

Московский физико-технический институт  
Институт теоретической физики им Л.Д. Ландау РАН

# Зарядовые возбуждения в андреевской квантовой точке

Магистерская диссертация студента 1286 группы  
Садовского И.А.

Научный руководитель  
д.ф.-м.н. Лесовик Г.Б.

Черноголовка—2007 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Дробный заряд в андреевской квантовой точке</b>	<b>2</b>
1.1	Введение . . . . .	2
1.2	Происхождение дробного заряда . . . . .	3
1.3	Андреевский уровень . . . . .	3
1.4	Заряд андреевского уровня . . . . .	9
1.5	Квантовые флуктуации заряда . . . . .	10
1.6	Учет кулоновского взаимодействия . . . . .	11
1.7	Ток через андреевскую квантовую точку . . . . .	14
1.8	Термодинамические флуктуации и флуктуации потенциала затвора. Телеграфный сигнал . . . . .	16
1.9	Измерение дробного заряда . . . . .	17
<b>2</b>	<b>О возможности измерения слабых магнитных полей с помощью андреевской квантовой точки</b>	<b>19</b>
2.1	Введение . . . . .	19
2.2	Чувствительность . . . . .	20
2.3	Обсуждение . . . . .	23

# Глава 1

## Дробный заряд в андреевской квантовой точке

### 1.1 Введение

Около пятидесяти лет назад было установлено что сверхпроводящая фаза  $\varphi$  связана с бездиссипативным током, в массивном сверхпроводнике изменение фазы на  $2\pi$  порождает магнитный вихрь [1], а разность фаз  $\varphi$  на контакте приводит к возникновению джозефсоновского тока [2]. Намного позже было установлено, что вихри в сверхпроводнике несут заряд, много меньший заряда электрона [3], что является следствием нарушения электронно-дырочной симметрии. В этой главе показано, что нарушение электронно-дырочной симметрии порождает заряд, локализованный в металлической квантовой точке, присоединенной к сверхпроводящему кольцу (так называемая андреевская квантовая точка [4], см. Рис. 1.1(а)). Этот заряд изменяется непрерывным образом при изменении потенциала затвора  $V_g$  и разницы фаз между сверхпроводящими берегами, поэтому в общем случае он оказывается дробным. Это проявляется для основного и дважды возбужденного (четных) состояний, в то время как единожды возбужденное (нечетное) состояние несет целый заряд, см. Рис. 1.1(с). В частности отсюда следует, что заряд возбуждения является дробным. Дробный заряд можно наблюдать, следя за соответствующим телеграфным сигналом, который возникает вследствие стохастического заселения андреевских уровней, или наблюдая зависимость заряда от магнитного потока, проникающего в сверхпроводящее коль-

цо. Последний факт позволяет думать о возможности создания прибора для измерения слабых магнитных полей на основе андреевской квантовой точки (подробнее см. в Гл. 2).

## 1.2 Происхождение дробного заряда

Изменяющийся непрерывным образом заряд в мезоскопических системах обсуждается в работах [5, 6]. В этих работах появление дробного заряда обеспечивается тем, что только часть волновой функции локализована в квантовой точке. Такой источник дробного заряда отличается от обсуждаемого в данной работе, где оставшаяся часть волновой функции полностью делокализована в сверхпроводящем конденсате. Наш дробный заряд напоминает дробный заряд, связанный с возбуждениями в сверхпроводнике и обсуждаемый в контексте с релаксацией заряда [7, 8] в неравновесной сверхпроводимости. Здесь также оставшаяся часть заряда находится в сверхпроводящем конденсате. В этой главе мы качественно обсуждаем происхождение дробного заряда, а затем определяем его количественно. Также мы учитываем влияние слабого кулоновского взаимодействия. В конце главы обсуждаются квантовые и термодинамические флуктуации заряда.

## 1.3 Андреевский уровень

В сверхпроводящих мезоскопических системах явление андреевского отражения [9] играет основополагающую роль. Электроны (дырки) с энергиями  $E$ ,  $|E - \varepsilon_F| < \Delta$  налетают с нормального металла (N), рассеиваются на сверхпроводнике (S) и отражаются как дырки (электроны). При этом в сверхпроводник попадает (или покидает его) куперовская пара. Тут  $\varepsilon_F$  и  $\Delta$  обозначают энергию Ферми и сверхпроводящую щель соответственно. В SNS контакте электрон превращается в дырку на одной NS-границе, а потом обратно в электрон на противоположной NS-границе. Этот процесс образует электронно-дырочно симметричное незаряженное связанное состояние (мы игнорируем маленькое нарушение электронно-дырочной симметрии порядка  $\Delta/\varepsilon_F$ ). В случае присутствия на каждой NS-границе тонкого слоя изолятора (SINIS-контакт) к андреевскому рассеянию примешается нормальное, и электрон-дырочная симметрия раз-

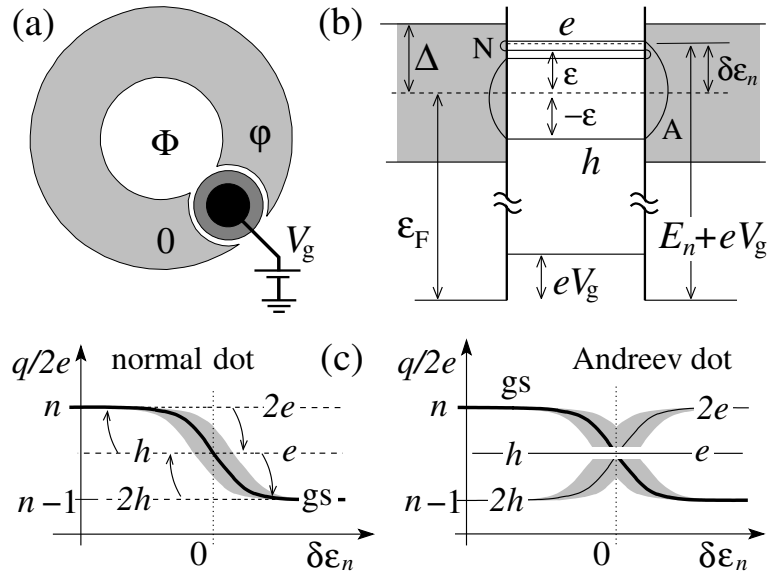


Рис. 1.1: (а) Андреевская квантовая точка (SINIS), вставленная в сверхпроводящее кольцо. Изменяя поток  $\Phi$  или потенциал затвора  $V_g$ , можно изменять заряд квантовой точки. (б) Смесь андреевского и нормального рассеяний на границе сверхпроводник–изолятор–нормальный металл приводит к нарушению электрон-дырочной симметрии и появлению дробного заряда в андреевской квантовой точке. Это явление происходит вблизи резонансов в соответствующей NININ структуре. На этом рисунке показан электроноподобный резонанс, когда электроноподобная квазичастица многократно отражается от NIS границы, а дырочноподобная — нет. (с) Заряд нормальной и андреевской квантовых точек в зависимости от положения резонанса  $\epsilon_N$ ; показаны заряды основного состояния (gs), заряды единожды и дважды возбужденного состояний. Резонанс, проходящий через уровень Ферми, выталкивает заряд  $2e$  из квантовой точки; затемненные области обозначают флуктуации заряда в соответствующих состояниях. Пунктирные линии (нормальная квантовая точка) обозначают электроно- и дырочноподобный резонансы, соответствующие заряды быстро распадаются в основное состояние (стрелки). При введении сверхпроводимости эти резонансы превращаются в собственные состояния андреевской квантовой точки. Эти состояния несут целый заряд при единичном возбуждении (нечетное состояние) и дробный заряд при двойном возбуждении (четное состояние).

рушается, см. Рис. 1.1(b). Также андреевские состояния в SINIS-контакте легко понять, изучая вначале соответствующую NININ-структуру, где все сверхпроводники заменены нормальными металлами. Каждый резонанс превращается в соответствующий андреевский уровень. Электроноподобные резонансы (выше энергии Ферми  $E > \varepsilon_F$ ) превращаются в электроноподобные андреевские состояния (с отрицательным зарядом), а дырочноподобные ( $E < \varepsilon_F$ ) — в дырочноподобные (с положительным зарядом). Свойства этих состояний легко менять путем изменения потенциала затвора  $V_g$  или разности сверхпроводящих фаз  $\varphi$  вдоль контакта.

