

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ПРОБЛЕМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Институт теоретической физики им. Ландау РАН

СЕРБИН МАКСИМ НИКОЛАЕВИЧ

ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ЭФФЕКТ НЕРНСТА В
СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Магистерская диссертация

научный руководитель
д.ф.-м.н., М.А. Скворцов

Москва — 2009 г

СОДЕРЖАНИЕ

I. ВВЕДЕНИЕ	3
II. ЭФФЕКТ НЕРНСТА	3
А. Качественное объяснение эффекта	3
В. Тензоры термоэлектрических коэффициентов	5
III. КОЭФФИЦИЕНТ НЕРНСТА В ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКЕ	6
А. Учет токов намагниченности	6
В. Основные определения и элементы диаграммной техники	6
С. Классификация типов диаграмм	8
IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИАГРАММ	8
А. Диаграмма Асламазова-Ларкина	9
1. Электрический блок	9
2. Тепловой блок	11
3. Суммирование по уровням Ландау	11
4. Аналитическое продолжение	12
В. Диаграммы плотности состояний	14
1. Определение диаграмм, дающих вклад	14
2. Вычисление блока $\Sigma_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$	15
3. Аналитическое продолжение	16
С. Диаграммы Маки-Томпсона	16
1. Определение диаграмм, дающих вклад	16
2. Вычисление блока $\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}$	17
3. Аналитическое продолжение	18
D. Намагниченность	18
E. Общая формула	19
V. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В РАЗНЫХ ОБЛАСТЯХ	20
А. Область слабого магнитного поля	20
В. Область низких температур	22
С. Вблизи линии перехода	23
D. Области далекие от линии перехода	24
E. Сравнение с экспериментом	25
VI. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ	25
A. ТЕНЗОРЫ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ВКЛАД НАМАГНИЧЕННОСТИ	26
1. Транспортный ток и ток намагниченности	26
2. Токи намагниченности в присутствии возмущения	27
3. Поправки к тензорам термоэлектрических коэффициентов	28
4. Качественное рассмотрение	28
B. МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ТЕПЛОВОГО ТОКА	29
C. ЭФФЕКТ НЕРНСТА В НОРМАЛЬНОМ МЕТАЛЛЕ	30
1. Недиагональная компонента тензора β	30
2. Термоэдс	31
3. Коэффициент Нернста	32
D. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИГАММА-ФУНКЦИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ	32
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	33

I. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Нернста-Эттингсгаузена, заключающийся в возникновении электрического поля при наличии градиента температуры в магнитном поле, впервые был обнаружен в металлах еще в 1886 году. В 1948 году эффект Нернста в металлах получил свое теоретическое обоснование в работе Зондхаймера [1]. Сравнительно недавно аномально большой сигнал Нернста был обнаружен в высокотемпературных сверхпроводниках, находящихся в нормальном состоянии выше линии перехода [2–10]. Эти эксперименты вызвали значительный интерес к термоэлектрическим явлениям со стороны теоретиков. Для объяснения эффекта в купратах были предложены модели, основывающиеся на движении вихрей в псевдощелевой фазе [3, 11, 12]. Кроме того, в серии работ Уссишкина с соавторами [13–15] рассматривался вклад в эффект от сверхпроводящих флуктуаций. Последняя теория также применима и к обычным сверхпроводникам.

Совсем недавно значительный сигнал Нернста был найден в неупорядоченных сверхпроводящих пленках в нормальном состоянии [16, 17]. Эти пленки должны хорошо описываться обыкновенной моделью БКШ, поэтому эксперимент показывает важность сверхпроводящих флуктуаций для понимания эффекта. Кроме Уссишкина с соавторами [13–15], флуктуационный эффект Нернста в окрестности критической температуры рассматривали Уллах и Дорси [18], а также Рейзер с Сергеевым [19]. Однако, все эти работы ограничивались рассмотрением слабых магнитных полей и температур близких к T_c , когда можно пренебречь квантованием Ландау для куперовских пар. Теоретические предсказания для поведения эффекта Нернста в других областях фазовой плоскости отсутствовали. В то время, как в эксперименте сигнал был измерен в широкой области выше линии перехода, в частности, в сильных магнитных полях, а также при $T \gg T_c$.

В данной работе мы представим микроскопическую теорию эффекта Нернста, полученную в рамках метода линейного отклика Кубо. Кроме универсальной общей формулы, применимой для всей области температур и полей, в которой имеются экспериментальные данные, будут получены асимптотики для различных областей фазовой диаграммы. Обнаружено хорошее согласие теории с экспериментом.

Дипломная работа построена следующим образом. В Разделе II мы определим коэффициент Нернста и представим качественное объяснение величины сигнала в нормальном металле и сверхпроводниках. В Разделе III мы введем общие понятия необходимые для диаграммной техники, а также обсудим роль намагниченности. Раздел IV посвящен вычислению вклада диаграмм, намагниченности и выводу общей формулы. Асимптотики и сравнение с экспериментом представлены в Разделе V. Работа заканчивается обсуждением открытых проблем и сравнением с другими теоретическими работами в Разделе VI. Приложение A посвящено подробному рассмотрению особенностей термоэлектрических явлений в магнитном поле, Приложение B — выводу и обсуждению микроскопического оператора теплового тока. Приложение C рассматривает эффект Нернста в металле. И, наконец, в Приложении D содержатся справочные сведения о дигамма-функции, которые широко используются во всей работе.

II. ЭФФЕКТ НЕРНСТА

Перед тем как переходить к строгому описанию эффекта, проведем качественное рассмотрение. Экспериментальные измерения в работах [16, 17] проводились следующим образом: двумерная пленка помещалась в магнитное поле, $\mathbf{H} \parallel \hat{\mathbf{z}}$, перпендикулярное плоскости пленки и создавался градиент температуры, $(-\nabla T) \parallel \hat{\mathbf{x}}$, в перпендикулярном к магнитному полю направлении. Измерялся возникающий при этом отклик электрического поля, $\mathbf{E} \parallel \hat{\mathbf{y}}$, направленный перпендикулярно магнитному полю и градиенту температуры. Коэффициент Нернста ν_N определяется как отношение возникающего электрического поля и градиента температуры с магнитным полем:

$$\nu_N = \frac{E_y}{(-\nabla T)_x H_z}. \quad (1)$$

Сначала мы проведем качественное описание эффекта, позволяющее лучше понять физику явления, а потом перейдем к последовательному рассмотрению через тензоры термоэлектрических коэффициентов.

A. Качественное объяснение эффекта

Для проведения качественного рассмотрения, допустим что к образцу приложены электрическое и магнитное поля, E_y и H_z , и будем искать возникающий при этом градиент температуры. Как известно, у заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях возникает дрейфовая скорость, $\bar{v}_x = cE_y/H_z$, направленная вдоль оси x . В случае замкнутой цепи, это приводило бы к возникновению электрического тока

$j_x = ne\bar{v}_x$. Если цепь разомкнута и ток отсутствует, возникает электрический потенциал, предотвращающий дрейф носителей заряда:

$$\nabla_x \varphi = -E_x = (nec/\sigma)(E_y/H_z), \quad (2)$$

где n обозначает концентрацию носителей, а σ — проводимость. В соответствии с условием электронейтральности, электрохимический потенциал должен быть постоянным по образцу. Поэтому, градиент электрического потенциала приводит к возникновению градиента химического потенциала, так что

$$\nabla_x \mu(n, T) + e\nabla_x \varphi = 0. \quad (3)$$

Поскольку концентрация носителей по образцу остается постоянной, градиент химического потенциала может быть вызван только градиентом температуры:

$$\nabla_x T = \left(\frac{d\mu}{dT} \right)^{-1} \nabla_x \mu, \quad (4)$$

направленным вдоль оси x . Выражая $\nabla_x \mu$ из (2) и (3) и подставляя выражение для градиента температуры в определение коэффициента Нернста (1), мы получаем:

$$\nu_N = \frac{\sigma}{ne^2 c} \frac{d\mu}{dT}. \quad (5)$$

Несмотря на то что формула (5) и получена из качественных соображений, она дает правильные зависимости для металла и сверхпроводника.

Применим выражение (5) к вырожденному электронному газу, т.е. к металлу. В металле химический потенциал зависит от температуры как

$$\mu(T) = \mu_0 - (\pi^2 T^2/6)(d \ln \nu/d\mu), \quad (6)$$

где $\nu(\mu)$ — плотность состояний. Подставив эту зависимость в формулу (5), получаем правильный ответ [1] для коэффициента Нернста в металле¹:

$$\nu_N = \frac{\pi^2 T}{3mc} \frac{d\tau}{d\mu}, \quad (7)$$

где τ время упругого рассеяния электронов (здесь и в дальнейшем принята система единиц $\hbar = k_B = 1$). Как видно, эффект Нернста в металле оказывается малым из-за большой величины энергии Ферми.

