

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Уравнение Узалея в графене

выпускная квалификационная работа
на степень магистра
Копылова Сергея Викторовича

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Скворцов Михаил Андреевич

Москва, 2008

Оглавление

Введение	3
Электронные свойства графена	3
Кристаллическая решетка. Спектр квазичастиц	3
Функция Грина	4
Примеси	4
Слабая локализация	6
Минимальная проводимость	6
Гибридные системы графен-сверхпроводник	7
Наведенная сверхпроводимость в графене	8
Уравнение Эйленбергера	10
Чистый предел	12
Уравнение Узаделя	13
Минищель	14
Сдвиг E_g за счет изменения геометрии	16
Приложение	18
Список литературы	20

Введение

В последние годы объектом интенсивных исследований в физике стал графен - одноатомный слой графита. Хотя теоретическое изучение этого материала ведется довольно долго, экспериментально он был получен только в 2004 году [1]. Графен проявляет ряд необычных свойств. Во-первых, он представляет из себя истинно двумерную систему, существование которой раньше стояло под вопросом из-за неустойчивости к флуктуациям. Во-вторых, движение электронов в графене описывается уравнением Дирака, а частицы являются безмассовыми. Это позволяет провести аналогию между квантовой электродинамикой и физикой твердого тела. Качественные образцы графена обладают большой подвижностью $\sim 5 \cdot 10^4$ см²/В·с [2], что заметно превышает значение для лучших полупроводниковых гетероструктур. В-третьих, в графене наблюдается необычный полуцелый квантовый эффект Холла, что связано с наличием ненулевой фазы Берри [3]. Кроме того, в дираковской точке проводимость не обращается в нуль, а достигает минимального неуниверсального значения [1]. Здесь мы более подробно рассмотрим основные вопросы, связанные со структурой графена, его проводимостью, типами беспорядка. Также опишем результаты исследования гибридных систем сверхпроводник-графен. В конце работы мы отойдем от темы графена и вычислим изменение минищели в металле за счет изменения геометрии системы.

Электронные свойства графена

1. Кристаллическая решетка. Спектр квазичастиц

Графен состоит из атомов углерода, находящихся в вершинах решетки правильных шестиугольников со стороной $a = 1.42\text{\AA}$. Решетку можно представить в виде совокупности двух решеток Бравэ A и B (рис. 1). В обратном пространстве также образуется шестиугольная решетка и зона Бриллюэна имеет вид правильного шестиугольника со стороной $4\pi/3a$. При этой тройке вершин i,k,m и j,l,n являются эквивалентными. Низкоэнергетические состояния соответствуют окрестностям этих вершин, поэтому удобно говорить про окрестности двух различных точек K и K' . Их окрестности называются долинами. В большинстве эффектов поведение электронов в долинах идентично и приводит лишь к умножению величин на 2. Исключение составляют эффекты долинной поляризации [4] и сверхпроводимость.

Спектр низкочастотных возбуждений хорошо описывается моделью сильной связи [5]. Диагонализация соответствующего гамильтониана дает

$$E(\mathbf{k}) = \pm\alpha|e^{i\mathbf{k}b_1} + e^{i\mathbf{k}b_2} + e^{i\mathbf{k}b_3}| \quad (1)$$

Можно проверить, что волновые векторы, соответствующие точкам K и K' , отвечают энергии $E = 0$. Т.е. графен является полуметаллом - две его зоны ($E > 0$ и $E < 0$) касаются в 1 точке. Линеаризация (1) вблизи дираковских точек дает $E(\mathbf{k}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha a k$, где k - модуль волнового вектора, отсчитанного от одной из точек K, K' . Коэффициент перед импульсом - скорость Ферми $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha a \approx 10^6$ м/с.

Таким образом, низкоэнергетические возбуждения в графене имеют следующую структуру. Все электронные и дырочные состояния имеют волновые вектора вблизи точек K и K' (две долины) и спектр линеен по отклонениям от них $E = \gamma k$. Кроме того, волновая функция содержит 2 компоненты, отвечающие подрешеткам A и B .

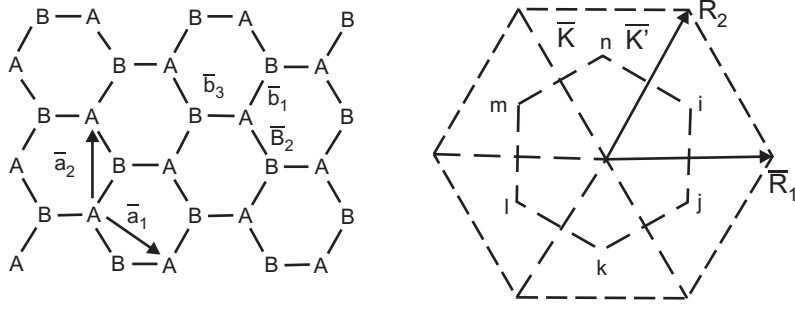


Рис. 1: Кристаллическая решетка и первая зона Бриллюэна [5]

2. Функция Грина

Линеаризованный гамильтониан чистого состояния графена можно записать в виде матрицы 4×4

$$\hat{H}_0 = \gamma \begin{pmatrix} p_x \hat{\sigma}_x + p_y \hat{\sigma}_y & 0 \\ 0 & p_x \hat{\sigma}_x - p_y \hat{\sigma}_y \end{pmatrix}_{KK'} = \gamma(p_x \hat{\sigma}_1 + p_y \hat{\sigma}_2 \hat{\pi}_3) \quad (2)$$

где, $\hat{\sigma}_i$ и $\hat{\pi}_i$ - матрицы Паули в подпространствах AB и KK' соответственно. Функция Грина для такой системы имеет вид

$$\hat{G}_0^R(\mathbf{p}, \varepsilon) = (\varepsilon - \hat{H}_0 + i0)^{-1} = \frac{\varepsilon + \gamma(p_x \hat{\sigma}_1 + p_y \hat{\sigma}_2 \hat{\pi}_3)}{(\varepsilon + i0)^2 - \gamma^2 p^2} \quad (3)$$

Для состояний вблизи поверхности Ферми (3) можно упростить

$$\hat{G}_0^R(\mathbf{p}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \gamma p + i0} \frac{1 + n_x \hat{\sigma}_1 + n_y \hat{\sigma}_2 \hat{\pi}_3}{2} \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/p \quad (4)$$

Последняя формула предполагает, что мы рассматриваем электронные состояния с энергией $\gamma p > 0$. Первый множитель полностью аналогичен функции Грина в нормальном металле, второй описывает подрешеточную и долинную структуру графена.