Андреевские состояния открывают новые возможности для настраиваемых джозефсоновских приборов, например джозефсоновского транзистора [10, 11]. В этой работе мы в основном интересуемся их зарядовыми свойствами.

Рассмотрим короткий SINIS контакт с длиной нормальной области  $L$  ( $L \ll \xi$ , где  $\xi$  — длина когерентности в сверхпроводнике). В случае короткого контакта расстояние между соседними резонансами  $\delta_N$  в соответствующем NININ-контакте будет больше чем сверхпроводящая щель  $\delta_N > \Delta$ , и во внимание нужно будет брать единственный энергетический уровень. Такие андреевские точки были недавно сделаны на основе углеродных нанотрубок [12, 13, 14, 15]. Мы будем интересоваться полностью изолированной нормальной областью с маленькой шириной резонанса в соответствующей NININ-структуре  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_N < \Delta$ . В этой части мы полностью пренебрежем кулоновской энергией  $E_C = 0$ . В итоге наша система будет работать в режиме  $\Gamma_N$ ,  $\Delta \ll \delta_N$ ,  $E_C = 0$  в этом разделе и  $E_C \ll \Delta$  в разделе 1.6. Такой режим может быть осуществлен экспериментально [12, 16].

Положения и ширины резонансов в NININ-контакте определяются из задачи на собственные числа  $\hat{\mathcal{H}}_0 \Psi = E \Psi$ , где гамильтониан нормального состояния  $\hat{\mathcal{H}}_0 = -\hbar^2 \partial_x^2 / 2m + U(x) - \varepsilon_F$ . Потенциал  $U(x) = U_{\text{ps},1}(x + L/2) + U_{\text{ps},2}(x - L/2) + eV_g \theta(L/2 - |x|)$  описывает два точечных рассеивателя (с амплитудами прохождения и отражения  $T_l^{1/2} e^{x_l^t}$ ,  $R_l^{1/2} e^{x_l^r}$  соответственно;  $R_l = 1 - T_l$ ,  $l = 1, 2$ ) и эффект от потенциала затвора  $V_g$ , который предполагается много меньшим чем энергия Ферми  $eV_g \ll \varepsilon_F$ . В этом случае резонансы появляются на энергиях  $E_n = \varepsilon_L (n\pi - \chi_1^r/2 - \chi_2^r/2)^2$ ; они разделены  $\delta_N = (E_{n+1} - E_{n-1})/2 \approx 2E_n/n$  и имеют ширины  $\Gamma_N = T\delta_N/\pi\sqrt{R}$ , где  $\varepsilon_L = \hbar^2/2mL^2$ . Потенциал затвора  $V_g$  смещает все резонансы на величину  $eV_g$ . Обозначим положение  $n$ -го

резонанса относительно энергии Ферми  $\varepsilon_F$  через  $\varepsilon_N = E_n + eV_g - \varepsilon_F$ , см. Рис. 1.1(b).

Теперь перейдем обратно от нормальной квантовой точки к андреевской, заменив нормальные берега на сверхпроводящие. Для того чтобы учесть андреевское отражение в SINIS-контакте мы должны решать уравнения Болголюбова-де Жена (выбираем состояния с  $\varepsilon_A \geq 0$ , см. Рис. 1.1(b))

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{H}}_0(x) & \hat{\Delta}(x) \\ \hat{\Delta}^*(x) & -\hat{\mathcal{H}}_0(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \varepsilon_A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

с потенциалом спаривания  $\hat{\Delta}(x) = \Delta[\theta(-x - L/2)e^{-i\varphi/2} + \theta(x - L/2)e^{i\varphi/2}]$ ,  $u(x)$  и  $v(x)$  обозначают электронную и дырочную компоненты волновой функции.

Состояние дискретного спектра заключенного под щелью получается из условия квантования (в андреевском приближении), черточка « $\bar{\cdot}$ » и индексы « $\pm$ » относятся к вероятностям и фазам отражения и прохождения для INI-части и энергиям  $\varepsilon_F \pm \varepsilon$ :

$$\cos(S_+ - S_- - 2\alpha) = \sqrt{\bar{R}_+ \bar{R}_-} \cos \beta + \sqrt{\bar{T}_+ \bar{T}_-} \cos \varphi. \quad (1.2)$$

Фаза  $\alpha = \arccos(\varepsilon_A/\Delta)$  характеризует фазу андреевского отражения на идеальной NS-границе при  $\varphi = 0$ . Фазы  $S_{\pm} = \chi_{\pm}^t + k_{e,h}L$ , где  $k_{e,h} = \sqrt{2m(\varepsilon_F \pm \varepsilon)}/\hbar$  учитывают распространение вдоль INI-области; для симметричных барьеров фаза  $\beta = (\bar{\chi}_+^t - \bar{\chi}_+^r) - (\bar{\chi}_-^t - \bar{\chi}_-^r)$  кратна  $\pi$  и порождает плавную функцию  $\sqrt{\bar{R}_+ \bar{R}_-} \cos \beta$ , меняющую знак на каждом резонансе [11, 17]. Для асимметричного случая формула (1.2) дает

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) \cos 2\pi \frac{\varepsilon_A}{\delta_N} - 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2 \alpha \cos 2\pi \frac{\varepsilon_N}{\delta_N} + \\ + T_1 T_2 \cos \varphi = \cos\left(2\alpha - 2\pi \frac{\varepsilon_A}{\delta_N}\right) + R_1 R_2 \cos\left(2\alpha + 2\pi \frac{\varepsilon_A}{\delta_N}\right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из численного решения уравнения (1.3) следует зависимость андреевской энергии  $\varepsilon_A$  от положения нормального резонанса (потенциала затвора)  $\varepsilon_N$ , эта зависимость показана на Рис. 1.2(a).

Уравнение (1.3) можно проанализировать в некоторых интересных случаях. Когда квантовая точка находится не в резонансе  $|\varepsilon_N| \gg \Delta$ ,

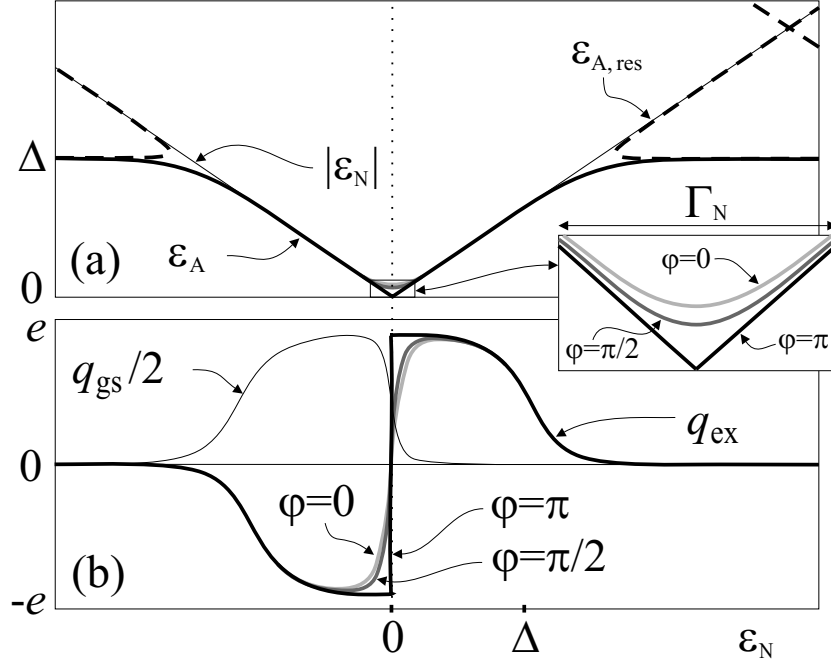


Рис. 1.2: (а) Андреевская энергия  $\epsilon_A$  (жирная сплошная линия) и андреевские резонансы  $\epsilon_{A,res}$  (пунктирная линия) в андреевской квантовой точке в зависимости от положения нормального резонанса  $\epsilon_N$ , которое можно непрерывно изменять с помощью изменения потенциала затвора  $V_g$ . Мы выбрали ширину нормального резонанса  $\Gamma_N = 0.2\Delta$  и асимметричность квантовой точки  $A = 0$  (нормальные рассеиватели полностью симметричны). Также показаны нормальные резонансы  $|\epsilon_N|$  (тонкая сплошная линия), дырочноподобный с отрицательным наклоном  $\epsilon_N < 0$ , электроподобный — с положительным  $\epsilon_N > 0$  и зависимость от разности сверхпроводящих фаз  $\phi$  вдоль квантовой точки (вставка). (б) Заряды  $q_{ex}$  и  $q_{gs}$ .