Из формулы (5) видно, что, для того чтобы эффект Нернста был большим, нужна *сильная зависимость химического потенциала носителей заряда от температуры*. Такая зависимость реализуется вблизи сверхпроводящего перехода. В этой области, кроме обыкновенных электронов, появляется новый тип носителей — флуктуационные куперовские пары. В нормальной области такие возбуждения являются нестабильными с характерным временем жизни $\tau_{GL} = \pi/8(T - T_c)$, и образуют взаимодействующий бозе-газ с переменным числом частиц. В двух измерениях концентрация куперовских пар [20]

$$n_{c.p.}^{(2)}(T) = (mT_c/\pi) \ln[T_c/(T - T_c)]. \quad (8)$$

Химический потенциал куперовских пар вблизи T_c может быть найден из тех соображений, что концентрация, вычисленная на основании бозевской функции распределения (в приближении невзаимодействующих куперовских пар), должна совпадать с (8). Это дает

$$\mu_{c.p.}^{(2)}(T) = T_c - T. \quad (9)$$

Следовательно,

$$d\mu_{c.p.}^{(2)}/dT = -1, \quad (10)$$

¹ Зондхаймер в своей работе [1] работал в τ -приближении, с самого начала предполагая, что собственно-энергетическая часть $\Sigma(\varepsilon, p) = \Sigma(\varepsilon)$ зависит только от энергии. Это эквивалентно предположению о δ -коррелированном потенциале примесей, когда $1/\tau(\varepsilon) = \text{const } \nu(\varepsilon)$. В рамках этого приближения $d\nu/d\varepsilon$ и $d\tau/d\varepsilon$ однозначно выражаются друг через друга.

и мы видим, что флуктуационный вклад в эффект Нернста оказывается параметрически бóльшим, чем фермижидкостной вклад. Это явление напоминает флуктуационный диамагнетизм, который также превосходит диамагнетизм Ландау/Паули и является предвестником идеального диамагнетизма сверхпроводника. Из уравнения (5), используя известное значение парапроводимости в магнитном поле [20], $\sigma_{\text{п}} = (e^2/2\epsilon)F(\epsilon/2\tilde{h})$, с логарифмической точностью, получаем вклад флуктуационных куперовских пар в коэффициент Нернста:

$$\nu_N^{(2)}(T, H) \sim \frac{1}{mc} \frac{F(x)}{T - T_c} \sim \begin{cases} [mc(T - T_c)]^{-1}, & x \gg 1, \\ (meDH)^{-1}, & x \ll 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$F(x) = x^2 [\psi(1/2 + x) - \psi(x) - 1/(2x)], \quad (12)$$

где $x = \epsilon/2\tilde{h}$, а $\epsilon = \ln(T/T_c)$ и $\tilde{h} = H/\tilde{H}_{c2}(0)$ являются приведенными температурой и магнитным полем. Через $\tilde{H}_{c2}(0) = 4cT_c/\pi eD$ здесь обозначена линейная экстраполяция значения верхнего критического магнитного поля, где D — коэффициент диффузии. Оценка (11) соответствует результатам, полученным на основе временного уравнения Гинзбурга-Ландау [13, 18] и вычислениям в рамках диаграммной техники [14] вблизи классического фазового перехода.

В. Тензоры термоэлектрических коэффициентов

Эффект Нернста является одним из представителей семейства термоэлектрических эффектов и может быть выражен через тензоры термоэлектрических коэффициентов. Все термоэлектрические явления могут быть описаны следующей системой уравнений, связывающей электрический и тепловой *транспортные* (см. Приложение А) токи с электрическим полем и градиентом температуры:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\text{tr}}^e = \hat{\sigma} \mathbf{E} + \hat{\beta} \nabla T, \\ \mathbf{J}_{\text{tr}}^Q = \hat{\gamma} \mathbf{E} - \hat{\kappa} \nabla T. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\hat{\sigma}$ — тензор проводимости, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ и $\hat{\kappa}$ — тензоры термоэлектрических коэффициентов и теплопроводности. Тензоры $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$ связаны между собой соотношением Онсагера, $\hat{\gamma}(\mathbf{H}) = -T\hat{\beta}(-\mathbf{H})$. Разрешая систему (13) по отношению к тепловому току и электрическому полю, мы получим:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \hat{\rho} \mathbf{J}_{\text{tr}}^e + \hat{S} \nabla T, \\ \mathbf{J}_{\text{tr}}^Q = \hat{\Pi} \mathbf{J}_{\text{tr}}^e - \hat{\kappa} \nabla T, \end{cases} \quad (14)$$

где $\hat{\rho} = \hat{\sigma}^{-1}$, $\hat{S} = \hat{\rho} \cdot \hat{\beta}$ и $\hat{\Pi} = \hat{\gamma} \cdot \hat{\rho}$ — тензоры проводимости, термоэдс и Пельтье, соответственно. Согласно (1), коэффициент Нернста определяется yx компонентой тензора \hat{S} и может быть выражен через проводимость и тензор $\hat{\beta}$ следующим образом:

$$\nu_N = -\frac{S^{yx}}{H} = \frac{1}{H} \frac{\beta^{xy} \sigma^{xx} - \beta^{xx} \sigma^{xy}}{(\sigma^{xx})^2 + (\sigma^{xy})^2}. \quad (15)$$

Для нормальных металлов оба вклада в числителе формулы (15) оказываются одного порядка, поскольку β^{xy} и σ^{xy} содержат дополнительную малость $\omega_c \tau$ по сравнению с β^{xx} и σ^{xx} (см. Приложение С):

$$\beta^{xx} = \frac{4\pi^2 e T}{3dm} \frac{\partial(\nu\mu\tau)}{\partial\mu}, \quad \beta^{xy} = \frac{4\pi^2 e \omega_c T}{3dm} \frac{\partial(\nu\mu\tau^2)}{\partial\mu}, \quad (16)$$

где d обозначает размерность пространства. В результате, коэффициент Нернста в металле (7) оказывается пропорциональным производной от плотности состояний (времени свободного пробега, см. примечание на стр. 4) по энергии, которая определяет параметр асимметрии между частицами и дырками.

В случае близости металла к сверхпроводящему переходу вклад в эффект дают также флуктуационные куперовские пары. Их вклад, как мы показали из качественных соображений, и как мы увидим в дальнейшем, оказывается параметрически бóльшим, чем вклад электронов проводимости. При рассмотрении только флуктуационного вклада в эффект Нернста, уравнение (15) можно упростить. Если мы находимся не слишком близко к линии сверхпроводящего перехода ($\frac{T-T_c}{T_c}, \frac{H-H_{c2}}{H_{c2}} \gg Gi \sim g^{-1}$, где $g = \frac{\hbar}{e^2} \frac{1}{R_{\square}}$ — безразмерный кондактанс), для

σ^{xx} и σ^{xy} можно использовать их значения в нормальном металле. Поскольку $\sigma^{xx} \gg \sigma^{xy}$ по малому параметру угла Холла, и вклад флуктуаций оказывается менее сингулярным для диагональной компоненты тензора $\hat{\beta}$ (см. [20]), слагаемые $\beta^{xx}\sigma^{xy}$ и $(\sigma^{xy})^2$ в числителе и знаменателе формулы (15) можно опустить, получив:

$$\nu_N = \frac{1}{H} \frac{\beta^{xy}}{\sigma^{xx}}. \quad (17)$$

Таким образом, вклад флуктуационных пар в коэффициент Нернста описывается недиагональной компонентой β^{xy} тензора $\hat{\beta}$. Считая проводимость известной, в дальнейшем мы сконцентрируем наше внимание на вычислении вклада свехпроводящих флуктуаций в β^{xy} .

III. КОЭФФИЦИЕНТ НЕРНСТА В ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКЕ

A. Учет токов намагниченности

При рассмотрении термоэлектрических явлений в магнитных полях, необходимо учитывать особенности, связанные с наличием токов намагниченности. Подробному рассмотрению данного вопроса посвящено Приложение А. Оказывается, что транспортный ток, который измеряется в эксперименте, отличается от полного микроскопического тока на величину т.н. токов намагниченности. Поэтому, после того как мы получим тензор $\hat{\beta}$ из кубовского коррелятора микроскопических токов, необходимо учесть вклад $\hat{\beta}_M$, обусловленный токами намагниченности. Таким образом мы находим компоненту β^{xy} , соответствующую транспортному току:

$$\beta^{xy} = \tilde{\beta}^{xy} + \beta_M^{xy}, \quad \beta_M^{xy} = \frac{c}{T} M^z. \quad (18)$$

Видно, что интересующая нас величина β^{xy} состоит из двух слагаемых, одно из которых является кинетической величиной, а другое термодинамической. Вклады $\tilde{\beta}^{xy}$ и β_M^{xy} будут вычисляться нами по-отдельности, и затем будут собраны в общую формулу.