3. Примеси

Несложное вычисление друдевской проводимости для точечных примесей дает следующий результат

$$\sigma = \frac{4e^2}{h} \varepsilon_F \tau \quad \tau \sim \varepsilon_F^{-1} \quad (5)$$

т.е. проводимость не зависит от количества электронов в системе. В то же время, эксперименты показывают линейную зависимость проводимости от концентрации электронов (рис. 2). Это несоответствие было разрешено в работе [6], где было

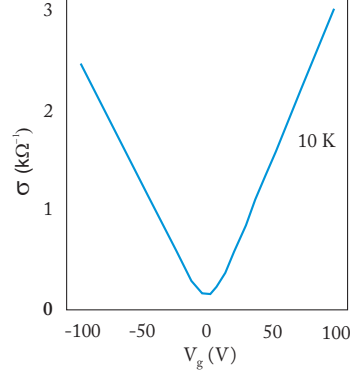


Рис. 2: Зависимость проводимости от напряжения на затворе [1]

предложено рассматривать заряженные примеси в подложке как основной источник беспорядка. В больцмановском приближении проводимость имеет вид

$$\sigma = \frac{4e^2}{h} \varepsilon_F \tau_{tr} \quad \tau_{tr}^{-1} = \frac{\varepsilon_F}{\gamma^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} n_i U^2 \left(2k_F \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right) (1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi) \quad (6)$$

Интеграл в выражении для τ без последнего множителя совпадает с тем, что встречается в обычном выражении для транспортного времени рассеяния. Множитель $(1 + \cos \varphi)$ характерен для графена и возникает в связи с разностью фаз между состояниями на соседних узлах в одной ячейке решетки.

Потенциал кулоновской примеси в импульсном представлении найдем как двумерный Фурье-образ потенциала $U_{imp} = e^2/r$. Он имеет вид $U_{imp}(q) = 2\pi e^2/q$. Однако, наличие электронной плотности приводит к экранировке и потенциал принимает вид

$$U(q) = \frac{U_{imp}(q)}{\varepsilon(q)} \quad \varepsilon(q) = 1 + U_C(q)\Pi(q) \quad (7)$$

где $\varepsilon(q)$ - диэлектрическая проницаемость, $\Pi(q)$ - поляризационный оператор, $U_C(q) = 2\pi e^2/q$ - потенциал электрон-электронного взаимодействия. Поляризационная петля может быть точно найдена на произвольной частоте и импульсе [7]. При $q < 2k_F$ $\Pi(q) = k_F/2\pi\gamma$. Таким образом,

$$U(q) = \frac{2\pi e^2}{q + \alpha k_F} \quad \alpha = \frac{e^2}{\gamma} \quad (8)$$

Подстановка (8) в (6) дает квадратичную зависимость $\sigma \sim k_F^2$. Концентрация электронов также квадратична $n = k_F^2/\pi$, что указывает на совпадение с экспериментом вдали от дираковской точки.

Несмотря на это, описанное вычисление является довольно грубым. Использованное здесь приближение случайных фаз (RPA) предполагает наличие малого параметра

α , который позволяет пренебречь диаграммами, отличными от последовательно соединенных поляризационных петель. Численное значение этого параметра $\alpha \sim 3$. Учет диэлектрической проницаемости подложки уменьшает это число в несколько раз, однако не делает его малым. В то же время, значение этой константы испытывает перенормировку при переходе с малого масштаба a до длины волны λ_F . Есть ряд работ, в которых исследовался этот вопрос [8,9], однако единого мнения так и не было найдено. Независимо от этого, приведенное вычисление является хорошим указанием на основной тип примесей и эта версия является общепризнанной.

Помимо заряженных примесей имеется множество других неосновных видов беспорядка. Многие из них нарушают структурные симметрии графена. Подробное обсуждение возможных примесей приведено в работе [10].

4. Слабая локализация

Слабая локализация является одним из проявлений необычного поведения графена. Экспериментальное исследование интерференционной поправки к проводимости началось с измерений в работе [11]. Результаты абсолютно не соответствовали имевшейся к тому моменту теории. Вычисления показывали [12], что знак поправки зависит от соотношения между количеством примесей разных типов. Однако, в [11] интерференция была существенно подавлена или полностью отсутствовала. В последующей работе [13] зависимость слабой локализации от типов примесей была выяснена более детально. Оказывается, что все типы короткодействующего беспорядка, кроме междолинного рассеяния, подавляют интерференцию. Таким образом, слабая локализация чувствительна не только к процессам дефазировки, но и к упругому рассеянию, нарушающему симметрии графена. Величина междолинного рассеяния существенным образом зависит от способа получения образцов. В работе [11] использовался графен, полученный отслоением от объемного образца графита (exfoliated graphene). В этом случае, слой слабо связан с подложкой и эффекты когерентности подавлены. В экспериментах [14,28] было проведено аналогичное исследование, но уже с образцами из эпитаксиально выращенного графена. Эпитаксиальный графен состоит из нескольких невзаимодействующих слоев, один из которых сильно заряжен, а остальные несут значительно меньший заряд [15]. Было показано, что в таких образцах наблюдается слабая локализация.

Можно показать, что искривление слоя графена аналогично действию случайного магнитного поля, которое разрушает фазовую когерентность. Эпитаксиальный графен, являясь многослойным, менее подвержен этим искривлениям и поэтому демонстрирует эффект.

5. Минимальная проводимость

Проблема минимальной проводимости в графене вызвала огромный интерес и массу публикаций на эту тему. Однако, понимание природы этого эффекта осталось сравнительно скудным.

Согласно классическим представлениям о локализации система переходит из проводящего состояния в изолирующее при $k_F \sim a^{-1}$. Несмотря на это, графен остается проводником при любой концентрации носителей. Минимальное значение проводимости меняется от образца к образцу и остается в пределах $\sigma_{min} = (4 - 8)e^2/h$ [29]. Существенным шагом в понимании состояния графена вблизи дираковской

точки стал эксперимент [16]. С помощью одноэлектронного транзистора размером 100 нм была измерена пространственная зависимость электростатического потенциала. Результаты показали сильную неоднородность состояния. При нулевой средней концентрации электронов образуются электронные и дырочные области ("лужи"), где локальный химпотенциал соответственно больше и меньше нуля. Эта неоднородность не поддается описанию стандартными методами и приводит к возникновению минимальной проводимости. Оценка минимальной проводимости на основе такой модели была проведена в статье [17]. Предложенный вывод проведен в рамках Больцмановской теории и приближения случайных фаз. Было сделано существенное предположение о том, что флуктуации потенциала экранированных заряженных примесей опережают некоторую остаточную плотность носителей, которая и отвечает минимальной проводимости. Хотя результаты работы неплохо согласуются с экспериментом, вывод не представляется верным с точки зрения теории возмущений. Были предприняты попытки найти положительную поправку к проводимости при приближении к дираковской точке более строго и осознать, какие диаграммы описывают этот эффект [18]. Однако, ответ не был найден. Краткое описание полученных результатов приведено в приложении А.

Гибридные системы графен-сверхпроводник

Интерес к системам графен-сверхпроводник был инициирован статьей [19], в которой было показано, что на границе раздела SN помимо обычного Андреевского отражения (когда электрон превращается в дырку и движется по обратной траектории) имеется также зеркальное Андреевское отражение (электрон также превращается в дырку, но отражается зеркально). За этой работой последовал ряд вычислений всевозможных характеристик SN контактов в баллистическом случае. Обзор этих работ дан в статье [20]. Однако, в работе [21] показано, что модель баллистического транспорта не описывает экспериментальные данные. Таким образом, необходимо рассматривать диффузный случай. Единственный шаг в эту сторону был сделан в работе [22], где было написано квазиклассическое уравнение диффузии безотносительно сверхпроводимости. Здесь мы получим уравнение Узаледа [23] для графена, описывающее наведение аномальной функции Грина объемным сверхпроводником.