андреевская энергия дается выражением  $\varepsilon_A \approx \Delta(1 - \Gamma_N^2/8\varepsilon_N^2)$ . Когда резонанс заходит под щель, но отстоит от энергии Ферми на расстояния большие чем  $\Gamma_N$ ,  $\Gamma_N \lesssim |\varepsilon_N| \lesssim \Delta$ , андреевская энергия линейно зависит от положения нормального резонанса,

$$\varepsilon_A \approx (1 - \Gamma_N/2\Delta)|\varepsilon_N|. \quad (1.4)$$

Как только резонанс подходит к энергии Ферми на расстояния меньше ширины нормального резонанса  $|\varepsilon_N| \lesssim \Gamma_N$  андреевское состояние становится чувствительным к разности сверхпроводящих фаз  $\varphi$  и дается выражением

$$\varepsilon_A = \left(1 - \frac{\Gamma_N}{2\Delta}\right) \sqrt{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_\Gamma^2}, \quad (1.5)$$

где

$$\varepsilon_\Gamma = \frac{\Gamma_N}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + A^2}, \quad A = \frac{|T_1 - T_2|}{2\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (1.6)$$

Этот предел нам наиболее интересен (его также называют  $\Delta \rightarrow \infty$  предел) вследствие зависимости  $\varepsilon_A$  от разности сверхпроводящих фаз вдоль контакта. В пределе  $\Delta \rightarrow \infty$  обе части волновой функции  $u(x)$  и  $v(x)$  не равны нулю только в нормальной области

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \begin{cases} 0, & |x| > L/2, \\ \begin{bmatrix} C_e^{\rightarrow} e^{ik_e x} + C_e^{\leftarrow} e^{-ik_e x} \\ C_h^{\leftarrow} e^{ik_h x} + C_h^{\rightarrow} e^{-ik_h x} \end{bmatrix}, & |x| < L/2, \end{cases}$$

Коэффициенты равны  $C_{e,h}^{\rightarrow} = C_{e,h}^{\leftarrow} = [(1 \pm \varepsilon_N/\varepsilon_A)/2L]^{1/2}$ .

Основным состоянием системы является состояние без квазичастиц  $|0\rangle$  с энергией  $\varepsilon_0 \equiv U_0$ , отсчитанной от энергии Ферми  $\varepsilon_F$ . Первое возбужденное состояние с одной боголюбловской квазичастицей дважды вырождено по спину  $|1_\uparrow\rangle = \hat{a}_\uparrow^\dagger |0\rangle$ ,  $|1_\downarrow\rangle = \hat{a}_\downarrow^\dagger |0\rangle$  и имеет энергию  $\varepsilon_1 = U_0 + \varepsilon_A$ . Дважды возбужденное состояние с двумя квазичастицами  $|2\rangle = \hat{a}_\uparrow^\dagger \hat{a}_\downarrow^\dagger |0\rangle$  обладает энергией  $\varepsilon_2 = U_0 + 2\varepsilon_A$ . Энергия основного состояния может быть выражена посредством андреевской энергии (в  $\Delta \rightarrow \infty$  пределе)

$$U_0 = \varepsilon_N - \varepsilon_A. \quad (1.7)$$

Тут мы опустили члены, относящиеся ко вкладу от резонансов, лежащих далеко под уровнем Ферми. Эти резонансы не влияют на формирование сверхпроводимости и их вклад в  $U_0$  не зависит от  $\varphi$ .

## 1.4 Заряд андреевского уровня

Теперь давайте определим заряды основного и возбужденных состояний, а также термодинамически равновесный заряд.

Андреевское состояние несет нетривиальный заряд, который можно найти как среднее по состоянию  $|\nu\rangle$  ( $\nu = 0, 1_\uparrow, 1_\downarrow, 2$ ) от оператора заряда

$$\hat{Q} = e \sum_{\sigma} \int_{-L/2}^{L/2} \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger}(x) \hat{\Psi}_{\sigma}(x) dx, \quad (1.8)$$

$q_{\nu} = \langle \nu | \hat{Q} | \nu \rangle$ . Тут оператор  $\hat{\Psi}_{\sigma}$  определяется преобразованиями Боголюбова  $\hat{\Psi}_{\sigma}(x) = \sum_n [u_n(x) \hat{a}_{n,\sigma} + \text{sign}\sigma v_n^*(x) \hat{a}_{n,-\sigma}^{\dagger}]$ , сумма берется по всем (включая дискретные и непрерывные) состояниям. Также заряд состояния  $|\nu\rangle$  можно найти, продифференцировав энергию этого состояния  $\varepsilon_{\nu}$  по потенциалу затвора  $q_{\nu} = \partial \varepsilon_{\nu} / \partial V_g$ . Естественно, оба этих метода дают одинаковые результаты

$$q_{\text{gs}} = q_0 = e - q_{\text{ex}}, \quad q_1 = e, \quad q_2 = e + q_{\text{ex}}, \quad (1.9)$$

где  $q_{\text{ex}}$  представляет собой заряд единичного возбуждения. Для произвольных значений  $\Gamma_N$  и  $\varepsilon_N$  (но меньших чем расстояние между соседними резонансами  $\delta_N$ ) заряд можно вычислить, неявно дифференцируя уравнение (1.3), при этом получается довольно громоздкая формула, которая будет проанализирована в частных случаях. Термодинамически равновесный заряд равен

$$q_{\text{eq}} = [1 - f_{\Theta}(\varepsilon_A)] q_0 + f_{\Theta}(\varepsilon_A) q_2, \quad (1.10)$$

где  $f_{\Theta}(\varepsilon)$  представляет собой функцию Ферми с температурой  $\Theta$ ,  $f_{\Theta}(\varepsilon) = 1/(e^{\varepsilon/\Theta} + 1)$ , тут и далее мы полагаем константу Больцмана равной единице  $k_B = 1$ .

Все эти заряды локализованы около квантовой точки, в основном в области  $[-L/2 \dots L/2]$ . Заряд возбуждения  $q_{\text{ex}}$  находится *только* в указанной области и при расширении пределов интегрирования в формуле (1.8) *не* изменяется. Равновесный заряд при увеличении области на длину когерентности  $\xi$  увеличивается незначительно<sup>1</sup>. Поэтому рассматриваемый

<sup>1</sup>В квантовой точке квазичастицы проводят длительное время  $\tau_{\text{dot}} \sim \hbar/\Gamma_N$ , в то время как в близлежащем сверхпроводнике — короткое время  $\tau_{\text{sc}} \sim \xi/v_F \sim \hbar/\Delta$ . Отметим, что  $q_{\text{eq}}$  перестает быть локализованным строго в нормальной области, только тогда когда андреевская энергия становится порядка сверхпроводящей щели  $\varepsilon_A \approx \Delta$ .