Кинетический вклад в β^{xy} будет вычисляться методом Кубо. Тензор $\tilde{\beta}^{\alpha\beta}$ определяется как коэффициент пропорциональности между полным током и электрическим полем при $\nabla^\alpha T = 0$:

$$j^{Q\alpha} = T \tilde{\beta}^{\alpha\beta}(\mathbf{H}) E^\beta, \quad (19)$$

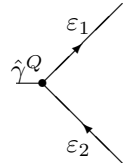
и выражается через коррелятор операторов электрического и теплового токов

$$Q^{\alpha\beta}(\omega_\nu) = \langle j^{e\alpha}(-\omega_\nu) j^{Q\beta}(\omega_\nu) \rangle = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_\nu \tau} \langle T_\tau j^{e\alpha}(\tau, \mathbf{r}) j^{Q\beta}(0, \mathbf{r}') \rangle, \quad (20)$$

используя аналитическое продолжение к действительным частотам:

$$\tilde{\beta}^{xy} = -\frac{1}{T} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \frac{Q^{xy}(-i\omega + 0)}{\omega}. \quad (21)$$

Оператор электрического тока в (20) имеет стандартный вид. Для вершины микроскопического теплового тока $\hat{\gamma}^Q$ мы используем так называемое ε -представление [см. формулу (B5) в Приложении В]:



, $\hat{\gamma}^Q = \frac{i}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mathbf{v}.$ (22)

B. Основные определения и элементы диаграммной техники

Для вычисления коррелятора операторов электрического и теплового тока мы воспользуемся мацубаровской диаграммной техникой. Мы учитываем свехпроводящие флуктуации в БКШ-модели для сферически симметричного параметра порядка. При этом, мы ограничиваемся т.н. «грязным пределом» и рассматриваем δ -коррелированные в пространстве примеси. Другими словами, длина свободного пробега электрона l между

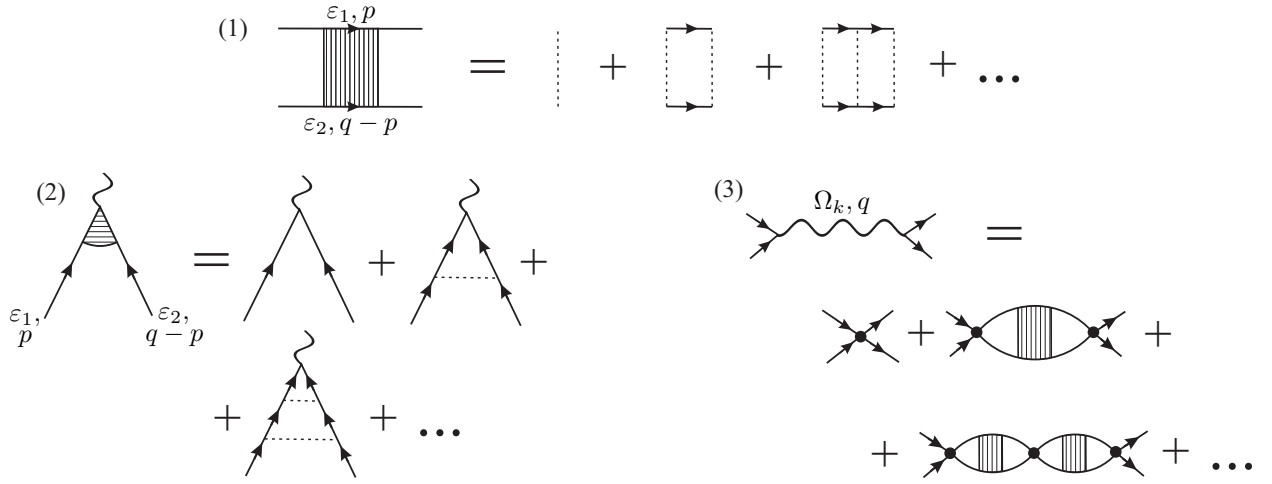


Рис. 1: Цифрами на рисунке обозначены: (1) — куперонная лестница, $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{q})$; (2) — вершина взаимодействия, одетая примесными линиями, $\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{q})$; (3) — пропагатор сверхпроводящих флуктуаций, $L(\Omega_k, \mathbf{q})$. Все величины рассматриваются в лестничном приближении. При учете квантования Ландау, импульс \mathbf{q} заменяется на номер уровня Ландау.

двумя актами упругого рассеяния на примесях является много меньшей, чем характерный размер сверхпроводящих пар $\xi(T)$, а также меньшей, чем тепловая длина l_T . С другой стороны, длина свободного пробега l должна быть больше длины волны:

$$k_F^{-1} \ll l \ll l_T \lesssim \xi(T), \quad (23)$$

где $l_T^2 = \frac{D}{2\pi T}$. Для времени свободного пробега τ , неравенство (23) переписывается в виде

$$T \ll \tau^{-1} \ll \mu_0. \quad (24)$$

Мы будем рассматривать всю фазовую плоскость $T - H$ выше линии сверхпроводящего перехода. При этом, мы считаем магнитное поле слабым: магнитная длина $l_H \gg l$, или, другими словами

$$\omega_c \ll \tau^{-1}, \quad (25)$$

где ω_c — циклотронная частота для электронов. Наконец, мы ограничиваемся двумерной геометрией (обобщение на трехмерный случай очевидно, см. Раздел **VE**), что накладывает ограничения на толщину образца d . Для того, чтобы мы могли считать пленку строго двумерной, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$d \ll l_T. \quad (26)$$

Подход, используемый нами для вычислений совпадает с методом вычисления флуктуационных поправок к проводимости [20]. Усреднение по примесям будет производиться в рамках крестовой диаграммной техники в лестничном приближении (приближение непересекающихся пунктиров, соответствующее вычислению в главном по $(k_F l)^{-1}$ порядке). Электронная функция Грина в данном случае записывается в виде

$$G(\varepsilon_k, \xi) = \frac{1}{i\varepsilon_k - \xi + i \operatorname{sign}(\varepsilon_k)/2\tau}. \quad (27)$$

Кроме нее, основные элементы используемой диаграммной техники — куперонная лестница C и пропагатор сверхпроводящих флуктуаций L . В грязном пределе и в лестничном приближении C и L имеют вид:

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \frac{\theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2)}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + D\mathbf{q}^2}, \quad (28)$$

$$L(\Omega_k, \mathbf{q}) = -\frac{\nu^{-1}}{\log \frac{T}{T_c} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{|\Omega_k| + D\mathbf{q}^2}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (29)$$

где ν — двумерная плотность состояний (без учета спинового множителя 2), T_c — температура перехода, $\psi(x)$ — логарифмическая производная Гамма-функции (дигамма-функция, см. Приложение **D**), D — коэффициент

диффузии. Через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \Omega_k, \mathbf{q}$ обозначены соответствующие мацубаровские частоты и импульсы, бегущие через куперон и пропагатор, см. Рис. 1. Отметим, что куперон зависит только от разности энергий и импульсов, бегущих по верхнему и нижнему электронным пропагаторам. Также, при вычислениях мы будем использовать вершину, одетую примесными линиями, которая отличается от куперонной лестницы $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{q})$ отсутствием одной примесной линии:

$$\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{q}) = 2\pi\nu\tau C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{q}) = \frac{1}{\tau} \frac{\theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2)}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + D\mathbf{q}^2}. \quad (30)$$

Поскольку вычисления будут производиться при произвольном магнитном поле, нам понадобятся выражения (28)-(30) с учетом квантования движения частиц в магнитном поле. Обобщение достигается путем замены непрерывного спектра на уровни Ландау, $\mathbf{q}^2 \rightarrow \mathbf{q}_n^2 = \frac{4eH}{c}(n + \frac{1}{2})$. Таким образом, C, L и λ становятся функциями номера уровня Ландау n , вместо импульса:

$$C_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \frac{\theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2)}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \alpha_n}, \quad (31)$$

$$L_n(\Omega_k) = -\frac{\nu^{-1}}{\log \frac{T}{T_c} + \psi_n(|\Omega_k|) - \psi(\frac{1}{2})}, \quad (32)$$

где α_n и α в дальнейшем будут обозначать спектр и циклотронную частоту для куперовских пар:

$$\alpha_n = \frac{4DeH}{c} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha = \frac{4DeH}{c}, \quad (33)$$

а $\psi_n(\Omega)$ определяется как

$$\psi_n(\Omega) = \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega + \alpha_n}{4\pi T} \right). \quad (34)$$

Соответственно, интегрирование по импульсу заменяется суммированием по уровням Ландау:

$$\int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \rightarrow \nu_H \sum_n, \quad (35)$$

где ν_H — плотность состояний на одном уровне Ландау,

$$\nu_H = \frac{eH}{\pi c}. \quad (36)$$

С. Классификация типов диаграмм

Коррелятор двух токов, Q^{xy} , который дает нам $\tilde{\beta}^{xy}$ согласно с ур. (A19), в одной петле дается диаграммами трех типов: Асламазова-Ларкина (АЛ), плотности состояний (DOS, от английского Density-of-States) и Маки-Томпсона (МТ):

$$\tilde{\beta}^{xy} = \tilde{\beta}_{\text{AL}}^{xy} + \tilde{\beta}_{\text{DOS}}^{xy} + \tilde{\beta}_{\text{MT}}^{xy}. \quad (37)$$

Все три типа диаграмм изображены на Рис. 2. По аналогии с проводимостью [20], диаграмму АЛ можно интерпретировать как прямой вклад флуктуационных куперовских пар в эффект Нернста, а DOS и МТ-вклады как учет влияния куперовских пар на электронный транспорт.

В следующей главе мы покажем, что вклад в эффект Нернста дают только диаграммы (а) и (d), из изображенных на рисунке. Вклад от диаграммы МТ (f) зануляется, а диаграмма (е) вместе с двумя DOS-диаграммами (b) и (c) оказывается малой по параметру τT .

IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИАГРАММ

В данном разделе мы представим детальное вычисление АЛ, DOS и МТ диаграмм и намагниченности. В конце раздела, пользуясь ответами для отдельных диаграмм, мы получим и упростим общую формулу для β^{xy} .