Для описания эффекта близости в системах графен-сверхпроводник (рис. 3) обычно пользуются следующей моделью [19]. Считают, что в области графена, находящейся под сверхпроводником возникает константа спаривания g и появляется щель Δ . В чистом пределе электронные и дырочные состояния в сверхпроводящем графене описываются уравнениями Боголюбова-де Жена

$$\begin{pmatrix} \hat{H} - \varepsilon_F & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^* & \varepsilon_F - T\hat{H}T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (9)$$

где u и v - электронная и дырочная волновые функции с двумя компонентами соответственно, T - оператор обращения во времени. \hat{H} и $\hat{\Delta}$ - матрицы в пространстве подрешеток. Поскольку суммарный импульс электрон-дырочной пары равен нулю, u и v описывают электрон и дырку из разных долин. Конкретно, $u = (\psi_{AK}, \psi_{BK})$,

$v = (\psi_{AK'}^*, -\psi_{BK'}^*)$. По аналогии с (9) можно записать уравнения для электронов из долины K' и дырок из долины K ,

Мы не будем рассматривать возникновение константы связи в графене. Вместо этого, в соответствии с общепринятым описанием наведенной сверхпроводимости в металле, будем рассматривать наведенную аномальную функцию Грина. Из общих соображений и симметрий определим ее структуру. При таком подходе не возникает проблем описания эффекта близости в свободной части графена - граничные условия представляют собой условие непрерывности полной функции Грина. Будем использовать стандартный формализм [23] для решения задачи.

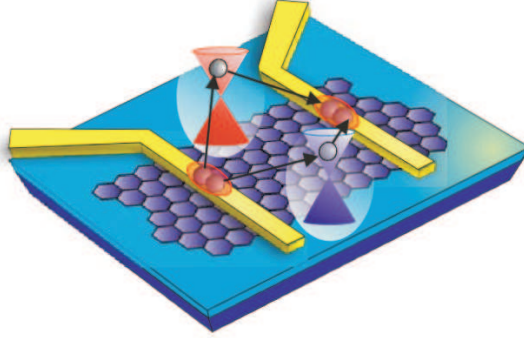


Рис. 3: Структура сверхпроводник-графен-сверхпроводник [24]

Наведенная сверхпроводимость в графене

Волновая функция электрона в графене имеет три индекса - спиновый, долинный и решеточный. Мы будем использовать матрицы Паули в соответствующих подпространствах: $\hat{\sigma}_i$ - подрешетки, $\hat{\pi}_i$ - долины, \hat{s}_i - спины. Гамильтониан графена с примесями имеет вид

$$\hat{H} = \gamma(p_x \hat{\sigma}_1 + p_y \hat{\sigma}_2 \hat{\pi}_3) + \hat{U}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

В использованном ранее базисе неудобно проводить вычисления, поскольку гамильтониан явно зависит от долинного индекса. Перейдем в изотропное по долинам представление [25], совершив поворот в пространстве базисных состояний

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{KA} \\ \psi_{KB} \\ \psi_{K'A} \\ \psi_{K'B} \end{pmatrix} \quad \psi \rightarrow \hat{A}\psi \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Этот поворот делает \hat{H} не зависящим от долин:

$$\hat{H} \rightarrow \gamma(\hat{\sigma}\hat{\mathbf{p}}) + U(\mathbf{r}) \quad (12)$$

Введем функцию Грина в пространстве Намбу

$$\check{G} = \begin{pmatrix} \hat{G} & \hat{F} \\ -\hat{F}^+ & \hat{G} \end{pmatrix}_{ph} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \langle T_\tau \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta^+(x_2) \rangle & \hat{G}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= -\langle T_\tau \psi_\alpha^+(x_1) \psi_\beta(x_2) \rangle = \hat{G}_{\beta\alpha}(x_2, x_1) \\ \hat{F}_{\alpha\beta}^+(x_1, x_2) &= \langle T_\tau \psi_\alpha^+(x_1) \psi_\beta^+(x_2) \rangle & \hat{F}_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \langle T_\tau \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2) \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

В дальнейшем с помощью крышки \hat{X} мы будем обозначать операторы в спиновом, долинном и подрешеточном пространствах. Если же матрица содержит структуру в пространстве Намбу, будем обозначать ее \check{X} .

Поведение функции Грина описывается уравнением Горькова

$$\check{G}^{-1} \check{G} = \check{1} \quad \check{G}^{-1} = \check{\tau}_3 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \check{\mathcal{H}} \quad \check{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \hat{H} & 0 \\ 0 & \hat{H}^+ \end{pmatrix}_{ph} \quad \hat{H}^+ = \hat{H}^{T*} = \hat{H} \quad (15)$$

Из уравнения (14) следуют симметричные свойства аномальной функции Грина:

$$\hat{F}^T(-\mathbf{p}) = -\hat{F}(\mathbf{p}) \quad (\hat{F}^+)^T(-\mathbf{p}) = -\hat{F}^+(\mathbf{p}) \quad (16)$$

Воспользуемся некоторыми физическими соображениями, чтобы определить структуру матрицы $\hat{F}_{\alpha\beta}$. Мы будем исходить из соображений о том, что все симметричные свойства сверхпроводимости должны наследоваться у объемного образца.

1) Полный спин куперовской пары равен 0, как и в обычном сверхпроводнике. Значит, α и β имеют разные спиновые индексы.

2) Суммарный момент куперовской пары равен 0. Это означает, что электроны в паре относятся к разным долинам. Значит, α и β имеют разные долинные индексы.

Здесь существенно сказывается структура графена и возникает так называемая многодолинная сверхпроводимость. Электроны куперовской пары теперь принадлежат разным долинам, из-за чего междолинное рассеяние может оказать существенное влияние на длину когерентности.

3) Между сверхпроводником и графеном помещают слой Ti толщиной ~ 10 нм для улучшения контакта [24]. Поэтому наведенная сверхпроводимость не чувствительна к решеточной структуре графена. Значит, матрица $\hat{F}_{\alpha\beta}$ не зависит от индексов АВ.

4) Долины в графене имеют одинаковую структуру, поэтому матрица $\hat{F}_{\alpha\beta}$ симметрична по долинным индексам.

5) Как мы выясним при выводе уравнения Эйленбергера, структура функции Грина в подпространстве АВ довольно устойчива по отношению к различным возмущениям. Поэтому наведенная аномальная функция Грина будет иметь обычную структуру $(1 + \hat{\sigma}\mathbf{n})$.

Все эти соображения приводят нас к следующей структуре функции F :

$$F = iF_0(\xi_{\mathbf{p}}) \hat{\tau}_1 \hat{s}_2 (1 + \hat{\sigma}\mathbf{n}) \quad (17)$$

Такая структура находится в согласии с работами, где использовалась модель со щелью в графене [19,27].

Приведем некоторые численные оценки, основываясь на работе [24]. Критическая температура сверхпроводника $T_c \sim 1$ К. Измерения проводились в широком диапазоне электронных концентраций. Максимальные напряжения на затворе соответствуют значениям произведения $\varepsilon_F \tau \sim 20$ и $\varepsilon_F \sim 10^3$ К.