дробный заряд происходит не из-за потери части волновой функции. Заряд возбуждения, как и энергия, может быть проанализирован в различных пределах

$$q_{\text{ex}} \approx \begin{cases} e(1 - \Gamma_N/2\Delta) \frac{\varepsilon_N}{\sqrt{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_\Gamma^2}}, & \varepsilon_N \lesssim \Gamma_N, \\ \text{sign}(\varepsilon_N) e(1 - \Gamma_N/2\Delta), & \Gamma_N \lesssim \varepsilon_N \lesssim \Delta, \\ \text{sign}(\varepsilon_N) e \Gamma_N^2 \Delta / 4\varepsilon_N^3, & \Delta \ll \varepsilon_N. \end{cases} \quad (1.11)$$

Численный результат представлен на Рис. 1.2(b): заряд возрастает линейно с наклоном, примерно равным  $2e/\Gamma_N \cos(\varphi/2)$ ; отметим что резкая зависимость наступает около точки  $\varphi = \pi$ , когда резонанс пересекает уровень Ферми и насыщается на значении  $e(1 - \Gamma_N/2\Delta)$ . Когда нормальный резонанс покидает область под щелью  $|\delta\varepsilon_N| \gg \Delta$ , заряд возбуждения затухает пропорционально  $\Gamma_N^2 \Delta / \delta\varepsilon_N^3$ . Мы видим что дробный локализованный заряд возникает всякий раз, когда нормальный резонанс проходит уровень Ферми [16]. Заметим, что в добавок к дробным зарядам основного и дважды возбужденного (парных) состояний появляется целый заряд единожды возбужденного (непарного) состояния  $q_1 = e$ . Из всех перечисленных в формуле (1.11) режимов наиболее интересным является первый, в котором заряд зависит от разницы сверхпроводящих фаз. Выпишем его еще раз в развернутом виде, пренебрегая малой поправкой  $\Gamma_N/2\Delta$

$$q_{\text{ex}} = e \frac{\varepsilon_N}{\sqrt{\varepsilon_N^2 + \frac{\Gamma_N^2}{4} \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} + A^2 \right)}}. \quad (1.12)$$

В дальнейшем мы ограничимся изучением только этого случая.

## 1.5 Квантовые флуктуации заряда

Все вышеупомянутые нетривиальные заряды являются следствием нарушения электрон-дырочной симметрии и происходят из суперпозиции электроно- и дырочноподобных состояний с целыми зарядами. В результате заряды подвержены квантовым флуктуациям, которые характеризуются среднеквадратичными отклонениями  $(\delta q_\nu^2)^{1/2} \equiv [\langle \nu | \hat{Q}^2 | \nu \rangle - \langle \nu | \hat{Q} | \nu \rangle^2]^{1/2}$ . Среднее от  $\hat{Q}^2$  дается выражением  $\langle \nu | \hat{Q}^2 | \nu \rangle = \sum_{\nu'} \langle \nu | \hat{Q} | \nu' \rangle$

$\langle \nu' | \hat{Q} | \nu \rangle$ , где сумма по  $\nu'$  берется по всем состояниям. Мы будем интересоваться флуктуациями основного  $|0\rangle$ , единожды возбужденных  $|1_\uparrow\rangle$ ,  $|1_\downarrow\rangle$  и дважды возбужденного состояний  $|2\rangle$ . Детектор будет измерять заряд на протяжении некоторого интервала времени  $\tau$ , и измеренный заряд будет представлять собой среднее по времени  $\bar{q} \equiv \int_0^\tau (dt/\tau)q(t)$ ; следовательно должны учитываться только матричные элементы между состояниями с разницей энергий меньшей  $\hbar/\tau$ . Предполагая типичные измерительные частоты  $1/\tau \ll \Delta/\hbar$ , мы можем ограничить сумму по  $\nu'$  до суммы по четырем состояниям дискретного спектра  $|0\rangle$ ,  $|1_\uparrow\rangle$ ,  $|1_\downarrow\rangle$ ,  $|2\rangle$  (в пределе  $\Gamma_N$ ,  $|\varepsilon_N| \ll \Delta$ ). В этом случае перечисленные состояния составляют полный базис Гильбертова пространства, и единственным недиагональным матричным элементом, отличным от нуля, является  $q_{02}$ ,  $q_{02} \equiv \langle 0 | \hat{Q} | 2 \rangle = e(1 - \varepsilon_N^2/\varepsilon_A^2)^{1/2}$ . Для флуктуаций заряда мы получаем

$$(\delta q_0^2)^{1/2} = (\delta q_2^2)^{1/2} = e(1 - \varepsilon_N^2/\varepsilon_A^2)^{1/2} = (q_0 q_2)^{1/2}, \quad (\delta q_1^2)^{1/2} = 0. \quad (1.13)$$

Мы видим, что заряд единожды заполненного состояния не флуктуирует, а заряды основного и дважды возбужденного состояний флуктуируют сильно, см. Рис. 1.1(с).

## 1.6 Учет кулоновского взаимодействия

Перейдем теперь к учету кулоновского взаимодействия. Существует две важные задачи: экранирование заряда в квантовой точке и смешивание зарядовых состояний.

Экранирование из-за дополнительного втекания и вытекания зарядов в андреевскую квантовую точку определяется плотностью состояний. Соответствующий масштаб энергий дается расстоянием между соседними резонансами  $\delta_N$  (так как каждый из них несет заряд  $2e$ ), и поэтому экранирование заряда в квантовой точке не важно, когда кулоновская энергия  $E_C$  много меньше чем расстояние между резонансами  $E_C \ll \delta_n$ .

Энергетический масштаб  $E_C \approx e^2/2C$  можно оценить, полагая емкость квантовой точки  $C$  равной  $\epsilon L$ , где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды. С другой стороны расстояние между соседними резонансами  $\delta_N = \hbar v_F/2L$ , так же как и  $E_C$ , обратно пропорционально длине нормальной части  $L$ . Ключевым параметром является безразмерное отношение  $\delta_N/E_C = \hbar v_F \epsilon / e^2$ . Полагая типичные значения

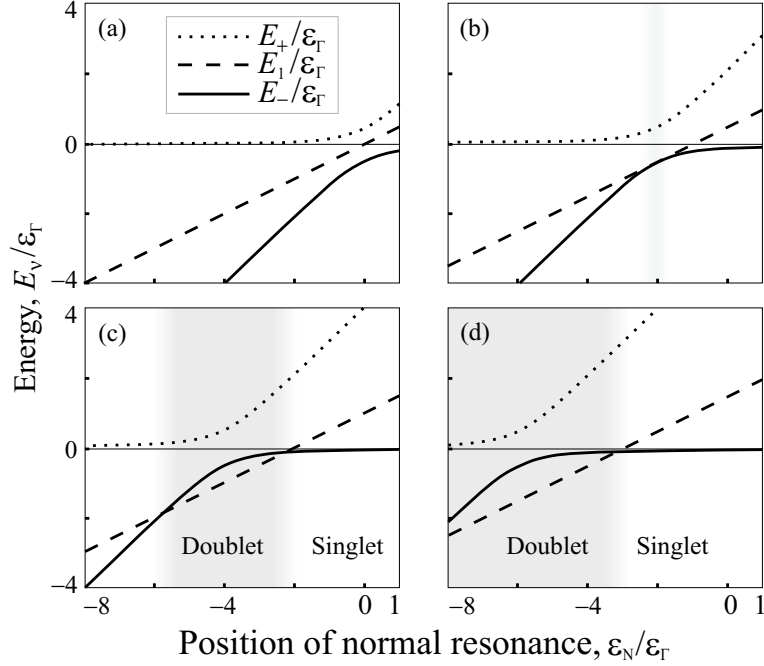


Рис. 1.3: Энергии  $E_-$  (сплошная линия),  $E_1$  (пунктирная линия) и  $E_+$  (точечная линия) в зависимости от положения нормального резонанса  $\varepsilon_N$ . Все энергии отсчитаны в единицах  $\varepsilon_\Gamma$  (1.6). Кулоновская энергия  $E_C = 0$  для (a),  $E_C = \varepsilon_\Gamma$  для (b),  $E_C = 2\varepsilon_\Gamma$  для (c) и  $E_C = 3\varepsilon_\Gamma$  для (d). При  $E_C \geq \varepsilon_\Gamma$  существует область, в которой основным состоянием является дублет, на рисунке она закрашена серым цветом. Ширина дублетной области равна  $2(E_C^2 - \varepsilon_\Gamma^2)^{1/2}$ , границы «размываются» из-за конечной температуры  $\Theta$ .

$\epsilon \sim 10$  и  $v_F \sim 10^6$  м/с, мы получаем  $\delta_N/E_C \approx 30$ , что позволяет расположить энергии в порядке  $E_C \lesssim \Delta \lesssim \delta_N$ . В работе [13] была изучена андреевская квантовая точка в форме нанотрубки длины  $L \approx 500$  нм, что отвечает кулоновской энергии  $E_C \sim 1$  К, поэтому вышеупомянутые неравенства могут быть реализованы экспериментально.