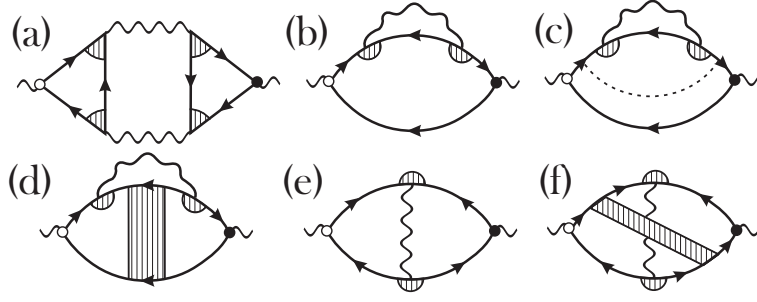


Рис. 2: Диаграммы, которые в принципе могут давать вклад в Q^{xy} . Белый кружок обозначает тепловую вершину j^{Qy} , черный — электрическую j^{ex} . Заштрихованные блоки представляют собой купероны, волнистые линии — пропагаторы сверхпроводящих флуктуаций. Все объекты являются матрицами в базе Ландау. (a) — диаграмма Асламазова-Ларкина, (b)-(d) — диаграммы типа плотность состояний, (e)-(f) — диаграммы Маки-Томпсона. Диаграммы (b)-(d) и (f) имеют зеркальные отражения, которые не изображены. В конечном итоге, оказывается, что вклад в эффект Нерста дают только диаграммы (a) и (d).

А. Диаграмма Асламазова-Ларкина

Имеется всего одна диаграмма Асламазова-Ларкина, которая представлена на Рис. 3. Диаграмма содержит два флуктуационных пропагатора, которые взаимодействуют через тепловой и электрический блоки $B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ и $B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu)$. Также, вклад в Q^{xy} , соответствующий АЛ диаграмме, содержит матричные элементы операторов импульса, которые не включены в блоки $B^{(e,Q)}$. Так как магнитное поле может быть произвольным, выражение соответствующее диаграмме должно быть просуммировано по уровням Ландау. Окончательное выражения для АЛ диаграммы можно записать как:

$$Q_{AL}^{xy}(\omega_\nu) = -4\nu_H T \sum_{n,m} \sum_{\Omega_k} \hat{q}_{mn}^x B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) \hat{q}_{nm}^y B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) L_m(\Omega_k + \omega_\nu) L_n(\Omega_k), \quad (38)$$

где ν_H — плотность состояний на одном уровне Ландау, определенная в формуле (36), а сумма вычисляется по бозонной мацубаровской частоте $\Omega_k = 2\pi kT$.

Вычисления АЛ-вклада будет устроено следующим образом: сначала мы вычислим электрический и тепловой блоки, затем аналитически продолжим $Q_{AL}^{xy}(\omega_\nu)$ в область действительных частот и упростим полученное выражение.

1. Электрический блок

Обозначения для электрического и теплового блоков представлены на Рис. 3. Каждый блок состоит из трех функций Грина, двух куперонов и соответствующего токового оператора. При этом оператор импульса не входит в определение блока, и записан в уравнении (38) отдельно. Тогда мы имеем:

$$q^x B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -eTI^x \sum_{\varepsilon_l} \lambda_m(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_l) \lambda_n(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l), \quad (39)$$

где I^α — интеграл по импульсу от трех электронных функций Грина (27) и оператора скорости:

$$I^\alpha = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v^\alpha(p) G(p, \varepsilon_{l+\nu}) G(p, \varepsilon_l) G(q-p, \Omega_k - \varepsilon_l). \quad (40)$$

При интегрировании по электронному импульсу мы работаем в главном порядке по τ . Это значит, что мы можем не учитывать магнитное поле, так как интегралы набираются в баллистической области, и учет магнитного поля даст нам малость по $\omega_c \tau \ll 1$. Кроме этого мы можем использовать тот факт, что вершины λ в ур. (39) содержат тета-функции $\theta(-\varepsilon_{l+\nu}(\Omega_k - \varepsilon_l))$ и $\theta(-\varepsilon_l(\Omega_k - \varepsilon_l))$. Это означает что λ является ненулевой только в случае, когда одна из электронных функций Грина, входящих в вершину, является запаздывающей, а вторая — опережающей. Итого, есть два возможных случая (см. обозначения на Рис. 3):

$$\begin{cases} \varepsilon_l, \varepsilon_{l+\nu} > 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_l < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_l, \varepsilon_{l+\nu} < 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_l > 0 \end{cases}. \quad (41)$$

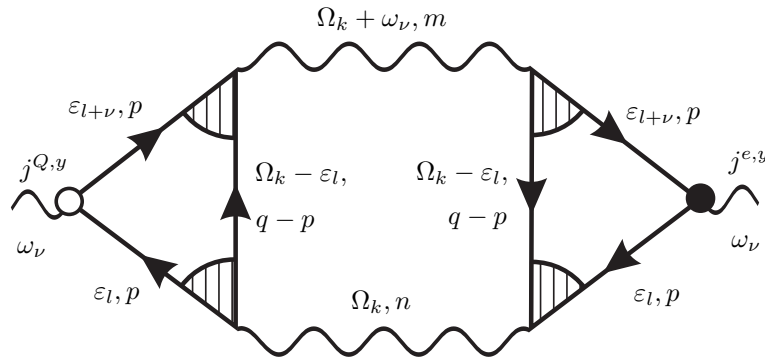


Рис. 3: Диаграмма Асламазова-Ларкина с обозначениями. Левый блок представляет собой тепловую вершину, $B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$, правый — электромагнитную вершину, $B_{mn}^{(e)}(\Omega_k + \omega_\nu, -\omega_\nu) = B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu)$. Волнистые линии соответствуют пропагаторам $L_n(\Omega_k)$ и $L_m(\Omega_k + \omega_\nu)$.

В обоих случаях, при вычислении интеграла мы можем опустить энергии ε_n , $\varepsilon_{n+\nu}$, $\Omega_k - \varepsilon_n$ заменив их на $+0$ или -0 соответственно, так как их учет дает поправку порядка $\varepsilon\tau \ll 1$. Чтобы получить ненулевой результат, в функции Грина $G(p-q)$ необходимо учесть импульс \mathbf{q} в первом порядке, $G(p-q) = G(p) - \mathbf{v}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} G^2(p)$. После усреднения по углу и замены переменной интегрирования $d^2\mathbf{p} \rightarrow \nu d\xi$, мы получаем ответ для интеграла:

$$I^\alpha = -\frac{\nu v_F^2}{2} q^\alpha \int d\xi [G^A(\xi)]^2 [G^R(\xi)]^2 = -4\pi\nu D\tau^2 q^\alpha. \quad (42)$$

Мы видим, что в главном порядке по τ , интегрирование по электронному импульсу \mathbf{p} дает численный коэффициент и импульс q^x , который выносится нами из определения вершины и превращается в оператор. Теперь нам необходимо вычислить сумму по внутренней энергии $\varepsilon_l = 2\pi T(l + 1/2)$:

$$\begin{aligned} B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) &= 4\pi T e \nu D \tau^2 \sum_{\varepsilon_l} \lambda_m(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_l) \lambda_n(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l) = \\ &= 4\pi T e \nu D \sum_{\varepsilon_l} \frac{\theta(-\varepsilon_{l+\nu}(\Omega_k - \varepsilon_l)) \theta(-\varepsilon_l(\Omega_k - \varepsilon_l))}{(|\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu} - \Omega_k| + \alpha_m)(|2\varepsilon_l - \Omega_k| + \alpha_n)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Опять, благодаря θ -функциям, входящим в определение λ , область суммирования по ε_l определяется неравенствами (41) и зависит от соотношения между Ω_k и $-\omega_\nu$ (мы считаем, что $\omega_\nu \geq 0$). Ввиду того что эти области суммирования будут встречаться нам в дальнейшем, мы введем сокращенные обозначения для них, RR , RA и AA :

$$RR: \quad -\omega_\nu \leq 0 < \Omega_k, \quad l \in (-\infty, -\nu - 1] \cup [k, \infty). \quad (44a)$$

$$RA: \quad -\omega_\nu < \Omega_k \leq 0, \quad l \in (-\infty, -\nu - 1] \cup [0, \infty); \quad (44b)$$

$$AA: \quad \Omega_k \leq -\omega_\nu \leq 0, \quad l \in (-\infty, k - 1] \cup [0, \infty); \quad (44c)$$

В каждой области (44a)-(44c) сумма может быть вычислена путем разложением дробей в ур. (43) на элементарные, и выражением получающихся сумм через ψ -функции (см. Приложение **D**). Это приводит к трем различным функциям $B_{nm}^{(e)RR}(\Omega_k, \omega_\nu)$, $B_{nm}^{(e)RA}(\Omega_k, \omega_\nu)$ и $B_{nm}^{(e)AA}(\Omega_k, \omega_\nu)$, каждая из которых определена в своей области и может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость переменных Ω_k, ω_ν . Полученные ответы можно собрать в одну функцию, $B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu)$, которая, при этом уже не может быть продолжена аналитически на всю плоскость Ω_k :

$$B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) = e\nu D \left[\frac{\psi_m(\omega_\nu + |\Omega_k|) - \psi_n(|\Omega_k|)}{\omega_\nu + \alpha_m - \alpha_n} + \frac{\psi_n(\omega_\nu + |\Omega_{k+\nu}|) - \psi_m(|\Omega_{k+\nu}|)}{\omega_\nu + \alpha_n - \alpha_m} \right], \quad (45)$$

где α_n и $\psi_n(\Omega)$ определены в (33) и (34).