Зависимость от химпотенциала можно учесть, сделав замену $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \varepsilon_F$. В дльнейших расчетах мы предполагаем, что ε_F - наибольший масштаб в задаче, т.е. заметно превышает критическую температуру T_c , силу беспорядка $1/\tau$. Эта область соответствует линейной области зависимости проводимости σ от концентрации n и хорошо описывается квазиклассикой. Наиболее интересной представляется область в окрестности дираковской точки. Однако имеются серьезные препятствия к ее описанию: 1) Те же проблемы, что и с вычислением минимальной проводимости; 2) Наша модель с самого начала использует явную структуру аномальной части, хотя написанная в АВ матрица описывает только большие концентрации. Итак, мы работаем в пределе $\varepsilon_F \gg T_c, 1/\tau$.

Однородная функция Грина

$$\check{G}(\mathbf{p}) = \left[-i\omega_n \check{\tau}_3 + \hat{H}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F \right]^{-1} \quad (18)$$

При больших ε_F

$$\check{G}(\mathbf{p}) = \frac{i\omega_n \check{\tau}_3 + \xi_{\mathbf{p}}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2} \frac{1 + (\hat{\sigma}\mathbf{n})}{2} \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/p \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad (19)$$

Первый множитель в (19) имеет типичный вид для функции Грина. Множитель $1/2$ возникает из-за нормировки и наличия двух долин, а структура в подпространстве АВ $[1 + (\hat{\sigma}\mathbf{n})]$ совпадает со структурой в нормальном состоянии графена.

Уравнение Эйленбергера

В пространственно-неоднородной задаче необходимо рассматривать функции Грина от обоих радиус-векторов, а не только от их разности. В импульсном представлении произведение функций записывается в виде свертки

$$(\hat{A} \circ \hat{B})_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = \int \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \hat{A}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}') \hat{B}(\mathbf{p}', \mathbf{p}_2) \quad [\hat{A} \circ \hat{B}] = \hat{A} \circ \hat{B} - \hat{B} \circ \hat{A} \quad (20)$$

Мы будем проводить вычисление в квазиклассическом приближении. Условие его применимости $\varepsilon_F \gg T_c$ (в чистом пределе). Это означает, что движение центра масс куперовской пары происходит значительно медленнее, чем относительное движение электронов. Чтобы явно разделить масштабы, перейдем в импульсное представление

$$\hat{A}_W(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \hat{A}(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2, \mathbf{p} - \mathbf{k}/2) \quad (21)$$

Тогда

$$(\hat{A} \circ \hat{B})_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = \int \frac{d^2 k'}{(2\pi)^2} \hat{A}_W(\mathbf{p}, \mathbf{k}') \hat{B}_W(\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (22)$$

Запишем уравнения Горькова

$$(\check{G}^{-1} \circ \check{G})_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = \check{1} \delta(\mathbf{k}) \quad (\check{G} \circ \check{G}^{-1})_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} = \check{1} \delta(\mathbf{k}) \quad (23)$$

Здесь

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = (-i\omega_n \check{\tau}_3 + \hat{H}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F) \delta(\mathbf{k}) - \check{\Sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \quad (24)$$

В графене главную роль играют экранированные заряженные примеси в подложке. Коррелятор случайного потенциала имеет вид

$$W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle \quad W(k) = \frac{\eta}{(k + \alpha k_F)^2} \quad (25)$$

Собственно-энергетическая часть в Борновском приближении

$$\check{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} W(p) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (26)$$

В импульсном представлении

$$\check{\Sigma}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \int d^2 r_1 d^2 r_2 \check{\Sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2} = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} W(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) \check{G}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \quad (27)$$

Вычитая друг из друга уравнения (23), получаем

$$\hat{H}(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2) \check{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - \check{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \hat{H}(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) - i\omega_n [\check{\tau}_3, \check{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k})] = [\check{\Sigma} \circ \check{G}]_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \quad (28)$$

Проинтегрируем уравнение по $\xi_{\mathbf{p}}$ и запишем его с помощью квазиклассической функции Грина

$$\check{g}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \int \frac{d\xi_{\mathbf{p}}}{\pi i} \check{G}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \quad (29)$$

Из (19) и (29) для однородного состояния находим

$$\check{g}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \hat{\tau}_3 \operatorname{sgn} \omega_n \frac{1 + (\hat{\sigma} \mathbf{n})}{2} \quad (30)$$

Окончательно, уравнение Эйленберга имеет вид

$$\hat{H}(\mathbf{p}_F + \mathbf{k}/2) \check{g}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) - \check{g}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \hat{H}(\mathbf{p}_F - \mathbf{k}/2) - i\omega_n [\check{\tau}_3, \check{g}(\mathbf{n}, \mathbf{k})] = [\check{\Sigma} \circ \check{g}]_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} \quad (31)$$

где

$$\check{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \frac{ik_F}{2\gamma} \int \frac{d\varphi_q}{2\pi} W(|\mathbf{p}_F - \mathbf{q}_F|) \check{g}(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{k}) \quad (32)$$

Чистый предел

В чистом случае $T_c\tau \gg 1$ уравнение (31) имеет вид

$$\varepsilon_F[(\hat{\sigma}\mathbf{n}), \check{g}] + \frac{\gamma}{2} \{(\hat{\sigma}\mathbf{k}), \check{g}\} - [i\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}] = 0 \quad (33)$$

где $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. В отличие от уравнения Эйленбергера в случае обычного сверхпроводника (металла), здесь имеется слагаемое с большим множителем ε_F . Величина остальных слагаемых имеет порядок величины T_c , поэтому некоторые компоненты матрицы \check{g} будут подавлены. Мы не будем рассматривать эти компоненты и уравнения, в которых они играют существенную роль (т.е. входят в уравнение с множителем ε_F). Введем компоненты \check{g}_i :

$$\check{g} = \check{g}_0 + (\hat{\sigma}\check{\mathbf{g}}) \quad \check{\mathbf{g}} = (\check{g}_1, \check{g}_2, \check{g}_3) \quad (34)$$

Перейдем в координатное представление

$$\begin{cases} \gamma \nabla \check{\mathbf{g}} + [\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}_0] = 0 & \text{(I)} \\ -2\varepsilon_F(\mathbf{n} \times \check{\mathbf{g}}) + \gamma \nabla \check{g}_0 + [\omega_n \check{\tau}_3, \check{\mathbf{g}}] = 0 & \text{(II)} \end{cases} \quad (35)$$

Из-за большого множителя ε_F в первом слагаемом уравнения (35.II) величины \check{g}_3 и $n_x \check{g}_2 - n_y \check{g}_1$ имеют малые значения ($\sim T_c/\varepsilon_F$). Пренебрегая ими получаем

$$\check{g} = \check{g}_0 + \check{g}_s(\hat{\sigma}\mathbf{n}) \quad (36)$$

Подставляя (36) в (35.I) и $\mathbf{n} \cdot (35.II) = 0$ получаем уравнения Эйленбергера

$$\begin{cases} -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)\check{g}_s - [i\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}_0] = 0 & \text{(I)} \\ -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)\check{g}_0 - [i\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}_s] = 0 & \text{(II)} \end{cases} \quad (37)$$