Для того чтобы исследовать смешивание зарядовых состояний в пределе  $E_C, \Gamma_N, |\varepsilon_N| \ll \Delta$  мы снова ограничимся вкладом четырех состояний  $|0\rangle, |1_\uparrow\rangle, |1_\downarrow\rangle, |2\rangle$  (см. раздел 1.5). Взаимодействие дается оператором

$$\hat{V} = E_C \frac{\hat{Q}^2}{e^2}.$$

В базисе из четырех состояний мы можем выполнить точную диагонализацию гамильтониана. Ненулевые матричные элементы оператора  $\hat{V}$  равны

$$V_{00} = E_C(q_0^2 + q_{02}^2)/e^2, \quad V_{11} = E_C, \quad V_{22} = E_C(q_2^2 + q_{02}^2)/e^2, \quad V_{02} = 2E_C q_{02}/e.$$

Новые энергетические уровни определяются условием совместимости следующей системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_0 - E & & & V_{02} \\ & \tilde{\varepsilon}_{1\uparrow} - E & & \\ & & \tilde{\varepsilon}_{1\downarrow} - E & \\ V_{20} & & & \tilde{\varepsilon}_2 - E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_{1\uparrow} \\ D_{1\downarrow} \\ D_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (1.14)$$

где для краткости введены обозначения  $\tilde{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu + V_{\nu\nu}$ ,  $\nu = 0, 1_\uparrow, 1_\downarrow, 2$ . Энергия состояния с единственной боголюбовской квазичастицей  $|1\rangle$  смещается на константу, равную кулоновской энергии

$$E_1 = \varepsilon_N + E_C, \quad (1.15)$$

а само состояние  $|1\rangle$  не смешивается с остальными и сохраняет вырожденность по спину. Это состояние называется крамерсовским дублетом. Основное  $|0\rangle$  и дважды возбужденное  $|2\rangle$  состояния смешиваются из-за кулоновского взаимодействия и порождают два новых синглетных состояния  $|-\rangle$  and  $|+\rangle$ . Новые состояния выражаются через коэффициенты в формуле (1.14)  $|\pm\rangle = D_0^\pm|0\rangle + D_2^\pm|2\rangle$ . Энергии новых состояний равны

$$E_\pm = \varepsilon_N + 2E_C \pm \sqrt{(\varepsilon_N + 2E_C)^2 + \varepsilon_\Gamma^2}. \quad (1.16)$$

Энергии дублетного и синглетных состояний зависят от положения нормального резонанса  $\varepsilon_N$  и разницы сверхпроводящих фаз  $\varphi$  по-разному и при некоторых  $\varepsilon_N$  и  $\varphi$  возможна ситуация когда  $E_- > E_1$ . Поэтому основное состояние может быть создано как синглетным  $|-\rangle$  так и дублетным  $|1\rangle$  состояниями, при этом состояние  $|+\rangle$  всегда остается дважды возбужденным, см. Рис. 1.3. Когда  $E_C < \varepsilon_\Gamma$  основное состояние всегда образуется синглетом  $|-\rangle$ . В противоположном случае  $E_C \geq \varepsilon_\Gamma$  основное состояние формируется дублетом  $|1\rangle$  в области

$$-2E_C - \sqrt{E_C^2 - \varepsilon_\Gamma^2} < \varepsilon_N < -2E_C + \sqrt{E_C^2 - \varepsilon_\Gamma^2}, \quad (1.17)$$

или, что то же самое,

$$(\varepsilon_N + 2E_C)^2 + \frac{\Gamma_N^2}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\Gamma_N^2 A^2}{4} < E_C^2 \quad (1.18)$$

и остается синглетом  $|-\rangle$  при всех других значениях  $\varepsilon_N$  [18]. На границе области (1.17) происходит фазовый переход из синглетного в дублетное состояние, при этом заряд андреевской квантовой точки и ток через нее изменяются скачком.

Заряды новых состояний  $|\mu\rangle$ , ( $\mu = 1, \pm$ ) могут быть вычислены как производная от энергии по потенциалу затвора  $Q_\mu = \partial E_\mu / \partial V_g$ , получаем

$$Q_\pm = e \left( 1 \pm \frac{\varepsilon_N + 2E_C}{\sqrt{(\varepsilon_N + 2E_C)^2 + \varepsilon_F^2}} \right), \quad Q_1 = e. \quad (1.19)$$

Везде, кроме дублетной области, заряд основного состояния равен  $Q_-$ , в дублетной же области заряд равен  $Q_1 = e$ . Как можно увидеть из Рис. 1.4(a,b) для кулоновских энергий, больших критической величины  $E_C > E_C^* \equiv \Gamma_N A / 2$ , происходит фазовый переход, при этом заряд изменяется скачком на величину  $\delta Q_{pt} = Q_- - Q_1$ . При конечной температуре этот скачок размывается см. Рис. 1.4(c,d). Термодинамически равновесный заряд при конечной температуре  $\Theta$  равен

$$Q_{eq} = \frac{Q_- e^{-E_-/\Theta} + 2Q_1 e^{-E_1/\Theta} + Q_+ e^{-E_+/\Theta}}{e^{-E_-/\Theta} + 2e^{-E_1/\Theta} + e^{-E_+/\Theta}}. \quad (1.20)$$

## 1.7 Ток через андреевскую квантовую точку

В дополнение к предыдущей главе мы определим ток через андреевскую квантовую точку в состоянии  $|\nu\rangle$  при малом кулоновском взаимодействии

$$J_\pm = \mp \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Gamma_N^2 \sin \varphi}{16\sqrt{(\varepsilon_N + 2E_C)^2 + \varepsilon_F^2}}, \quad J_1 = 0. \quad (1.21)$$

Заметим, что ток равен нулю в дублетной области, а многое указывает на то, что при учете состояний из непрерывного спектра он начинает течь в обратную сторону ( $\pi$ -контакт) [18, 15]. Термодинамически равновесный ток

$$J_{eq} = \frac{J_- e^{-E_-/\Theta} + J_+ e^{-E_+/\Theta}}{e^{-E_-/\Theta} + 2e^{-E_1/\Theta} + e^{-E_+/\Theta}}. \quad (1.22)$$

Ток через андреевскую квантовую точку без учета кулоновского взаимодействия обсуждается в работе [11].

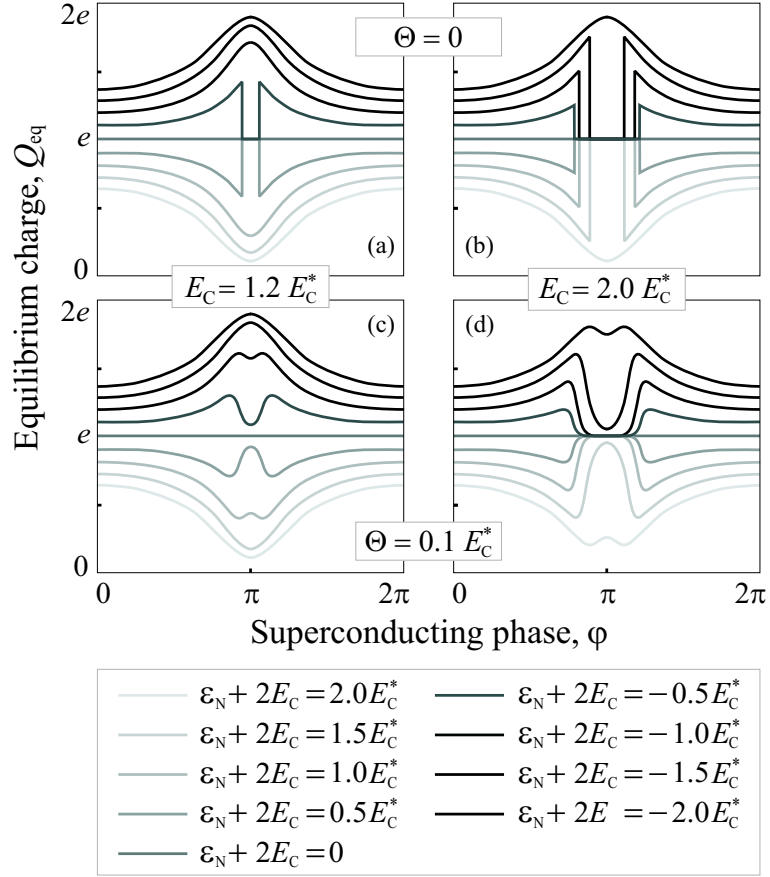


Рис. 1.4: Равновесный заряд  $Q_{\text{eq}}$  (1.20) в зависимости от разности сверхпроводящих фаз  $\varphi$ . На графиках (a) и (b) температура равна нулю (т.е.  $Q_{\text{eq}}$  равен заряду основного состояния), на (c) и (d) температура равна  $\Theta = 0.1 E_C^*$ , где  $E_C^* \equiv \Gamma_N A/2$ . Кулоновская энергия  $E_C = 1.2 E_C^*$  для рисунков (a) и (c),  $E_C = 2.0 E_C^*$  для (b) и (d). Асимметричность квантовой точки  $A = 0.2$ . Особенности в центрах графиков соответствуют дублетной области (1.17). На (c) и (d) граница дублетной области размыта температурой  $\Theta$ .



