$$

Вклад дивергенции скорости в гамильтониан существенен только вблизи точки где $v = 0$. Нас интересует специальное решение, которое проходит через точку равновесия $p = 0$, $v = 0$. В одномерном уравнении Фоккера-Планка с помощью замены можно избавиться от члена с первой производной , при этом получается аналогия с квантовой механикой и можно использовать известные результаты. Мы, однако, будем использовать в окрестности $v = 0$ непосредственные оценки. Их удобство заключается в том, что результаты существенно более легко обобщаются на многомерный и полевой случаи.

Энергия сохраняется в силу уравнений Гамильтона, что в силу малости дивергентного члена дает $H = -Dp^2 + pv = 0$, откуда $p = v/D$ и

$$S = -\int \frac{v^2}{D} dt = \int_0^{x^*} \frac{v}{D} dx$$

Мы считаем, что скорость $v(x)$представляет собой выпуклую вниз функцию с двумя нулями - устойчивым в нуле и неустойчивым при x^* $(x^* > 0)$. Такая форма функции $v(x)$ обеспечивается всем процессом охлаждения, включая излучение фононов. Наличие последнего приводит к тому, что $v(x)$ не убывает в область бесконечных отрицательных значений, а после некоторого минимума вновь возрастает и проходит через нуль, образуя неустойчивую точку. Физически это означает, что для данной флуктуации внешнее охлаждение превысило суммарный внутренний нагрев за счет теплопроводности, и далее флуктуация может развиваться самостоятельно. При $x > x^*$ решение уходит в сторону больших x, а действие набирается от нуля до x^*, где $v < 0$. В окрестности x^* необходимо учитывать величину $\frac{dv}{dx}$. При больших x можно пренебречь p^2, что дает $p \approx -\frac{\frac{dv}{dx}}{v}$, поэтому

$$S \sim S_0 - \ln(v/v_0)$$

где v_0 эффективная скорость в области, где происходит сшивка решений для $x < x^*$ и $x > x^*$. Само решение имеет вид: $e^S \approx \frac{v_0}{v} e^{S_0}$ и ток $j \approx v_0 e^{S_0}$. Оценку v_0 можно получить, полагая, что все члены в гамильтониане H одного порядка

$$Dp^2 \sim vp \sim \frac{dv}{dx} \sim \frac{v_{max}}{x^*}$$

что дает

$$v_0 \sim \sqrt{\frac{D|v_{max}|}{x^*}} \sim \frac{|v_{max}|}{\sqrt{S_0}} \tag{14}$$

В многомерном случае ситуация сохраняется:

$$\frac{dx^i}{dt} = -2D^{ij}p_j + v^i$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial v^k}{\partial x^i}p_k - \frac{\partial(\mathrm{div}\vec{v})}{\partial x^i}$$

причем в начале $p = 0$ и $p \to 0$ в конце траектории. Поэтому $|p|$ достигает где-то на траектории максимума. В этой точке матрица $\partial v_i/\partial x_k$ имеет одно нулевое собственное значение и $\mathbf{p}$ касается соответствующего собственного вектора, и дальше траектория уходит в окрестность точки с нулевой скоростью $\mathbf{v}$. Это дает определение критической флуктуации-инстантона как решения проходящего через точку $\mathbf{x} = \mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{p} \to 0$ при $|x| \to \infty$ как $1/v$, сохраняя поток вероятности постоянным.

5 Полевые уравнения. Вычисление вероятности критических флуктуаций

Можно проделать подобную процедуру и в полевом случае. Снова ищем решение в виде $W = e^S$, где S - функционал температуры. Гамильтониан в этом случае имеет вид, согласно (10)

$$H = \int p(\mathbf{r}) \left[\frac{\chi {T_\infty}^2}{nc_p} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi \nabla^2 T + U(T_c - T)\frac{T - T_c}{\tau_{ph}} \right] d^3r \qquad (15)$$

с уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\chi {T_\infty}^2}{nc_p} \nabla^2 p(\mathbf{r}) + \chi \nabla^2 T + U(T_c - T)\frac{T - T_c}{\tau_{ph}} \qquad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\chi \nabla^2 p - \frac{p}{\tau_{ph}} U(T_c - T) \qquad (17)$$

Здесь $p = \frac{\delta S}{\delta T(\mathbf{r})}$. Несложно показать, что в отсутствие взаимодействия с фононами (если из уравнений (16), (17) и гамильтониана удалить члены с U) - имеется очевидное решение $p = -\frac{nc_p}{2{T_\infty}^2}T$, которое задает гауссово распределение для отклонений температуры, полностью совпадающее (как и следовало ожидать) с результатом, получающимся в в рамках термодинамической теории флуктуаций.