Чтобы получить условие нормировки запишем следующие уравнения

$$\begin{cases} \{\check{g}_0, (35.I)\} + \{\check{\mathbf{g}}, (35.II)\} = 0 & \left\{ \begin{array}{l} -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)(\check{g}_0\check{g}_s + \check{g}_s\check{g}_0) - [i\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}_0^2 + \check{g}_s^2] = 0 \\ -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)(\check{g}_0^2 + \check{g}_s^2) - [i\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}_0\check{g}_s + \check{g}_s\check{g}_0] = 0 \end{array} \right. \end{cases} \quad (38)$$

Поскольку комбинации $\check{g}_0\check{g}_s + \check{g}_s\check{g}_0$, $\check{g}_0^2 + \check{g}_s^2$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и \check{g}_0 , \check{g}_s , то их можно представить в виде

$$\check{g}_0\check{g}_s + \check{g}_s\check{g}_0 = a_1 \check{1} + b_1 \check{g}_0 + c_1 \check{g}_s \quad \check{g}_0^2 + \check{g}_s^2 = a_2 \check{1} + b_2 \check{g}_0 + c_2 \check{g}_s \quad (39)$$

Константы a_i, b_i, c_i можно найти используя функцию Грина однородного состояния (30) (например, вдали от перехода SN)

$$\check{g}_0 = \check{g}_s \quad \check{g}_0^2 = \frac{1}{4} \quad \check{g}_0\check{g}_s + \check{g}_s\check{g}_0 = \frac{1}{2} \quad \check{g}_0^2 + \check{g}_s^2 = \frac{1}{2} \quad (40)$$

Отсюда делаем вывод, что $a_i = 1/2$, $b_i = 0$, $c_i = 0$. Значит, условие нормировки (40) описывает и неоднородное состояние. Таким образом,

$$\check{g} = \check{g}_0[1 + (\hat{\sigma}\mathbf{n})] \quad -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)\check{g}_0 - [i\omega_n \check{\tau}_3, \check{g}_0] = 0 \quad (41)$$

Уравнение (41) совпадает с уравнением Эйленберга в обычном сверхпроводнике. Особенность графена проявляется в дополнительной подрешеточной структуре $[1 + (\hat{\sigma}\mathbf{n})]$, отклонения от которой подавлены малым параметром T_c/ε_F .

В процессе вычисления мы пренебрегли вкладами в функцию Грина, которые нарушают структуру $[1 + (\hat{\sigma}\mathbf{n})]$. Эти вклады подавлены малым множителем T_c/ε_F . Таким образом, подрешеточная структура функции Грина устойчива по отношению к различным возмущениям.

Уравнение Узделя

Теперь рассмотрим грязный предел $T_c\tau \ll 1$. Это условие указывает на то, что длина свободного пробега мала по сравнению с длиной когерентности. В этом случае уравнение (31) можно упростить и получить уравнение Узделя [26].

Как и в чистом случае, будем работать с функцией Грина в виде (36). Из (32) следует, что собственно-энергетическая часть может быть представлена в виде

$$\check{\Sigma} = \check{\Sigma}_0 + \check{\Sigma}_i \hat{\sigma}_i \quad i = 1, 2 \quad (42)$$

Получим условие нормировки в грязном пределе. Уравнения Эйленберга (37) перепишутся в виде

$$\begin{cases} -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)\check{g}_s - [i\omega_n\check{\tau}_3, \check{g}_0] = [\check{\Sigma}_0, \check{g}_0] + [n_i\check{\Sigma}_i, \check{g}_s] & \text{(I)} \\ -i\gamma(\mathbf{n}\nabla)\check{g}_0 - [i\omega_n\check{\tau}_3, \check{g}_s] = [\check{\Sigma}_0, \check{g}_s] + [n_i\check{\Sigma}_i, \check{g}_0] & \text{(II)} \end{cases} \quad (43)$$

Прделаем те же преобразования над уравнениями (43), что и в (38). Новые уравнения получаются из (43) заменой $\check{g}_0 \rightarrow \check{g}_0^2 + \check{g}_s^2$, $\check{g}_s \rightarrow \check{g}_0\check{g}_s + \check{g}_s\check{g}_0$. Следовательно, условие нормировки то же, что и в чистом пределе:

$$\check{g}_0 = \check{g}_s \quad \check{g}_0^2 = \frac{1}{4} \quad (44)$$

Будем искать зависимость \check{g}_0 от \mathbf{n} в виде

$$\check{g}_0 = \langle \check{g}_0 \rangle + (\delta\check{g}_0\mathbf{n}) \quad (45)$$

Второе слагаемое в выражении для \check{g}_0 мы рассматриваем как поправку к ведущему среднему. Линеаризованное условие нормировки

$$\langle \check{g}_0 \rangle^2 = \frac{1}{4} \quad \{ \langle \check{g}_0 \rangle, \delta\check{g}_0 \} = 0 \quad (46)$$

Сначала мы усредняем (43) по направлениям \mathbf{n} , а затем делаем тоже самое с \mathbf{n} . (43)

$$\begin{cases} -\frac{i\gamma}{2}\nabla\delta\check{g}_0 - [i\omega_n\check{\tau}_3, \langle \check{g}_0 \rangle] = [\langle \check{\Sigma}_0 \rangle_{\mathbf{n}}, \langle \check{g}_0 \rangle] + [\langle n_i\check{\Sigma}_i \rangle_{\mathbf{n}}, \langle \check{g}_0 \rangle] & \text{(I)} \\ -\frac{i\gamma}{2}\nabla_i \langle \check{g}_0 \rangle - [i\omega_n\check{\tau}_3, \delta\check{g}_{0i}] = [\langle n_i\check{\Sigma}_0 \rangle_{\mathbf{n}}, \langle \check{g}_0 \rangle] + [\langle n_i n_j \check{\Sigma}_0 \rangle_{\mathbf{n}}, \delta\check{g}_{0j}] + \\ [\langle n_i n_j \check{\Sigma}_j \rangle_{\mathbf{n}}, \langle \check{g}_0 \rangle] + [\langle n_i n_j n_k \check{\Sigma}_j \rangle_{\mathbf{n}}, \delta\check{g}_{0j}] & \text{(II)} \end{cases} \quad (47)$$

В (47.И) можно пренебречь коммутатором в левой части. Вычислим средние по углам от комбинаций с собственно-энергетической частью. Из шести средних первое, второе, четвертое и шестое могут быть найдены в главном порядке (пренебрегая $\delta\check{\mathbf{g}}$).