Отметим, что формула (45) совпадает с выражением для вершины полученным в [21], а также воспроизводит известный ответ для электрического блока $B^{(e)}$ в случае нулевого магнитного поля [20]. Если еще и предположить, что $\omega_\nu, \Omega_k \ll T$, так что мы можем разложить ψ -функции по $\omega_\nu/T, \Omega_k/T$ до первого порядка, мы

получим:

$$B_{nm}^{(e)RR}(\Omega_k, \omega_\nu) = B_{nm}^{(e)RA}(\Omega_k, \omega_\nu) = B_{nm}^{(e)AA}(\Omega_k, \omega_\nu) = \frac{\pi e \nu D}{4T}. \quad (46)$$

Таким образом, главное слагаемое в $B^{(e)}$ в пределе нулевого магнитного поля и малых частот совпадает во всех областях аналитичности.

2. Тепловой блок

Тепловой блок вычисляется вполне аналогично электрическому. Выражение для него отличается от формулы (39) заменой множителя $-e$ на полусумму $i(\varepsilon_{l+\nu} + \varepsilon_l)/2$, которая происходит из оператора теплового тока (22):

$$q^y B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = T I^y \sum_{\varepsilon_l} \frac{i(\varepsilon_{l+\nu} + \varepsilon_l)}{2} \lambda_m(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_l) \lambda_n(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l). \quad (47)$$

Используя для I^α ответ (42), и сокращая q^y , мы снова остаемся с суммой по ε_l :

$$B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -4\pi T \nu D \sum_{\varepsilon_l} \frac{i(\varepsilon_{l+\nu} + \varepsilon_l)}{2} \frac{\theta(-\varepsilon_{l+\nu}(\Omega_k - \varepsilon_l))\theta(-\varepsilon_l(\Omega_k - \varepsilon_l))}{(|\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu} - \Omega_k| + \alpha_m)(|2\varepsilon_l - \Omega_k| + \alpha_n)}. \quad (48)$$

Как и в предыдущем случае, область суммирования зависит от соотношения между $-\omega_\nu$ и Ω_k в соответствии с условиями (44). Выполняя суммирование, получаем:

$$B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = \frac{-i\nu D}{2} \left[\frac{(\Omega_k - \alpha_m)\psi_m(|\Omega_k| + \omega_\nu) - (\Omega_{k+\nu} - \alpha_n)\psi_n(|\Omega_k|)}{\omega_\nu + \alpha_m - \alpha_n} + \frac{(\Omega_{k+\nu} + \alpha_n)\psi_n(|\Omega_{k+\nu}| + \omega_\nu) - (\Omega_k + \alpha_m)\psi_m(|\Omega_{k+\nu}|)}{\omega_\nu + \alpha_n - \alpha_m} \right], \quad (49)$$

где мы снова использовали сокращенное обозначение (34). Выражение (49) совпадает с тепловым блоком, полученным Кароли и Маки в работе [21]².

В пределе $H, \Omega_k, \omega_\nu \rightarrow 0$, $B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$, в отличие от $B^{(e)}$, исчезает в нулевом порядке по Ω_k и ω_ν . Не удивительно, что слагаемые первого порядка по частотам зависят от области, в которой мы производим разложение:

$$B_{nm}^{(Q)RR}(\Omega_k, \omega_\nu) = -\frac{i\pi\nu D}{8T^2}(\Omega_k + \omega_\nu), \quad (50a)$$

$$B_{nm}^{(Q)RA}(\Omega_k, \omega_\nu) = -\frac{i\pi\nu D}{8T^2}(2\Omega_k + \omega_\nu), \quad (50b)$$

$$B_{nm}^{(Q)AA}(\Omega_k, \omega_\nu) = -\frac{i\pi\nu D}{8T^2}\Omega_k. \quad (50c)$$

В дальнейшем, мы вернемся к этим разложениям в Разделе **VA** при получении асимптотик.

3. Суммирование по уровням Ландау

Токовые вершины в выражении для $Q_{AL}^{xy}(\omega_\nu)$ умножаются на операторы импульса q^x и q^y . Изначально, они возникают в результате интегрирования по импульсу трех электронных функций Грина. Поскольку импульс в магнитном поле квантуется, $q^{x,y}$ превращаются в операторы в базисе Ландау, \hat{q}_{nm}^x и \hat{q}_{mn}^y . В выбранной нами калибровке

$$A_x = 0, \quad A_y = Hx, \quad (51)$$

² Кароли и Маки вычислили RA компоненту теплового блока на произвольных входящих импульсах, см. формулу (A7) в [21]. Если посадить входящие импульсы на уровни Ландау, (A7) воспроизводит наш ответ.

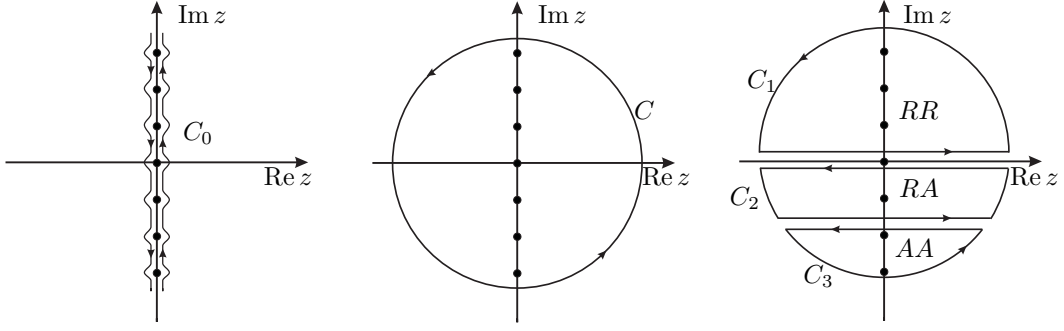


Рис. 4: Контур интегрирования и его последовательная деформация.

для матричных элементов импульса можно получить:

$$\hat{q}_{mn}^{x,y} = \sqrt{eH/c} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (\sqrt{m} \delta_{m,n+1} \mp \sqrt{n} \delta_{n,m+1}). \quad (52)$$

Операторы $\hat{q}^{x,y}$ теперь действуют, изменяя номер уровня Ландау на ± 1 . Для произведения матричных элементов $\hat{q}_{mn}^x \hat{q}_{nm}^y$, которое входит в (38), мы имеем:

$$\hat{q}_{mn}^x \hat{q}_{nm}^y = \frac{ieH}{c} (m\delta_{m,n+1} - n\delta_{n,m+1}), \quad (53)$$

где δ_{nm} — дельта-символ Кронекера. Подставив это в ур. (38), после простых преобразований получаем

$$Q_{\text{AL}}^{xy}(\omega_\nu) = -4\nu_H T \frac{ieH}{c} \sum_m (m+1) \sum_{\Omega_k} \left[B_{mm+1}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) B_{mm+1}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) L_{m+1}(\Omega_k + \omega_\nu) L_m(\Omega_k) \right. \\ \left. - B_{m+1m}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) B_{m+1m}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) L_m(\Omega_k + \omega_\nu) L_{m+1}(\Omega_k) \right]. \quad (54)$$

4. Аналитическое продолжение

Наконец, в соответствии с ур. (A19), нам необходимо выполнить аналитическое продолжение $Q_{\text{AL}}^{xy}(\omega_\nu)$ и взять слагаемое первого порядка по $\omega = i\omega_\nu$. Стандартная процедура [20, 22] состоит в представлении суммы по мацубаровским частотам в виде интеграла при помощи следующего соотношения:

$$\sum_{\Omega_k} f(\Omega_k) = \frac{1}{4\pi iT} \int_{C_0} dz \coth \frac{z}{2T} f(-iz), \quad (55)$$

где контур интегрирования охватывает все полюса \coth , см. Рис. 4. Затем мы деформируем контур интегрирования из C_0 в C и, используя области аналитичности вершин, RR , RA и AA , которые были определены в (44), мы получаем сумму трех интегралов по контурам C_1 , C_2 и C_3 . Интегралы по дугам, в пределе когда радиус стремится к бесконечности, исчезают. В результате, остаются интегрирования по обеим сторонам двух разрезов, задаваемых линиями $\text{Im } z = 0$ и $\text{Im } z = -\omega_\nu$. После сдвига переменной $z \rightarrow z - i\omega_\nu$ в интегрировании по обеим сторонам разреза между областями RA и AA , все интегралы приводятся к следующему виду:

$$\sum_{\Omega_k} B_{nm}^{(e)}(\Omega_k, \omega_\nu) B_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) L_m(\Omega_k + \omega_\nu) L_n(\Omega_k) = \frac{1}{4\pi iT} \int_{-\infty}^{\infty} dz \coth \frac{z}{2T} \\ \left[B_{nm}^{(e)RR}(-iz) B_{nm}^{(Q)RR}(-iz) L_m^R(-iz + \omega_\nu) L_n^R(-iz) - B_{nm}^{(e)RA}(-iz) B_{nm}^{(Q)RA}(-iz) L_m^R(-iz + \omega_\nu) L_n^A(-iz) \right. \\ \left. + B_{nm}^{(e)RA}(-iz - \omega_\nu) B_{nm}^{(Q)RA}(-iz - \omega_\nu) L_m^R(-iz) L_n^A(-iz - \omega_\nu) \right. \\ \left. - B_{nm}^{(e)AA}(-iz - \omega_\nu) B_{nm}^{(Q)AA}(-iz - \omega_\nu) L_m^A(-iz) L_n^A(-iz - \omega_\nu) \right]. \quad (56)$$