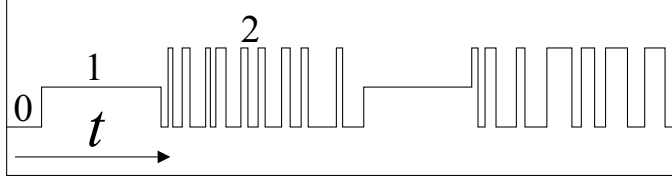


Рис. 1.5: Структура телеграфного шума. Переходы с изменением состояния системы на четное количество квазичастиц ( $0 \leftrightarrow 2$ ) происходят быстро, а на нечетное количество квазичастиц ( $0 \leftrightarrow 1$  и  $1 \leftrightarrow 2$ ) — медленно.

## 1.8 Термодинамические флуктуации и флуктуации потенциала затвора. Телеграфный сигнал

В этом разделе мы расскажем о динамике возбуждений андреевских состояний, происходящих из-за тепловых перезаселений уровней в квантовой точке. Такие перезаселения формируют телеграфный сигнал, состоящий из зарядов в состояниях  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Эти состояния заполняются и распадаются, поглощая и испуская фононы [19]. Кроме того флуктуации потенциала затвора создают дополнительный канал для перезаселения уровней. В процесс перезаселения уровней дают вклад два процесса: переходы между основным и единожды возбужденным состояниями с частотами  $\gamma_{01}$  и  $\gamma_{10} = \gamma_{01} \exp(\varepsilon_A/\Theta)$ , а также переходы между основным и дважды возбужденным состояниями с частотами  $\gamma_{02}$  and  $\gamma_{20} = \gamma_{02} \exp(2\varepsilon_A/\Theta)$ . Заметим, что переходы  $0 \leftrightarrow 1$  и  $1 \leftrightarrow 2$  эквивалентны, и их частоты равны между собой ( $\gamma_{01} = \gamma_{12}$  и  $\gamma_{10} = \gamma_{21}$ ). Переходы  $0 \leftrightarrow 1$  происходят посредством дополнительной квазичастицы с энергией  $E$  из непрерывного спектра,  $E > \Delta$ . В этом разделе мы не будем рассматривать эффекты кулоновского взаимодействия.

Частоты  $\gamma_{01}$  and  $\gamma_{02}$  можно получить, используя золотое правило Ферми с гамильтонианом электрон-фононного взаимодействия  $\hat{\mathcal{H}}_{e-ph} = g \int dx \hat{n}_e(\partial_x u)$ , где  $u$  — смещение,  $n_e$  — электронная плотность, а  $g$  — константа электрон-фононного взаимодействия, типичное значение которой 1 эВ. Мы будем рассматривать одномерные моды как фононов так и электронов. Альтернативный канал переходов дается флуктуацией потенциала затвора с гамильтонианом взаимодействия  $\hat{\mathcal{H}}_{V_g} = \int dx e \hat{n}_e V_g$ .

Определение частоты переходов  $\gamma_{02}$  из-за электрон-фононного взаимодействия дается прямым вычислением и дает результат  $\gamma_{02} \sim (g^2/\hbar m v_F^2)(a/kL^2)N(2\varepsilon_A)$ , где  $N(2\varepsilon_A)$  — Бозе-фактор фононных состояний,  $a$  и  $k > 1/L$  обозначают постоянную решетки и модуль волнового вектора фононов. В случае  $k < 1/L$  следует рассматривать 0-мерный случай, и результат превратится в  $\gamma_{02} \sim (g^2/\hbar m v_F^2)ak N_{2\varepsilon}$ . С другой стороны флуктуации потенциала затвора дают переходы с частотой  $\tilde{\gamma}_{02} \sim (e^2/\hbar C)N_{2\varepsilon}$ . Численная оценка со значениями  $g \sim 1$  эВ,  $m v_F^2 \sim 1$  эВ, и  $L \approx 500$  нм [13] дает результат  $\gamma_{02} \sim 10^{12}$  сек $^{-1}N_{2\varepsilon}$  для  $k \sim 1/L$ , что сравнимо со вкладом в частоту от флуктуаций затвора  $\tilde{\gamma}_{02} \sim 10^{11}N_{2\varepsilon}$  сек $^{-1}$ .

Вычисление частоты  $\gamma_{01}$  включает в себя дополнительное суммирование по состояниям непрерывного спектра (с энергиями  $E > \Delta$ ). В этой сумме доминируют вклады от состояний с энергиями  $E \sim \Delta$ . Мы будем оценивать частоту для процесса одновременного заполнения андреевского уровня и состояния в непрерывном спектре с поглощением фонона и распадом куперовской пары. Для такого процесса получаем  $\gamma_{01} \sim (g^2 T/\hbar m v_F^2)(as/Lv_F)\sqrt{\Theta/\Delta}e^{-\Delta/\Theta}[1 + e^{-\varepsilon_A/\Theta}]$ , где  $s$  обозначает скорость звука. заметим, что в данном случае  $kL \sim \Delta L/\hbar s \gg 1$ . Флуктуации потенциала затвора дают вклад в частоту  $\tilde{\gamma}_{01} \sim \hbar^{-1}(e^2/C)\sqrt{\Theta/\Delta}e^{-\Delta/\Theta}[1 + e^{-\varepsilon_A/\Theta}]$ . Подставляя типичные параметры  $\Theta \approx 0.1\Delta \approx 1$  К и  $v_F/s \sim 10^3$ , мы получаем оценку  $\gamma_{01} \sim 10^{10} \text{ s}^{-1} T \exp(-\Delta/\Theta)$  and  $\tilde{\gamma}_{01} \sim 10^{11} \text{ s}^{-1} \exp(-\Delta/\Theta)$  для электрон-фононного и кулоновского взаимодействий соответственно <sup>2</sup>.

Сравнивая результаты мы видим что процесс  $0 \leftrightarrow 2$  всегда происходит чаще чем  $0 \leftrightarrow 1$ , потому что в выражении для последнего присутствует экспоненциальный фактор  $\exp(-\Delta/\Theta)$ , который позволяет сильно понижать частоты  $\gamma_{01}$  и  $\tilde{\gamma}_{01}$ , понижая температуру, см Рис. 1.5.

## 1.9 Измерение дробного заряда

Так как на сегодняшний день одноэлектронные транзисторы разрешают сигнал  $\sim 10^{-5} |e|/\text{Гц}^{1/2}$  на частотах  $f < 10^9$  Гц [20], телеграфный сигнал из-за термодинамических перезаселений андреевского состояния может

<sup>2</sup>Трехмерность фононных мод приводит к тому что частоты уменьшаются на факторы  $(\varepsilon_A/\hbar\omega_D)^3(L/a) \sim 10^{-6}$  and  $(\Delta/\hbar\omega_D)^3(L/a) \sim 10^{-3}$ , где  $\omega_D$  — частота Дебая и мы предполагаем что  $\varepsilon/\hbar\omega_D \sim 10^{-3}$ .

быть разрешим, и дробный заряд в андреевской квантовой точке может быть измерен. Однако процесс  $0 \leftrightarrow 2$  может происходить слишком быстро, на частотах, превышающих сегодняшнее разрешение одноэлектронных транзисторов. В этом случае мы предлагаем два альтернативных способа измерения заряда возбуждения.