Уравнения (16), (17) определяют критическую флуктуацию и могут быть приведены к безразмерным переменным путем замен $\xi = r/\sqrt{\chi \tau_{ph}}$,

$\tau = \frac{t}{\tau_{ph}}$, $\Theta = \frac{T-T_c}{T_\infty - T_c}$, $p = \frac{nc_p(T_\infty - T_c)\Pi}{T^2{}_\infty}$, где Θ, Π - новые безразмерные поля. Безразмерные уравнения при этом имеют вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta + \Theta U(-\Theta) + 2\nabla^2 \Pi \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = -\nabla^2 \Pi - \Pi U(-\Theta) \tag{19}$$

решение должно быть найдено исходя из условий $\Pi_{\xi\to\infty} \to 0$, $\Pi_{\tau\to-\infty} \to 0$, $\Theta_{\tau\to-\infty} \to 1$, $\Theta_{\xi\to\infty} \to 1$ и проходит через окрестность $\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} \approx 0$, $\Pi \approx 0$ при $\tau \to \tau^*$, после чего $\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} \approx \nabla^2\Theta + \Theta U(-\Theta)$ и флуктуация развивается путем охлаждения, а случайными потоками можно пренебречь. Поскольку $H = 0$, то действие

$$S = \int p \frac{\partial T}{\partial t} d^3 r dt \approx \int\limits_{-\infty}^{\tau^*} \frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2 \Pi}{2T^2{}_\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} (\sqrt{\chi \tau_{ph}})^3 d\tau d^3\xi = \tag{20}$$

$$= s_0 \frac{nc_p (T_\infty - T_c)^2}{2T^2{}_\infty} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3$$

Отрицательная постоянная s_0 может быть определена численным решением (18), (19) и является универсальным числом, дающим наибольшее действие S_0, и не зависит от значений физических постоянных и разности $T_\infty - T_c$.

Для оценки скорости изменения температуры можно взять

$$|v_{max}| = \frac{T_\infty - T_c}{\tau_{ph}} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3 n$$

тогда для потока вероятности в переходной области, согласно (14)

$$j \sim \frac{T_\infty \left(n\left(\sqrt{\chi\tau_{ph}}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau_{ph} c_p} e^{-S_0} \nu$$

Оценка постоянной ν не может быть получена из теории гидродинамических флуктуаций [11]. Эта величина дает число равновесных малых флуктуаций с $\delta T \ll T$ на атомных масштабах.в единице объема. В качестве оценки можно использовать $\nu = n/T_\infty$. Таким образом, число критических флуктуаций, образующихся в единицу времени в единице объема,

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{n\left(n\left(\sqrt{\chi\tau_{ph}}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\tau_{ph} c_p} \exp\left(s_0 \frac{nc_p(T_\infty - T_c)^2}{2T^2{}_\infty} (\sqrt{\chi\tau_{ph}})^3\right)$$

Таким образом зародыши новой фазы интенсивно образуются по мере приближения T_∞ к T_c и быстро разрастаются. Мы рассматривали только первоначальную фазу роста критической флуктуации и ограничились теплопередачей только посредством теплопроводности, пренебрегая эффектами сверхтекучести на этой стадии. Это приближение может быть оправдано тем, что большую часть вклада в действие дает область, далекая от области малых скоростей v, где и $p(\mathbf{r}) = \delta S/\delta T(\mathbf{r})$ становится малым и можно пренебречь флуктуационным вкладом полагая $P \sim v^{-1} e^{S_0}$.

6 Гидродинамические уравнения поздней стадии эволюции критических зародышей. Образование дефектов

Рассмотрение дальнейшего роста инстантона требует решений уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, так как образуется сверхтекучая сердцевина развивающейся флуктуации. Мы качественно рассмотрим возникающие при этом явления. Исходя из предположения о большой величине τ_{ph} , будем считать, что в этой области движение квазистационарно, подстраиваясь под медленный процесс охлаждения фононами. Воспользуемся уравнениями гидродинамики сверхтекучей жидкости вблизи точки перехода в форме, предложенной Халатниковым [12]

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu + \mu_s \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_s v_s^i + \rho_n v_n^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\rho_n v_n^i v_n^k + \rho_s v_s^i v_s^k + p \delta^{ik} \right) = 0$$

$$T \frac{\partial (n\sigma)}{\partial t} + T \mathrm{div}(n\sigma \mathbf{v}_n) = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right]^2 \rho_s - \frac{\rho_s c_p T}{\tau_{ph}}$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \mathrm{div} \rho_s \mathbf{v}_s = -\frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[\mu_s + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2} \right] \rho_s,$$