$$\langle\check{\Sigma}_0\rangle_{\mathbf{n}} = \frac{ik_F}{2\gamma} \langle\langle W\rangle_{\mathbf{n}}\check{g}_0\rangle_{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{ik_FW_0}{2\gamma} \langle\check{g}_0\rangle_{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{ik_FW_0}{2\gamma} \langle\check{g}_0\rangle \quad (48)$$

$$\langle n_i\check{\Sigma}_i\rangle_{\mathbf{n}} = \frac{ik_F}{2\gamma} \langle n_i W \hat{\mathbf{q}}_i \langle\check{g}_0\rangle_{\mathbf{n},\hat{\mathbf{q}}} = \frac{ik_FW_1}{2\gamma} \langle\hat{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i\rangle_{\hat{\mathbf{q}}} \langle\check{g}_0\rangle = \frac{ik_FW_1}{2\gamma} \langle\check{g}_0\rangle \quad (49)$$

$$\langle n_i\check{\Sigma}_0\rangle_{\mathbf{n}} = \frac{ik_F}{2\gamma} \langle n_i W \hat{\mathbf{q}}_j \rangle_{\mathbf{n},\hat{\mathbf{q}}} \delta\check{\mathbf{g}}_j = \frac{ik_FW_1}{2\gamma} \langle\hat{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_j\rangle_{\hat{\mathbf{q}}} \delta\check{\mathbf{g}}_{0j} = \frac{ik_FW_1}{4\gamma} \delta\check{\mathbf{g}}_{0i} \quad (50)$$

$$\langle n_i n_j \check{\Sigma}_0 \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{ik_FW_0}{4\gamma} \langle\check{g}_0\rangle \delta_{ij} \quad \langle n_i n_j n_k \check{\Sigma}_j \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{ik_FW_1}{4\gamma} \langle\check{g}_0\rangle \delta_{ik} \quad (51)$$

$$\langle n_i n_j \check{\Sigma}_j \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{ik_F(W_0 + W_2)}{8\gamma} \delta\check{\mathbf{g}}_{0i} \quad (52)$$

Таким образом, уравнения (47) принимают вид

$$\begin{cases} -\frac{i\gamma}{2} \nabla \delta\check{\mathbf{g}}_0 - [i\omega_n \check{\tau}_3, \langle\check{g}_0\rangle] = 0 & \text{(I)} \\ -\frac{i\gamma}{2} \nabla \langle\check{g}_0\rangle = \frac{ik_F(W_0 - W_2)}{8\gamma} [\langle\check{g}_0\rangle, \delta\check{\mathbf{g}}_0] & \text{(II)} \end{cases} \quad (53)$$

где $W_l = \langle W(2k_F |\sin \frac{\varphi}{2}|) \cos(l\varphi) \rangle_{\varphi}$. Отсюда

$$\delta\check{\mathbf{g}}_0 = -4l_{tr} \langle\check{g}_0\rangle \nabla \langle\check{g}_0\rangle \quad l_{tr} = \gamma\tau_{tr} \quad (54)$$

где τ_{tr} определено в (6). Наконец, получаем уравнение Узаделя

$$iD\nabla (\langle\check{g}_0\rangle \nabla \langle\check{g}_0\rangle) - [i\omega_n \check{\tau}_3, \langle\check{g}_0\rangle] = 0 \quad (55)$$

Здесь $D = 4 \cdot (\gamma l_{tr}/2)$ - коэффициент диффузии. Видим, что уравнение имеет стандартный вид, но написано для независимой от подрешеток части \check{g} .

Минищель

Взаимодействие металла и сверхпроводника называется эффектом близости. Его проявление приводит к подавлению параметра порядка сверхпроводника вблизи SN границы. В нормальном металле параметр порядка отсутствует. Однако, контакт со сверхпроводником наводит в металл аномальную функцию Грина, которая убывает по мере удаления от SN границы. Кроме того, в металле появляется так называемая минищель - область энергий с нулевой плотностью состояний. Эффект близости описывается уравнением Узаделя, которое в случае обычного сверхпроводника записывается в виде

$$D\nabla(\check{g}\nabla\check{g}) + [iE\check{\tau}_3 - \Delta\check{\tau}_1, \check{g}] = 0 \quad \check{g}^2 = 1 \quad (56)$$

Параметризуя квазиклассическую функцию Грина

$$\check{g} = \check{\tau}_3 \cos \theta + \check{\tau}_1 \sin \theta \quad (57)$$

приходим к уравнению

$$D\nabla^2\theta + 2iE \sin \theta + 2\Delta \cos \theta = 0 \quad (58)$$

Мы будем изучать состояние металла, поэтому в дальнейшем считаем $\Delta = 0$. Для нахождения плотности состояний удобно произведем замену переменных $\theta = \pi/2 + i\psi$. Она позволяет свести задачу к вещественной, что существенно упрощает дело. Окончательно, уравнение принимает вид

$$D\nabla^2\psi + 2E \operatorname{ch} \psi = 0 \quad (59)$$

Будем предполагать, что контакт сверхпроводник-металл идеальный. На его границе $\psi = 0$. На свободной границе условие имеет вид $\nabla_{\mathbf{n}}\psi = 0$.

Нелинейное уравнение (59) с указанными граничными условиями для нашей системы обладает следующими свойствами. Существует пороговое значение энергии $E = E_g$ такое, что:

1) При $E < E_g$ уравнение имеет два вещественных решения, которые приближаются друг к другу при $E \rightarrow E_g$;

2) При $E = E_g$ уравнение имеет единственное решение;

3) При $E > E_g$ имеется два комплекснозначных решения.

Плотность состояний вычисляется по формуле

$$\rho(E, \mathbf{r}) = \nu \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\check{\tau}_3 \check{g}) = 2\nu \operatorname{Re}(\cos \theta) = 2\nu \operatorname{Im}(\operatorname{sh} \psi) \quad (60)$$

Удобство использования ψ вместо θ заключается в том, что вопрос об обращении плотности состояний в нуль сводится к вопросу вещественности ψ . Таким образом, при энергиях $E < E_g$ плотность состояний обращается в нуль - образуется таулессовская щель. В случае плоского SNS контакта пороговая энергия $E_g = 3.12E_{Th} = 3.12D/L^2$, где L - длина контакта [30,31].

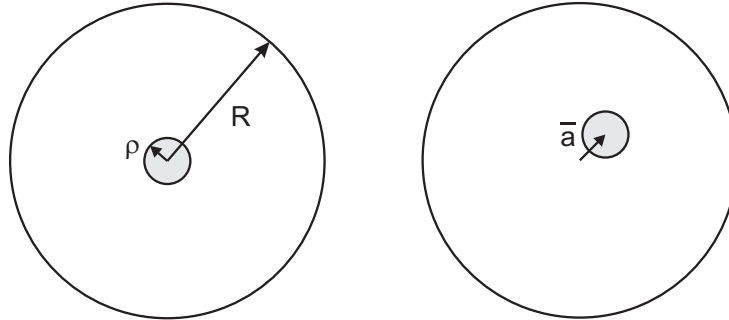


Рис. 4: Сдвиг сверхпроводящего островка

Сдвиг E_g за счет изменения геометрии

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется плоский металлический диск радиуса R и на нем концентрически расположен небольшой сверхпроводящий островок радиусом $\rho \ll R$ (рис. 4). Теперь островок немного смещают на расстояние $a \ll R$, что приводит к небольшому изменению минищели. Поставим задачу найти эту минищель E'_g .