1. Можно измерить усредненный равновесный заряд  $Q_{\text{eq}}$  сначала при большой температуре  $Q_{\text{eq}}(\Theta \gg \varepsilon_A, E_C) = Q_1 = e$ , а потом при более низкой температуре  $Q_{\text{eq}}(\Theta \ll E_C^*, E_C) = Q_-$ , разница зарядов в этих двух экспериментах дает заряд возбуждения  $Q_1 - Q_-$ , см. формулу (1.19).

2. Измерение заряда при маленьких температурах, разрешая медленный процесс  $0 \leftrightarrow 1$  и усредняя по быстрому  $0 \leftrightarrow 2$ , см. Рис. 1.5, при этом измеряя заряд отдельно в двух этих состояниях. Для простоты пренебрегая эффектами кулоновского взаимодействия, вычислим разницу между средними зарядами в этих состояниях. Вероятности заполнения состояний  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  равны  $p_0 = [1 - f(\varepsilon_A)]^2$ ,  $p_1 = 2f(\varepsilon_A)[1 - f(\varepsilon_A)]$  и  $p_2 = f^2(\varepsilon_A)$ . Усреднение по быстро флуктуирующему режиму, включающему состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , дает  $\langle q \rangle_{0,2} = p_0 q_0 + p_2 q_2$ , в то время как заряд единичного возбуждения  $\langle q \rangle_1 = q_1$ . Для низких температур  $f(\varepsilon_A) \ll 1$  мы имеем  $\langle q \rangle_1 - \langle q \rangle_{0,2} = q_{\text{ex}}$ .

## Глава 2

# О возможности измерения слабых магнитных полей с помощью андреевской квантовой точки

### 2.1 Введение

Эффект Джозефсона [2] интенсивно изучался на протяжении последних 45 лет. Этот эффект заключается в том, что между двумя сверхпроводниками, отделенными друг от друга нормальным материалом, появляется бездиссипативный ток, который в свою очередь зависит от разницы сверхпроводящих фаз  $\varphi$ . В первой части этой работы обсуждался заряд нормальной области, в этой части мы обсудим зависимость этого заряда от  $\varphi$  более подробно. Эта зависимость довольно сильная, и это позволяет думать об использовании этого эффекта для измерения слабых магнитных полей.

Обычно для этого используются сверхпроводящие квантовые интерферометры (СКВИДы) [8, 21, 25]. В то время как СКВИДы основаны на зависимости джозефсоновского тока от разницы сверхпроводящих фаз  $\varphi$  (а поэтому от магнитного потока  $\Phi$ ), мы предлагаем использовать зависимость заряда андреевской квантовой точки от  $\varphi$ . Как показано в первой части этой работы, заряд  $Q$  андреевской квантовой точки с единственным энергетическим уровнем нецелый  $-|e| < Q < |e|$  и зависит от

$\varphi$ . Через  $e$  мы будем обозначать заряд электрона,  $e = -|e|$ .

Заряд андреевской квантовой точки может быть измерен чувствительным магнитометром, например, одноэлектронным транзистором, см. обсуждения в разделе 1.9. Лучшие одноэлектронные транзисторы имеют чувствительность порядка  $10^{-5} |e|/\Gamma_{\text{Ц}}^{1/2}$  (например, в работе [20]). Используя результаты разделов 1.4 и 1.6, можно сделать простые оценки и получить, что изменение потока  $\delta\Phi$  приводит к изменению заряда  $\delta Q$  с коэффициентом  $\delta Q/\delta\Phi = 2|e|/\Phi_0$ , где  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/2|e|$  — сверхпроводящий поток. Предполагая площадь сверхпроводящей петли равной  $1\text{ мм}^2$ , мы получаем чувствительность  $10^{-14}\text{ Тл}/\Gamma_{\text{Ц}}^{1/2}$ , что сравнимо с чувствительностью лучших СКВИДов  $10^{-14} \div 10^{-15}\text{ Тл}/\Gamma_{\text{Ц}}^{1/2}$  [23, 24, 25]. Назовем чувствительностью андреевской квантовой точки отношение  $\delta Q/\delta\Phi$ . Ниже мы будем изучать это отношение более подробно.

## 2.2 Чувствительность

Дифференциальная чувствительность заряда в термодинамическом равновесии к магнитному потоку, проникающему в сверхпроводящее кольцо, мы определим как модуль частной производной  $\partial Q_{\text{eq}}/\partial\Phi$ , взятой при определенной величине магнитного потока  $\Phi$ ,  $S = |\partial Q_{\text{eq}}/\partial\Phi|$ <sup>1</sup>. Используя формулу (1.20), мы получаем

$$S = \left| F_{\Theta} \frac{\partial Q}{\partial\Phi} + Q \frac{\partial F_{\Theta}}{\partial\Phi} \right|, \quad (2.1)$$

где  $Q \equiv (Q_+ - Q_-)/2$ , производная

$$\frac{\partial Q}{\partial\Phi} = e \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{(\varepsilon_{\text{N}} + 2E_{\text{C}})\Gamma_{\text{N}}^2 \sin\varphi}{16[(\varepsilon_{\text{N}} + 2E_{\text{C}})^2 + \varepsilon_{\Gamma}^2]^{3/2}} \quad (2.2)$$

определяет чувствительность зарядов состояний  $|-\rangle$  и  $|+\rangle$ , а функция

$$F_{\Theta} = \frac{e^{-E_+/\Theta} - e^{-E_-/\Theta}}{e^{-E_-/\Theta} + 2e^{-E_1/\Theta} + e^{-E_+/\Theta}}. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Заметим, что чувствительность преобразователя потока в заряд, описанного здесь,  $S \equiv S_{\Phi \rightarrow Q}$ , в точности совпадает с чувствительностью джозефсоновского транзистора [11], который преобразует потенциал затвора в ток  $S_{V \rightarrow J} = |\partial J_{\text{eq}}/\partial V_{\text{g}}|$ .

описывает зависимость заряда от температуры и учитывает наличие дублетного региона (1.17).

Как можно увидеть из Рис. 1.4 существует два интервала, где зависимость  $Q_{\text{eq}}(\varphi)$  резкая. Когда  $\varphi$  увеличивается от  $\varphi = 0$ , заряд возрастает (убывает) и достигает максимума (минимума). В случае  $E_C < E_C^* \equiv \Gamma_N A/2$  максимум (минимум) заряда всегда находится в точке  $\varphi = \pi$ , в этом случае вся кривая представляет собой интервал I. Когда  $E_C > E_C^*$  этот экстремум расщепляется на два и между новыми двумя экстремумами появляется впадина, которую будем называть интервалом II. Первый интервал соответствует синглетному состоянию андреевской квантовой точки, большая часть второго интервала — дублетному состоянию (в случае нуля температур весь второй интервал соответствует дублетному региону).

Мы начнем с описания первого интервала. Зафиксируем параметры  $\Gamma_N$ ,  $A$  и  $E_C$  и будем искать максимум чувствительности  $S$  как функцию от  $\varepsilon_N$  и  $\varphi$ . Симметрии функции  $Q_{\text{eq}}(\varepsilon_N, \varphi)$  позволяют нам сузить область поиска максимума до  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $\varepsilon_N + 2E_C > 0$ . Потом мы проанализируем максимум как функцию  $E_C$  оставляя  $A$  и  $\Gamma_N$  постоянными.

*Интервал I.* В случае  $E_C < \sqrt{3}E_C^*$  и нулевой температуры  $\Theta = 0$  чувствительность полностью определяется производной  $\partial Q_{\text{ex}}/\partial \Phi$  (2.2). Функция  $|\partial Q_{\text{ex}}/\partial \Phi|$  имеет максимум в точке  $\varepsilon_N + 2E_C = (\Gamma_N/2) \cos(\varphi/2) = \Gamma_N A/2$ , он равен

$$S_{\text{max}}^I = |e| \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{1}{6\sqrt{3}A} \quad (2.4)$$

(эти выражения верны в пределе  $A \ll 1$ ). Можно увидеть что меньшим значениям  $A$  соответствует большая чувствительность. Другими словами более симметричная SINIS-структура дает большую чувствительность. Когда  $\Theta \ll E_C^*$  чувствительность практически не зависит от температуры.