Теперь, для того чтобы найти слагаемое первого порядка по ω_ν , мы можем разложить подынтегральную функцию. Легко показать, что слагаемое нулевого порядка по ω_ν исчезает, как и должно быть (в случае проводимости зануление имеет место для суммы диаграмм, здесь же оно выполняется по-отдельности). Для слагаемого первого порядка, используя сокращенные обозначения,

$$B_{nm}^{(e)RR} = B_{nm}^{(e)RR}(-iz, 0), \quad (57)$$

$$B_{nm}^{(e)RR(1)} = \omega_\nu \left(\partial_{\omega_\nu} B_{nm}^{(e)RR}(-iz, \omega_\nu) \right)_{\omega_\nu=0}, \quad (58)$$

$$B_{nm}^{(e)RR(1\omega)} = \omega_\nu \left(\partial_{\omega_\nu} B_{nm}^{(e)RR}(-iz - \omega_\nu, \omega_\nu) \right)_{\omega_\nu=0}, \quad (59)$$

и аналогично в областях RA и AA , а также для пропагатора L , мы можем записать:

$$\begin{aligned} Q_{AL}^{xy} = & -\frac{\nu_H e H}{\pi c} \sum_m (m+1) \int_{-\infty}^{\infty} dz \coth \frac{z}{2T} \left[L_m^R L_{m+1}^R B_{mm+1}^{(e)RR} \left(B_{[mm+1]}^{(Q)RR(1)} \right) + B_{mm+1}^{(e)RR} B_{mm+1}^{(Q)RR} \left(L_{[m+1]}^{R(1)} L_m^R \right) \right. \\ & - L_m^A L_{m+1}^A B_{mm+1}^{(e)AA} \left(B_{[mm+1]}^{(Q)AA(1\omega)} \right) - B_{mm+1}^{(e)AA} B_{mm+1}^{(Q)AA} \left(L_{[m+1]}^A L_m^{A(1)} \right) + B_{mm+1}^{(e)RA} \left(L_{[m+1]}^R L_m^A \left\{ B_{mm+1}^{(Q)RA(1\omega)} - B_{mm+1}^{(Q)RA(1)} \right\} \right) \\ & \left. + B_{mm+1}^{(Q)RA} \left(L_{[m+1]}^R L_m^A \left\{ B_{mm+1}^{(e)RA(1\omega)} - B_{mm+1}^{(e)RA(1)} \right\} \right) + B_{mm+1}^{(e)RA} B_{mm+1}^{(Q)RA} \left\{ \left(L_{[m+1]}^R L_m^{A(1)} \right) - \left(L_{[m+1]}^{R(1)} L_m^A \right) \right\} \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

Квадратные скобки здесь и в дальнейшем обозначают антисимметризацию по заключенным в них индексам:

$$X_{[n} Y_{m]} \equiv X_n Y_m - X_m Y_n. \quad (61)$$

Интегрированием отдельных слагаемых в ур. (60) по частям, можно добиться значительных сокращений. При этом у нас возникает два различных слагаемых, одно из них интегрируется с $\coth \frac{z}{2T}$, а другое с функцией $1/\sinh^2 \frac{z}{2T}$, возникающей при действии производной на $\coth \frac{z}{2T}$. Извлекая $\tilde{\beta}_{AL}^{xy}$ из Q_{AL}^{xy} при помощи ур. (A19), мы получаем:

$$\tilde{\beta}_{AL}^{xy} = \frac{e}{\pi^2 T} \sum_m (m+1) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dz \coth \frac{z}{2T} P_m^{c(AL)}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2T} \frac{1}{\sinh^2 \frac{z}{2T}} P_m^{s(AL)}(z) \right). \quad (62)$$

Здесь функции $P_m^{c(AL)}(z)$ и $P_m^{s(AL)}(z)$ представляют собой достаточно сложные комбинации дигамма-функций, которые могут быть представлены через вспомогательные функции $\Gamma_{nm}(z)$

$$P_m^{c(AL)}(z) = \text{Im} \left[L_m^R \Gamma_{m+1m}(z) - L_{m+1}^R \Gamma_{mm+1}(z) \right], \quad (63a)$$

$$\Gamma_{nm}(z) = -\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha_m} (\psi_m(-iz) - \psi_n(-iz)) - \frac{\alpha_n}{8\pi T} \psi'_n(-iz) - \frac{\alpha_m - 2iz}{8\pi T} \psi'_m(-iz), \quad (63b)$$

а также, $\Lambda_m(z)$ и $b_m(z)$ соответственно,

$$P_m^{s(AL)}(z) = \text{Re} \left[\Lambda_m(z) (L_m^R + L_{m+1}^R) + b_m(z) L_{m+1}^R L_m^A \right], \quad (64a)$$

$$\Lambda_m(z) = \frac{1}{8} \left[(\alpha_{m+1} + 3iz) \psi_{m+1}(-iz) - (\alpha_m + 3iz) \psi_m(-iz) - (\alpha_{m+1} + iz) \psi_{m+1}(iz) + (\alpha_m + iz) \psi_m(iz) \right], \quad (64b)$$

$$b_m(z) = -\frac{i}{4} (\psi_{m+1}(iz) - \psi_m(-iz)) \text{Im} \left[(\alpha_{m+1} - iz) \psi_{m+1}(-iz) - (\alpha_m - iz) \psi_m(-iz) \right]. \quad (64c)$$

При этом во всех формулах для β^{xy} здесь и в дальнейшем, под пропагатором понимается выражение (32) без множителя $-\nu^{-1}$ (мы не меняем обозначение, поскольку это не может привести к недоразумениям).

Мы воспользуемся полученными формулами в Разделе IV E, при выводе общего выражения для коэффициента Нернста.

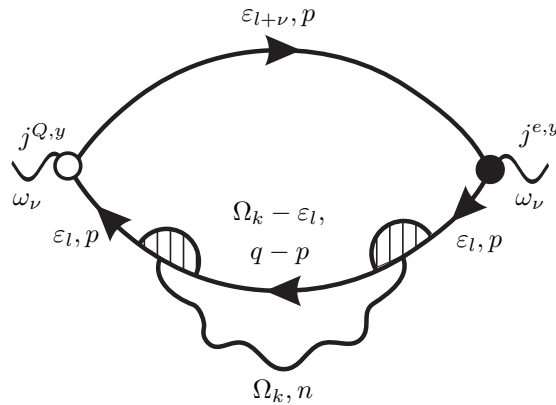


Рис. 5: Обозначения для блока $\Sigma_n^{(i)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ простейшей диаграммы DOS-типа. Внутри блока может быть вставлена куперонная лестница или же одна примесная линия, с очевидным изменением обозначений.

В. Диаграммы плотности состояний

В отличие от единственной диаграммы Асламазова-Ларкина, можно нарисовать несколько диаграмм DOS-типа, которые, в принципе, дают вклад в $Q^{xy}(\omega_\nu)$. Это диаграммы (вместе с своими зеркальными партнерами) (b), (c) и (d) на Рис. 2. В случае поправок к проводимости [20], вклады дают все изображенные диаграммы. Однако, в нашем случае, только диаграмма (d) дает вклад, в то время как остальные оказываются малыми по параметру τT . Эта малость может быть объяснена тем, что мы усредняем произведение токов $j^{ex} j^{Qy}$, в то время как в вычисление поправок к проводимости входит произведение $j^{ex} j^{ex}$.

Мы начинаем рассмотрение диаграмм DOS-типа с записи общего вида их вклада в токовый коррелятор $Q^{xy}(\omega_\nu)$:

$$Q_{\text{DOS}}^{xy(i)} = 2T \sum_{n,m} \sum_{\Omega_k} \hat{q}_{mn}^x \hat{q}_{nm}^y \Sigma_{nm}^{(i)}(\Omega_k, \omega_\nu) L_n(\Omega_k), \quad (65)$$

где $\Sigma_{nm}^{(i)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ — проинтегрированный по импульсу и просуммированный по мацубаровской энергии блок для диаграммы с номером (i) . Для диаграммы (b) блок состоит из четырех электронных функций Грина и двух вершин λ . Для диаграмм (c) и (d) блок $\Sigma_{nm}^{(i)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ состоит из шести электронных функций Грина и куперонной лестницы или одной примесной линии³.