Здесь σ - энтропия на одну частицу, n - число частиц на единицу объема, ρ - плотность. Индексы n, s относятся к нормальной и сверхтекучей компонентам, постоянная Λ является релаксационным параметром, и мы добавили унос энергии путем излучения фононов в уравнение для энтропии. Здесь μ_s - специфический химпотециал для сверхтекучей плотности, который должен обеспечивать равновесную плотность конденсата, получаемую путем приравнивания релаксационной правой части уравнения для ρ_s к нулю. В нашей модели слабонеидеального бозе газа можно феноменологически определить

$$\mu_s = \frac{\hbar^2 a_0}{m^2}\left[(n - n(T))\right] + \frac{\hbar^2 a_0}{m^2}\rho_s$$

так, чтобы в равновесии $\rho_s = n - n(T) = \delta n$. Здесь $n(T)$ - число надконденсатных частиц. Мы будем считать, что величина $\frac{\Lambda m}{\hbar}$ достаточно велика и $T_c - T$ достаточно велико, чтобы выполнялось приближение $\mu_s + \frac{v_s^2}{2} \approx 0$, пренебрегая величиной v_n по сравнению с v_s, что дает

$$\rho_s = \delta n - \frac{v_s^2 m^2}{\hbar^2 a_0} = \delta n\left(1 - \frac{v_s^2 m^2}{\hbar^2 a_0 \delta n}\right) \tag{21}$$

В этом случае из уравнений гидродинамики следует, что $\mu \approx \mu(p,T) = const$

$$T\frac{(\partial n\sigma)}{\partial t} + T\mathrm{div}(n\sigma\mathbf{v}_n) = -\frac{c_p T\rho_s}{m\tau_{ph}},$$

Ввиду малости величины v_s по сравнению со скоростью звука, а также малостью ρ_s мы будем пренебрегать этими поправками к давлению $p \approx p_0$. В этом случае существенно только уравнение для энтропии. Считая производную $\frac{(\partial n\sigma)}{\partial t}$ малой, согласно предположению о квазистационарности (малая скорость изменения температуры) мы должны приближенно иметь выполнение стационарного режима $-\sigma\mathrm{div}(n\mathbf{v_n}) = -\frac{\mathbf{c_p}\rho_\mathbf{s}}{\tau_\mathbf{ph}}$, и поток массы должен быть равен нулю $\rho_s v_s + \rho_n v_n = 0$. Учитывая $\rho_n \approx \rho$, получаем уравнение

$$-\sigma\mathrm{div}(\rho_s v_s) = -\frac{\rho_s}{\tau_{ph}}$$

где σ энтропия на одну частицу. Это уравнение определяет теплопередачу в сверхтекучем ядре флуктуации. Используя уравнение (21) имеем

$$\sigma\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(1 - \frac{v_s^2}{u^2}\right)v_s - \left(1 - \frac{v_s^2}{u^2}\right)\frac{1}{\tau_{ph}}, \qquad u^2 = \frac{\hbar^2 a_0 \delta n}{m^2}$$

Вводя безразмерное расстояние $\xi = \frac{c_p r}{\sigma u \tau_{ph}}$,получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{(1 - v^2)(1 - \frac{2}{\xi}v)}{1 - 3v^2} \tag{22}$$

Особые точки этого дифференциального уравнения

$$\xi = 0,\ v = 0 \quad \text{и} \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ v = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

причем последняя является фокусом с собственными числами $\lambda = 1 \pm i\sqrt{5}$. Так как скорость v должна обращаться в нуль при $\xi = 0$, то при малых ξ скорость $v \approx \frac{1}{3}\xi$ и растет быстрее чем линейно, причем производная $\frac{d\xi}{dv}$ обращается в нуль при $v = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и некотором $\xi = \xi^*$, после чего становится отрицательной с дальнейшим ростом v. Таким образом, регулярное сверхтекучее движение не продолжается за точку ξ^* (постоянная порядка единицы, и может быть найдена численно). Физическая длина

$$r^* \sim \sigma u \tau_{ph} = \sigma \sqrt{\frac{\delta n}{n} \eta^{1/3} \frac{\tau_{ph}}{\tau_{tr}}} \sqrt{\chi \tau_{ph}}$$

может быть меньше, чем $\sqrt{\chi \tau_{ph}}$, отметим также, что $1 - v^2 > 0$, то есть особенность возникает в сверхтекучем ядре. Найденная особенность показывает, что при $\xi \gtrsim \xi^*$ условия квазистационарности будут нарушены и должно возникать сложное нестационарное сверхтекучее движение с интенсивным образованием вихрей внутри инстантона с переходом в нормальную жидкость при $T > T_c$. Похожие явления возникают в сверхтекучей жидкости в поле тяжести, когда T_c зависит от одной из координат (вертикальной) и имеется фиксированный поток тепла из сверхтекучей жидкости в нормальную [13]. У нас имеется аналогичная ситуация, возникающая из-за неоднородного процесса охлаждения по мере приближения к критической температуре внутри сверхтекучего зародыша. Численные расчеты [14] и экспериментальные данные [15], [16] показывают возникновение "вихревой" сверхтекучей фазы с большой, но конечной теплопроводностью без сверхтекучего переноса. В настоящее время механизм возникновения вихрей и вихревая фаза подобного рода недостаточно изучены как теоретически, так и экспериментально.