В случае концентрических островка и диска задача сводится к одномерной и вопрос о щели может быть легко решен численным моделированием. После сдвига задача становится двумерной и уже не поддается такому простому решению. Будем считать, что нам известна минищель E_g в симметричной задаче. Построим теорию возмущений для нахождения E'_g . Дальнейшее вычисление не привязано к наличию концентрических островков, а применимо к любой геометрии.

Напишем действие для металлической части системы.

$$S[\theta] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} [D(\nabla\theta)^2 + 4iE \cos \theta] \quad (61)$$

Пусть \mathbf{r}' - система координат, описывавшая систему до изменения, а \mathbf{r} - после. Будем работать в системе координат \mathbf{r}' . Переход от \mathbf{r} к \mathbf{r}' описывается метрическим тензором

$$g_{ij} = \frac{\partial r_l}{\partial r'_i} \frac{\partial r_l}{\partial r'_j} \quad (62)$$

В новых координатах элемент площади имеет вид $\sqrt{|g|}d^2\mathbf{r}'$, а произведение векторов $g_{ij}A_iB_j$. Здесь $|g| = 1/\det(g_{ij})$. Начиная с этого места мы не будем писать штрих у радиус-вектора \mathbf{r}' . Действие принимает вид

$$S[\theta] = \frac{\pi\nu}{4} \int \sqrt{|g|}d\mathbf{r} [g_{ij}D\nabla_i\theta\nabla_j\theta + 4iE \cos \theta] \quad (63)$$

Переходя к функции ψ получаем

$$S[\psi] = \frac{\pi\nu}{4} \int \sqrt{g}d\mathbf{r} [-Dg_{ij}\nabla_i\psi\nabla_j\psi + 4E\text{sh } \psi] \quad (64)$$

Пользуясь критерием определения E_g через количество решений уравнения Узаделя, найдем сдвиг $E'_g - E_g$. Представим $S[\psi]$ в удобном для теории возмущений виде:

$$S[\psi] = S_0[\psi] + \Omega[\psi] \quad S_0[\psi] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} [-D(\nabla\psi)^2 + 4E_g\text{sh } \psi]$$

$$\Omega[\psi] = \Pi[\psi] + (E - E_g)C[\psi] \quad C[\psi] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} 4\text{sh } \psi$$

$$\Pi[\psi] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left([2\delta_{ij} - \sqrt{|g|} - g_{ij}]D\nabla_i\psi\nabla_j\psi + (\sqrt{|g|} - 1)4E_g\text{sh } \psi \right) \quad (65)$$

Введем функцию $\psi_0(\mathbf{r})$, минимизирующую действие $S_0[\psi]$. Она определяется из уравнения Узаделя:

$$D\nabla^2\psi_0 + 2E_g\text{ch } \psi_0 = 0 \quad (66)$$

Пусть энергия E близка к пороговой $E_g - E \ll E_g$ и метрика g_{ij} слабо отличается от единичной δ_{ij} . Тогда основной вклад в функциональные интегралы по $\psi(\mathbf{r})$ будут определяться близкими к ψ_0 функциями:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + h(\mathbf{r}) \quad (67)$$

Разложим действие $S[\psi]$ по степеням h ($\Omega' = \delta\Omega/\delta\psi$, $\Omega'' = \delta^2\Omega/\delta\psi^2$):

$$S[\psi_0 + h] = \text{const} + \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left[h(D\nabla^2 h + 2E_g \text{sh } \psi_0 h) + \frac{2}{3} E_g \text{ch } \psi_0 h^3 + \Omega' h + \frac{1}{2} h \Omega'' h \right] \quad (68)$$

Разложим $h(\mathbf{r})$ по собственным функциям оператора $D\nabla^2 + 2E_g \text{sh } \psi_0$:

$$h = \sum_n h_n \phi_n \quad D\nabla^2 h_n + 2E_g \text{sh } \psi_0 h_n = \lambda_n h_n \quad (69)$$

Среди решений ϕ_n имеется нулевая мода ϕ_0 с собственным значением $\lambda_0 = 0$. Остальные моды массивны $\lambda_n > 0$. Теперь функционал $S[\psi_0 + h]$ будет функцией набора переменных h_n :

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\psi_0 + h] - S[\psi_0] = \\ &= \frac{\pi\nu}{4} \left[h_0^3 \left\langle \frac{2}{3} E_g \text{ch } \psi_0 \phi_0^3 \right\rangle + \sum_{m,n \geq 0} \left\{ \lambda_n h_n^2 \langle \phi_n^2 \rangle + h_n \langle \Omega' \phi_n \rangle + \frac{h_m h_n}{2} \langle \phi_m \Omega'' \phi_n \rangle \right\} \right] \quad (70) \end{aligned}$$

Здесь усреднение означает интегрирование по пространству. Нормируем функции ϕ_n так, что $\langle \phi_n^2 \rangle = 1$. Произведем интегрирование по массивным модам. Члены $\lambda_n h_n^2$ определяют среднее значение h_n . Поскольку Ω - малое возмущение, то не будем учитывать последний член в фигурных скобках в (70) при $m, n > 0$. Используя также симметрию Ω'' получаем

$$\delta S = \frac{\pi\nu}{4} \left[h_0 \langle \Omega' \phi_0 \rangle + h_0^3 \left\langle \frac{2}{3} E_g \text{ch } \psi_0 \phi_0^3 \right\rangle + \sum_{n>0} \left\{ \lambda_n h_n^2 + h_n \langle \Omega' \phi_n \rangle + h_0 h_n \langle \phi_n \Omega'' \phi_0 \rangle \right\} \right] \quad (71)$$

Производя интегрирование по h_n и отбрасывая малые члены с h_0^2 , приходим к действию для h_0

$$\delta S = \frac{\pi\nu}{4} \left[h_0 \langle \Omega' \phi_0 \rangle - \sum_{n>0} \frac{h_0}{2\lambda_n} \langle \Omega' \phi_n \rangle \langle \phi_n \Omega'' \phi_0 \rangle + h_0^3 \left\langle \frac{2}{3} E_g \text{ch } \psi_0 \phi_0^3 \right\rangle \right] \quad (72)$$

Условие минимальности действия $d(\delta S)/dh_0 = 0$ приводит к уравнению

$$h_0^2 \langle 2E_g \text{ch } \psi_0 \phi_0^3 \rangle = \sum_{n>0} \frac{\langle \Omega' \phi_n \rangle \langle \phi_n \Omega'' \phi_0 \rangle}{2\lambda_n} - \langle \Omega' \phi_0 \rangle \quad (73)$$

Среднее в левой части всегда положительно. Если правая часть положительна, то уравнение имеет 2 решения, что отвечает энергии под щелью. Если же больше, то решений нет и энергия больше пороговой энергии. Правая часть обращается в нуль при $E = E'_g$, что и позволяет нам найти эту энергию.