1. Определение диаграмм, дающих вклад

Используя явные обозначения, представленные на Рис. 5, мы легко можем записать явные выражения для блоков $\Sigma_{nm}^{(i)}$, соответствующих каждой диаграмме. В результате, для диаграмм (b) и (c) мы получаем:

$$q^x q^y \Sigma_{nm}^{(i)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -eT I_{(i)}^{xy} \sum_{\varepsilon_l} \frac{i(\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu})}{2} \lambda_n^2(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l), \quad (66)$$

где интегралы $I_{(i)}^{xy}$ представляются в виде:

$$I_{(b)}^{xy} = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} v^x(p) v^y(p) G^2(\varepsilon_l, p) G(\varepsilon_{l+\nu}, p) G(\Omega_k - \varepsilon_l, q - p), \quad (67)$$

³ Заметим, что мы не рассматриваем диаграмму типа (d) на Рис. 2 с одной примесной линией вместо куперона, поскольку очевидно что она является малой. Действительно, если знаки энергий позволяют нам нарисовать куперон, то куперонная лестница содержит в себе, в частности, диаграмму с одной примесной линией, которая мала по сравнению со всей суммой. Если же знаки энергий таковы, что мы можем вставить только один пункт, вклад, поскольку его величина не зависит от знаков энергии, все равно оказывается малым.

$$I_{(c)}^{xy} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v^x(p)v^y(p)G^2(\varepsilon_l, p)G(\varepsilon_{l+\nu}, p) \int \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} G^2(\varepsilon_l, p')G(\Omega_k - \varepsilon_l, q - p'), \quad (68)$$

В выражение для $\Sigma_{nm}^{(d)}$ мы вводим дополнительный множитель $2\pi\nu\tau$ перед купероном, тем самым превращая его в λ , и включаем $(2\pi\nu\tau)^{-1}$ определение $I_{(d)}^{xy}$:

$$q^x q^y \Sigma_{nm}^{(d)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -eT I_{(d)}^{xy} \sum_{\varepsilon_l} \frac{i(\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu})}{2} \lambda_n^2(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l) 2\pi\nu\tau C_m(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_l), \quad (69)$$

$$I_{(d)}^{xy} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v^x(p)G(\varepsilon_l, p)G(\varepsilon_{l+\nu}, p)G(\Omega_k - \varepsilon_l, q - p) \times \int \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} v^y(p')G(\varepsilon_l, p')G(\varepsilon_{l+\nu}, p')G(\Omega_k - \varepsilon_l, q - p'). \quad (70)$$

Тогда формула (69) переписывается как:

$$q^x q^y \Sigma_{nm}^{(d)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -eT I_{(d)}^{xy} \sum_{\varepsilon_l} \frac{i(\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu})}{2} \lambda_n^2(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l) \lambda_m(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_l). \quad (71)$$

Интегралы (67)-(68) и (70) могут быть вычислены аналогично интегралу (40). Однако, для того чтобы понять, что диаграммы (b) и (c) не дают вклада в эффект Хернста, нет необходимости вычислять эти интегралы. Достаточно заметить, что при их вычислении нам необходимо дважды разложиться по \mathbf{q} (иначе, получится нулевой ответ). Следовательно, $I_{(b)}^{xy}$, $I_{(c)}^{xy}$ и $I_{(d)}^{xy}$ имеют один и тот же вид $I_i^{xy} = \text{const} \cdot \nu D \tau^3 q^x q^y$. Однако, в то время как первые две диаграммы содержат сумму двух λ , в последней диаграмме, под знаком суммы стоит три вершины λ . Поскольку $\lambda \sim 1/\tau T$ (множитель T идет из мацубаровской энергии), мы можем записать:

$$\Sigma_{nm}^{(b)-(c)}(\Omega_k, \omega_\nu) \sim eT\nu D \tau^3 \cdot \frac{1}{(\tau T)^2}, \quad (72)$$

$$\Sigma_{nm}^{(d)}(\Omega_k, \omega_\nu) \sim eT\nu D \tau^3 \cdot \frac{1}{(\tau T)^3}, \quad (73)$$

и, так как мы работаем в пределе $\tau T \ll 1$, вклад в главном порядке дает только диаграмма (d).

Чтобы лучше понять проведенное рассмотрение, укажем в чем состоит отличие между нашим вычислением и определением поправок к проводимости. При вычислении поправок к σ^{xx} мы считали бы интегралы типа $I_{(i)}^{xx}$ вместо $I_{(i)}^{xy}$. В этом случае, в интегралах $I_{(b)}^{xx}$ и $I_{(c)}^{xx}$ нам не надо было бы раскладываться дважды по внешнему импульсу, чтобы получить ненулевой результат. При вычислении $I_{(d)}^{xx}$, из-за независимости импульсов по разные стороны от куперона, нам как и прежде надо было бы разложиться дважды. Но для диаграммы (d) это лишнее разложение компенсируется наличием куперонной лестницы. В результате, при вычислении проводимости все диаграммы DOS-типа, (b), (c) и (d) оказываются одного порядка.

2. Вычисление блока $\Sigma_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$

Для вычисления $\Sigma_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ в главном порядке по τT , нам необходимо рассматривать только одну диаграмму (с ее зеркальным партнером, который дает множитель 2). Перед тем как переходить к вычислению интеграла (70) и суммированию по мацубаровским частотам, мы рассмотрим ограничения на область суммирования по энергии возникающие из θ -функций в вершинах λ . Они оказываются абсолютно аналогичными областям (41) для диаграммы АЛ:

$$\begin{cases} \varepsilon_l, \varepsilon_{l+\nu} > 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_l < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_l, \varepsilon_{l+\nu} < 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_l > 0 \end{cases}. \quad (74)$$

Пренебрегая энергиями в интеграле (70) [поскольку они не влияют на значение интеграла в главном порядке, см. обсуждение после ур. (41)], в обоих случаях из (74) мы получаем одинаковый ответ:

$$I_{(d)}^{xy} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v^x(p)(G^R(p))^2 G^A(q-p) \int \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} v^y(p')(G^R(p'))^2 G^A(q-p') = 8\pi\nu D^2 \tau^3 q^x q^y. \quad (75)$$

Подстановка значения интеграла в ур. (71) дает:

$$\Sigma_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -4i\pi eT\nu D^2 \sum_{\varepsilon_l} (\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu}) \frac{\theta(-\varepsilon_l(\Omega_k - \varepsilon_l))\theta(-\varepsilon_{l+\nu}(\Omega_k - \varepsilon_l))}{(|2\varepsilon_l - \Omega_k| + \alpha_n)^2 (|\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu} - \Omega_k| + \alpha_m)}. \quad (76)$$

Область значений фермионной мацубаровской частоты $\varepsilon_l = \pi T(l + 1/2)$ по которой идет суммирование, в соответствии с условиями (74), зависит от соотношения между Ω_k и $\Omega_k + \omega_\nu$. В результате, мы опять имеем три различных области RR , RA и AA , и переменная суммирования l в каждой из них пробегает интервал определенный в ур. (44). Опуская детали вычисления, мы получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = & -ie\nu D^2 \left[\frac{\Omega_{k+\nu} - \alpha_n}{\omega_\nu + \alpha_m - \alpha_n} \psi'_n(|\Omega_k|) - \frac{\Omega_{k+\nu} + \alpha_n}{\omega_\nu - \alpha_m + \alpha_n} \psi'_n(|\Omega_{k+\nu}| + \omega_\nu) \right. \\ & \left. - \frac{\Omega_k - \alpha_m}{(\omega_\nu + \alpha_m - \alpha_n)^2} (\psi_m(|\Omega_k| + \omega_\nu) - \psi_n(|\Omega_k|)) + \frac{\Omega_k + \alpha_m}{(\omega_\nu - \alpha_m + \alpha_n)^2} (\psi_n(|\Omega_{k+\nu}| + \omega_\nu) - \psi_m(|\Omega_{k+\nu}|)) \right]. \quad (77) \end{aligned}$$

3. Аналитическое продолжение

Суммирование по уровням Ландау и аналитическое продолжение производятся аналогично тому, как это было сделано для диаграммы Асламазова-Ларкина. В результате мы получаем ответ для DOS-диаграммы

$$\tilde{\beta}_{\text{DOS}}^{xy} = \frac{e}{\pi^2 T} \sum_m (m+1) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dz \coth \frac{z}{2T} P_m^{c(\text{DOS})}(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2T} \frac{1}{\sinh^2 \frac{z}{2T}} P_m^{s(\text{DOS})}(z) \right). \quad (78)$$

Где $P_m^{c(\text{DOS})}(z)$ и $P_m^{s(\text{DOS})}(z)$ записываются через функции $\kappa_{nm}(z)$ и $s_{nm}(z)$:

$$P_m^{c(\text{DOS})}(z) = \text{Im} \left[L_m^R \kappa_{mm+1}(z) - L_{m+1}^R \kappa_{m+1m}(z) \right], \quad (79a)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{nm}(z) = & -\frac{\alpha^2}{(8\pi T)^2} \frac{\alpha_n - iz}{\alpha_n - \alpha_m} \psi''_n(-iz) + \frac{1}{16\pi T} \left[(3\alpha_m - iz) \psi'_n(-iz) + (\alpha_m + iz) \psi'_m(-iz) \right] + \\ & + \frac{\alpha_m}{\alpha_n - \alpha_m} \left[\psi_m(-iz) - \psi_n(-iz) \right], \quad (79b) \end{aligned}$$

$$P_m^{s(\text{DOS})}(z) = \text{Re} \left[L_m^R s_{mm+1}(z) - L_{m+1}^R s_{m+1m}(z) \right], \quad (80a)$$

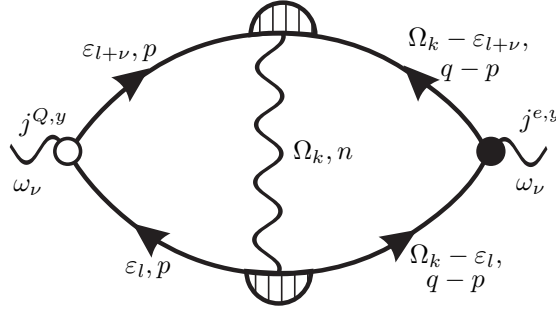
$$s_{nm}(z) = -\frac{\alpha^2}{32\pi T} \frac{\alpha_n + iz}{\alpha_m - \alpha_n} \left[\psi'_n(iz) - \psi'_n(-iz) \right] - \frac{1}{8} (\alpha_m + iz) \left[\psi_n(iz) - \psi_n(-iz) - \psi_m(iz) + \psi_m(-iz) \right]. \quad (80b)$$

С. Диаграммы Маки-Томпсона

Мы переходим к рассмотрению диаграмм Маки-Томпсона. Как и в случае DOS-диаграмм, можно нарисовать несколько диаграмм МТ-типа, которые представлены на Рис. 2, (е)-(ф). Сначала мы покажем, что вклад в главном порядке по $T\tau$ дает только одна диаграмма, а именно, (ф). После чего мы покажем что этот вклад равен нулю.