7 Заключение

Таким образом, мы показали, что, в отличии от работы [7], переход в сверхтекучую фазу может происходить путем независимого роста критических флуктуаций-инстантонов при температурах выше критической $T > T_c$ непосредственно в процессе внешнего охлаждения. Эти флуктуации затем перерастают в макроскопические образования. При росте зародышей сверхтекучего состояния будут генерироватся вихри в его внешней части. Поэтому вихревые дефекты возникают как из-за независимого рождения зародышей с произвольной фазой при охлаждении (гипотеза Зельдовича-Киббла), так и непосредственно в процессе роста каждого сверхтекучего зародыша.

Следует отметить,что механизм рождения вихрей в процессе роста существенно отличается от найденного в работе [17], где предполагалось существование сверхтекучего течения, взаимодействующего с нагретыми нормальными областями. Работа [17] связана с попыткой объяснения результатов эксперимента [18], в котором производилось облучение сверхтекучего ^{3}He потоком нейтронов, которые поглощались гелием, в результате чего образовывались прогретые выше критической температуры области нормальной фазы. При этом имелся сверхтекучий поток вокруг таких областей, приводивший к их охлаждению. Существенное отличие рассматриваемого механизма состоит в том, что в нашем случае происходит нагревание флуктуации внешним окружением, поэтому, по-видимому, флуктуации должно быть выгодно сохранять сферическую симметрию для уменьшения этого нагревания. В противоположность этому, в работе [17] происходит охлаждение сверхтекучим движением, и граница раздела фаз, по всей вероятности, должна быть неустойчива относительно искажения ее формы. Однако, требуется более тщательное исследование как устойчивости, так и самого механизма фазового перехода в таких условиях, не связанных, в отличие от [17], с существованием внешнего сверхтекучего движения.

Основные результаты, приведенные в данной дипломной работе, были опубликованы в статье [20].

Список литературы

[1] R.Becker, W.Doering. Annalen der Physik **24** , 719 (1935)

[2] Я.Б. Зельдович. ЖЭТФ **112**, 525 (1942)

[3] J.S. Langer. Ann. of Physics **54** 258 (1962)

[4] И.М. Лифшиц. ЖЭТФ **42**, 1354 (1962)

[5] Я.Б. Зельдович, И.Ю Кобзарев, Л.Б. Окунь. ЖЭТФ **67** , 3, (1974)

[6] T.W Kibble. J.Phys. **A9**, 1387 (1976)

[7] W.H. Zurek. "Cosmological experiments in condensed matter system", Physics Reports 177-221 (1996)

[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. т.**5** "Статистическая физика", физматлит Москва

[9] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. т.**9** Статистическая физика ч.2. гл. 9, физматлит Москва (2002)

[10] В.И. Кляцкин. "Стохастические уравнения глазами физика", физматлит Москва (2001)

[11] Е.М.Лифшиц,Л.П.Питаевский. т**X**, Физическая кинетика. Наука, Москва (1979)

[12] И.М. Халатников. "Теория сверхтекучести", гл. 9 , Наука Москва (1971)

[13] Akira Onuki. J. Low Temp. Physics **50**, 5/6, 433 (1982)

[14] P.B. Weinman, J. Miller. J. Low Temp. Physics **119**, 155 (2000)

[15] Feng Chuan Lui, Guenter Ahlers. PRL, **76**, 8, 1300 (1996)

[16] H. Baddar, G. Ahlers, Kuehn, H. Fu. J. Low Temp. Physics **119**, 1/2, 1 (2000)

[17] I.S. Aranson, N.B. Kopnin, V.M. Vinokur. PRL **83**, 2000 (1999)

[18] V.H.M Ruutu, V.B Eltsov, A.J Gill et al., Nature **382**, 334 (1996)

[19] С.В Иорданский, А.Б Кашуба. Письма в ЖЭТФ **73**, 542-545

[20] Е.А. Бренер, С.В. Иорданский, Р.Б. Сапцов. Письма в ЖЭТФ **79**, 515-521