В противоположном случае  $E_C > \sqrt{3}E_C^*$  дублетная область частично поглощает интервал I и максимум для нуля температур достигается на границе дублетной области. Это дает чувствительность

$$S_{\text{max}}^I = |e| \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Gamma_N^2}{16E_C^3} \max_{\varphi} \{(E_C^2 - \varepsilon_{\Gamma}^2)^{1/2} \sin \varphi\}. \quad (2.5)$$

Результат сводится к

$$S_{\text{max}}^I = |e| \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Gamma_N^2}{16E_C^2} \quad (2.6)$$

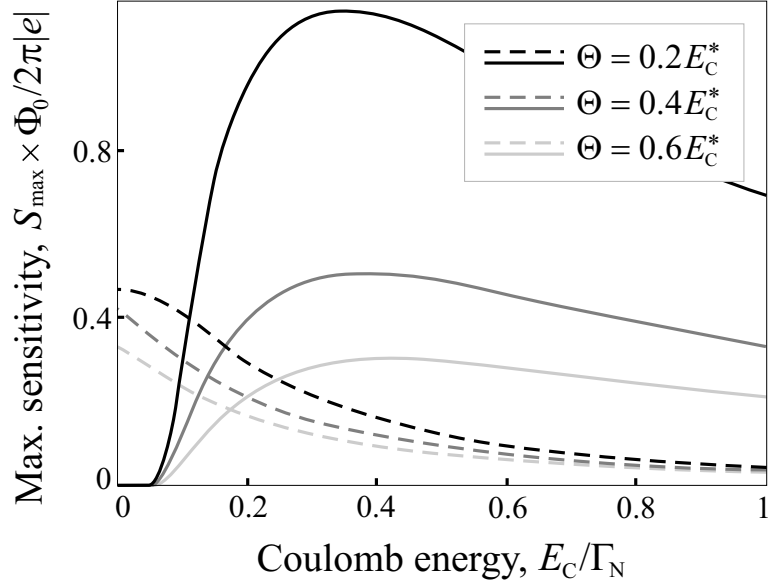


Рис. 2.1: Максимальная чувствительность дифференциальной чувствительности в интервале I  $S_{\max}^I$  (пунктирная линия) и в интервале II  $S_{\max}^{II}$  (сплошная линия) в зависимости от кулоновской энергии  $E_C$ . Уровень асимметрии  $A = 0.2$ , соответствующая критическая кулоновская энергия  $E_C^*/\Gamma_N = 0.1$ . Температура изменяется от  $\Theta = 0.2E_C^*$  до  $\Theta = 0.6E_C^*$ , см. вставку на графике.

в пределе  $E_C \gg \Gamma_N$ . Максимум достигается в точке  $\varepsilon_N + 2E_C = E_C$ ,  $\varphi = \pi/2$ . Заметим что формула (2.6) дает правильную оценку даже для  $E_C \approx \Gamma_N/2$ .

*Интервал II.* При нулевой температуре на границе дублетной области (интервала II) происходит скачок заряда, и поэтому чувствительность в этой точке бесконечна. Конечная температура размывает этот скачок, при этом чувствительность становится конечной. Если  $\Gamma_N \ll E_C \ll \Gamma_N^2/\Theta$  чувствительность  $S$  достигает максимума около точки  $\varepsilon_N + 2E_C = E_C$ ,  $\varphi = \pi/2$  и равна

$$S_{\max}^{II} = |e| \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Gamma_N^2}{64E_C\Theta}.$$

Заметим, что этот максимум при конечной температуре смещен от точки фазового перехода в сторону синглета на величину  $\delta\varphi \sim E_C\Theta/\Gamma_N^2$ . Для произвольных значений  $E_C$  выражение для  $S_{\max}^{II}$  слишком длинное. Мы

изобразили численную зависимость  $S_{\max}^{\text{II}}(E_C)$  на Рис. 2.1. На том же самом графике мы представили максимум чувствительности в интервале I. Можно увидеть, что при большом кулоновском взаимодействии большей чувствительности можно достичь в интервале II.

В реальных наноприборах кулоновское взаимодействие может быть меньше чем  $\Gamma_N$  (см. обсуждения в работах [13, 16]), либо больше [14, 15]. Также второй случай можно реализовать, например, увеличивая уровень Ферми в нормальной области.

## 2.3 Обсуждение

В этой части мы показали, что зависимость заряда андреевской квантовой точки от разницы сверхпроводящих фаз, в принципе, может быть использована для нового типа квантовых магнитометров, которые работают по схеме «магнитный поток  $\rightarrow$  заряд андреевской точки  $\rightarrow$  детектор заряда  $\rightarrow$  ток» вместо обычной схемы по которой работают СКВИДы «магнитный поток  $\rightarrow$  ток». Мы проанализировали чувствительность заряда как функцию магнитного потока, потенциала затвора, кулоновского взаимодействия, асимметрии квантовой точки и температуры.

Чувствительность нашей установки может быть дополнительно увеличена добавлением электромеханического элемента [26]. При таком дополнении приложение большого электрического поля к заряженной нанотрубке приводит к механическому смещению трубки при изменении ее заряда. Это смещение может быть впоследствии обнаружено из-за изменения емкости всей установки [26] или напрямую, наблюдая, например, отклонение луча лазера.

В этой работе мы рассмотрели андреевскую квантовую точку с единственным токовым каналом для демонстрации эффекта. Случай  $n$ -канального провода ( $n = 2$  или  $n > 2$ ) может быть проанализирован с помощью аналогичной техники, и мы планируем рассмотреть его в ближайшее время.



# Литература

- [1] A.A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [2] B.D. Josephson, Physics Letters **1**, 251 (1962).
- [3] D.I. Khomskii and A. Freimuth, Phys. Rev. Lett. **75**, 1384 (1995); G. Blatter *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 566 (1996).
- [4] N.M. Chtchelkatchev and Yu.V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **90**, 226806 (2003).
- [5] M. Büttiker and C.A. Stafford, Phys. Rev. Lett. **76**, 495 (1996).
- [6] P. Singha Deo, P. Koskinen, and M. Manninen, Phys. Rev. B **72**, 155332 (2005).
- [7] C.J. Pethick and H. Smith, Annals of Physics **119**, 133 (1979).
- [8] В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, МЦНМО (2000).
- [9] A.F. Andreev, Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964).
- [10] H. van Houton, Appl. Phys. Lett. **58**, 1326 (1991); G. Wendin and V.S. Shumeiko, Superlattices and Microstructures **20**, 569 (1996);
- [11] D.D. Kuhn, N.M. Chtchelkatchev, G.B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. Rev. B **63**, 054520 (2001).
- [12] M.R. Buitelaar, T. Nussbaumer, and C. Schönenberger, Phys. Rev. Lett. **89**, 256801 (2002).
- [13] P. Jarillo-Herrero, J.A. van Dam, and L.P. Kouwenhoven, Nature **439**, 953 (2006).

- [14] J.A. van Dam, Yu.V. Nazarov, E.P.A.M. Bakkers, *et al.*, *Nature* **442**, 667 (2006).
- [15] J.-P. Cleuziou, W. Wernsdorfer, V. Bouchiat, *et al.*, *Nature nanotechnology* **1**, 53 (2006).
- [16] I.A. Sadovskyy, G.B. Lesovik, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **75**, 195334 (2007).
- [17] N.M. Chtchelkatchev, G.B. Lesovik, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **62**, 3559 (2000).
- [18] A.V. Rozhkov and D.P. Arovas, *Phys. Rev. B* **62**, 6687 (2000).
- [19] D.A. Ivanov and M.V. Feigel'man, *JETP Lett.* **68**, 890 (1998).
- [20] A. Aassime *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3376 (2001).
- [21] J. Clarke, In *Superconductor Applications: SQUIDs and Machines*, ed. by B. B. Schwartz and S. Foner (Plenum Press, New York 1977).
- [22] D. Drung, R. Cantor, M. Peters, *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 406 (1990).
- [23] R. Kleiner, D. Koelle, F. Ludwig, and J. Clarke, *Proceedings of the IEEE*, **92**, 1534 (2004)
- [24] H. Weinstock, Ed. *Applications of Superconductivity Dordrecht*, The Netherlands: Kluwer, (2000).
- [25] J. Clarke and A.I. Braginski, Ed. *SQUID Handbook*, Berlin, Germany: Wiley-VCH (2004).
- [26] R.G. Knobel and A. N. Cleland, *Nature* **424**, 291 (2003).