Мы пренебрегаем членами $C[\psi]$ в сумме и получаем результат

$$E'_g - E_g = \frac{1}{\langle C' \phi_0 \rangle} \left\{ \sum_{n>0} \frac{\langle \Omega' \phi_n \rangle \langle \phi_n \Omega'' \phi_0 \rangle}{2\lambda_n} - \langle \Pi' \phi_0 \rangle \right\} \quad (74)$$

Здесь

$$C' = \frac{\pi\nu}{4} \text{ch } \psi_0 \quad \Pi' = \frac{\pi\nu}{4} 2D \left\{ (g_{ij} - \delta_{ij}) \nabla_i \nabla_j \psi_0 - \nabla_j (\delta_{ij} \sqrt{|g|} + g_{ij}) \nabla_i \psi_0 \right\} \quad (75)$$

Таким образом, зная собственные функции и собственные значения (69) можно вычислить изменение минищели за счет изменения геометрии.

Приложение

В попытках объяснить существование минимальной проводимости графена была рассмотрена следующая задача. Пусть имеется обычный двумерный металл с экранированными дальнедействующими примесями. Коррелятор случайного потенциала

$$\langle u(\mathbf{r})u(\mathbf{r}') \rangle = W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad W(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} W(r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad (A1)$$

Мы не будем рассматривать конкретный вид коррелятора и проведем вычисление для общего случая. Относительно $W(\mathbf{q})$ будем предполагать, что функция не расходится при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ (следствие экранировки) и затухает на масштабе αk_F , где α - параметр экранировки. Случай $\alpha \sim 1$ соответствует короткодействующим примесям и хорошо описывается транспортным временем

$$\frac{1}{\tau_{tr}} = 2\pi\nu \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} W(2k_F \sin \frac{\varphi}{2}) (1 - \cos \varphi) \quad (A2)$$

Здесь мы рассмотрим случай $\alpha \ll 1$. Уравнение (A2) дает значение проводимости $\sigma_0 = (e^2/h)\varepsilon_F\tau_0/\alpha$, $\tau_0 = 4\alpha\varepsilon_F/\gamma$. Благодаря малому параметру α проводимость может быть вычислена в более широком диапазоне значений ε_F , чем удается обычно. Существует 2 основных режима, в которых удается провести вычисления:

1) $\varepsilon_F\tau_0 \gg \alpha^{-1}$. Режим больших электронных плотностей. В этом пределе энергия $\sim \alpha\varepsilon_F$, передаваемая по примесной линии, велика по сравнению с размытием Ферми-сферы $1/\tau$. Диаграммы с пересечением малы по параметру $\beta^{-1} = (\alpha\varepsilon_F\tau_0)^{-1}$. Можно было бы ожидать, что поправка в проводимость будет иметь порядок $\sigma_0/\beta \sim (e^2/h)/\alpha^2$, что объяснило бы минимальную проводимость. Однако, такая поправка отсутствует. Наличие поправок второго порядка $\alpha\sigma_0/\beta \sim \alpha^{-1}$ не проверялось. Слаболокализационная поправка имеет стандартный вид.

2) $\alpha^{-1} \gg \varepsilon_F\tau_0 \gg \alpha$. Режим малых электронных плотностей. В этом режиме спектр системы существенно перенормируется. Размытие Ферми-поверхности имеет порядок $\sqrt{\frac{\alpha\varepsilon_F}{\tau_0} \ln \frac{1}{\alpha\varepsilon_F\tau_0}} \ll \frac{1}{\tau_0}$. Малым параметром, по которому ведется вычисление, является $\ln \frac{1}{\alpha\varepsilon_F\tau_0}$. Порядок величины диаграммы определяется только порядком

теории возмущений и нет подавления диаграмм с пересечением. Более того, значение диаграмм не убывает с ростом их порядка. В такой ситуации необходимо учитывать все диаграммы, независимо от пересечений. В рассматриваемой задаче это удастся сделать. Однако, результат оказывается обычным - в главном порядке проводимость описывается формулой Друде. Значит, квазиклассическая теория рассеяния дает довольно устойчивый результат, который возможно нарушается лишь при очень малых заполнениях.

Поскольку вычисления для обычного металла и графена довольно схожи, нет причин ожидать качественно других результатов для последнего. Таким образом, попытка найти поправку к проводимости, объясняющую минимальную проводимость осталась безрезультатной.

Список литературы

- [1] K.S.Novoselov, A.K.Geim et al., Nature **438**, 197 (2005)
- [2] H.L.Stormer, P.Kim et al., Phys.Rev.Lett. **96**, 136806 (2006)
- [3] H.L.Stormer, P.Kim et al., Nature **438**, 201 (2005)
- [4] A.R.Akhmerov, C.W.J.Beenakker, Phys.Rev.Lett. **98**, 157003 (2007)
- [5] G.W.Semenoff, Phys.Rev.Lett. **53**, 2449 (1984)
- [6] K.Nomura, A.H.MacDonald, Phys.rev.Lett. **96**, 256602 (2006)
- [7] E.H.Hwang, S.Das Sarma, Phys.Rev.B **75**, 205418 (2007)
- [8] E.G.Mishchenko, cond-mat/0709.4245 (2007)
- [9] D.M.Basko, I.L.Aleiner, Phys.Rev.B **77**, 041409R (2008)
- [10] A.H.Castro Neto, K.S.Novoselov et al., cond-mat/0709.1163 (2007)
- [11] K.S.Novoselov, S.V.Morozov et a., Phys.Rev.Lett. **97**, 016801 (2006)
- [12] D.V.Khveshchenko, Phys.Rev.Lett. **97**, 036802 (2006)
- [13] V.Fal'ko, B.L.Altshuler et al., Phys.Rev.Lett. **97**, 146805 (2006)
- [14] A.K.Savchenko, F.V.Tikhonenko et al., Phys.Rev.Lett. **100**, 056802 (2008)
- [15] W.A.de Heer, X.Wu et al., Solid State Comm. **143**, 92 (2007)
- [16] J.Martin, N.Akerman et al., Nature Physics **4**, 144 (2008)
- [17] S.Das Sarma, V.Galitski et al., Proc.Natl.Acad.Sci.USA **104**, 18392 (2007)
- [18] S.V.Kopylov, M.A.Skvortsov, unpublished
- [19] C.W.J.Beenakker, Phys.Rev.Lett. **97**, 067007 (2006)
- [20] C.W.J.Beenakker, cond-mat/0710.3848 (2007)
- [21] I.Skachko, E.Y.Andrey, Phys.Rev.B **77**, 184507 (2008)
- [22] V.I.Falko, O.Kashuba et al., cond-mat/0801.2394 (2008)
- [23] N.B.Kopnin, Theory of Nonequilibrium Superconductivity (2001)
- [24] H.B.Heersche et al., Nature **446**, 56 (2007)
- [25] A.R.Akhmerov, C.W.J.Beenakker, Phys.Rev.B **77**, 085423 (2008)
- [26] K.D.Usadel, Phys.Rev.Lett. **25**, 507 (1970)
- [27] N.B.Kopnin, E.B.Sonin, cond-mat/0803.3772 (2008)
- [28] X.Wu, W.A.de Heer et al. Phys.Rev.Lett. **98**, 136801 (2007)
- [29] S.Adam, M.S.Fuhrer et al., Nature Physics **4**, 377 (2008)
- [30] F.Zhou, B.Spivak et al., J.Low Temp.Phys. **110**, 841 (1998)
- [31] P.M.Ostrovsky, M.A.Skvortsov et al., Phys.Rev.Lett. **87**, 027002 (2001)