1. Определение диаграмм, дающих вклад

Рассмотрение диаграмм, дающих вклад в эффект Нернста проводится так же, как и для DOS-диаграмм в Разделе **IV B 1**. А именно, диаграмма (е) на Рис. 2, которая дает вклад в проводимость (она дает т.н. аномальный вклад Маки-Томпсона, см. [20]), в нашем случае, из-за недиагональной структуры токовых операторов, $q^x q^y$ вместо $q^x q^x$, оказывается малой (мы снова не рассматриваем диаграмму с одним пунктиром вместо куперона,

Рис. 6: Обозначения для блока $\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}$.

см. сноску на стр. 14). Таким образом, у нас остается одна диаграмма (f) со своим зеркальным отражением. Вклад от нее в коррелятор $Q^{xy}(\omega_\nu)$ записывается в следующем виде:

$$Q_{\text{MT}}^{xy} = 4T \sum_{n,m} \sum_{\Omega_k} \hat{q}_{mn}^x \hat{q}_{nm}^y L_n(\Omega_k) \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu), \quad (81)$$

где $\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ — проинтегрированный по импульсу и просуммированный по энергии блок из шести функций Грина, двух λ и куперонной лестницы. Один множитель 2 возникает из-за спина, второй — из-за зеркального партнера диаграммы. Используя явные обозначения, показанные на Рис. 6, мы записываем $\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}$ как:

$$\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -eT I_{(f)}^{xy} \sum_{\varepsilon_l} \frac{i(\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu})}{2} \lambda_n(\varepsilon_l, \Omega_k - \varepsilon_l) \lambda_n(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_{l+\nu}) \lambda_m(\varepsilon_{l+\nu}, \Omega_k - \varepsilon_l). \quad (82)$$

Заметим, что множитель $1/2\pi\nu\tau$ был вынесен из куперона (таким образом мы получили λ) в определение интеграла $I_{(f)}^{xy}$:

$$I_{(f)}^{xy} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v^x(p) G(\varepsilon_{l+\nu}, p) G(\Omega_k - \varepsilon_{l+\nu}, q - p) G(\Omega_k - \varepsilon_l, q - p) \times \int \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} v^y(p') G(\varepsilon_l, p') G(\varepsilon_{l+\nu}, p') G(\Omega_k - \varepsilon_l, q - p'). \quad (83)$$

2. Вычисление блока $\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}$

Теперь мы вычисляем интеграл (83) и проводим суммирование по энергии ε_l . Для этого мы снова обращаемся к условиям, накладываемым θ -функциями из вершин λ :

$$\begin{cases} \varepsilon_l, \varepsilon_{l+\nu} > 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_l < 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_{l+\nu} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon_l, \varepsilon_{l+\nu} < 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_l > 0 \\ \Omega_k - \varepsilon_{l+\nu} > 0 \end{cases}. \quad (84)$$

В обоих случаях интеграл элементарно вычисляется, и мы получаем:

$$I^{(a)} = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} v^x(p) G^R(p) [G^A(q-p)]^2 \int \frac{d^2p'}{(2\pi)^2} v^y(p') [G^R(p')]^2 G^A(q-p') = -8\pi\nu D^2 \tau^3 q^x q^y. \quad (85)$$

После чего мы вычисляем сумму:

$$\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = 4i\pi e T \nu D^2 \sum_{\varepsilon_l} (\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu}) \frac{\theta(-\varepsilon_l(\Omega_k - \varepsilon_l))}{(|2\varepsilon_l - \Omega_k| + \alpha_n)} \frac{\theta(-\varepsilon_{l+\nu}(\Omega_k - \varepsilon_{l+\nu}))\theta(-\varepsilon_l(\Omega_k - \varepsilon_{l+\nu}))}{(|2\varepsilon_{l+\nu} - \Omega_k| + \alpha_n)(|\varepsilon_l + \varepsilon_{l+\nu} - \Omega_k| + \alpha_m)}. \quad (86)$$

Однако, в отличие от случаев АЛ и DOS-диаграмм, блок $\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ имеет две области аналитичности вместо трех. Это видно из того, как область суммирования по ε_l зависит от отношения между энергиями Ω_k, ω_ν . А

именно, из (84) можно понять что области RA и AA , определенные в (44), в этом случае не отличаются друг от друга:

$$RR: \Omega_k > 0, \quad l \in (-\infty, -\nu - 1] \cup [k, \infty); \quad (87a)$$

$$RA, AA: \Omega_k < 0, \quad l \in (-\infty, k - \nu - 1] \cup [0, \infty). \quad (87b)$$

Выполняя суммирование при помощи ψ -функций, мы получаем ответ:

$$\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -2ie\nu D^2 \Omega_k \left[\frac{1}{2\omega_\nu} \frac{1}{\alpha_m - \alpha_n + \omega_\nu} \psi_n(|\Omega_k|) + \frac{1}{(\alpha_m - \alpha_n)^2 - \omega_\nu^2} \psi_m(|\Omega_k| + \omega_\nu) - \frac{1}{2\omega_\nu} \frac{1}{\alpha_m - \alpha_n - \omega_\nu} \psi_n(|\Omega_k| + 2\omega_\nu) \right]. \quad (88)$$

Полезно сравнить это вычисление с вычислением вклада от аналогичной диаграммы в поправку к проводимости σ^{xx} . Оказывается, что кроме размерного коэффициента, вершина $\mathcal{I}_{nm}^{(e,e)}(\Omega_k, \omega_\nu)$ отличается от выражения (88) отсутствием множителя Ω_k . Это означает, что свойства симметрии вершины (88) отличаются от случая проводимости:

$$\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RR}(\Omega_k, \omega_\nu) = -\mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RA}(-\Omega_k, \omega_\nu), \quad (89)$$

в то время как для вершины с двумя электрическими токами $\mathcal{I}_{nm}^{(e,e)}(\Omega_k, \omega_\nu)$, из-за отсутствия множителя Ω_k , мы имеем:

$$\mathcal{I}_{nm}^{(e,e)RR}(\Omega_k, \omega_\nu) = \mathcal{I}_{nm}^{(e,e)RA}(-\Omega_k, \omega_\nu). \quad (90)$$

3. Аналитическое продолжение

Мы пропускаем вычисление суммы по уровням Ландау, поскольку оказывается что на этапе аналитического продолжения вклад от диаграммы зануляется. Аналитическое продолжение производится аналогично предыдущим случаям. Мы превращаем сумму в интеграл по контуру, охватывающему вычеты гиперболического котангенса и деформируем контур. Поскольку в нашем случае имеется всего две области аналитичности, см. (87), все выражения выглядят намного проще чем ранее:

$$T \sum_{\Omega_k} L_n(\Omega_k) \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RR}(\Omega_k, \omega_\nu) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \coth \frac{z}{2T} \left[L_n^R \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RR}(-iz, \omega_\nu) - L_n^A \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RA}(-iz, \omega_\nu) \right]. \quad (91)$$

Теперь, используя свойство (89), мы можем записать эту сумму в виде

$$T \sum_{\Omega_k} L_n(\Omega_k) \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RR}(\Omega_k, \omega_\nu) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \coth \frac{z}{2T} \left[L_n^R(-iz) \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RR}(-iz, \omega_\nu) + L_n^R(iz) \mathcal{I}_{nm}^{(e,Q)RR}(iz, \omega_\nu) \right]. \quad (92)$$

Заметив, что мы интегрируем в бесконечных пределах четную по переменной z функцию, умноженную на нечетный по z $\coth \frac{z}{2T}$, легко показать что результат в точности равен нулю. Заметим, что для того, чтобы получить этот результат нам не надо было разлагаться по ω_ν . Поэтому, *диаграмма Маки-Томпсона зануляется* до разложения по ω_ν .

Сравнение этого вычисления с вычислением проводимости очевидно: если бы мы воспользовались бы соотношением (90) вместо (89), мы получили бы произведение нечетной функции и гиперболического котангенса под интегралом. Таким образом, в случае проводимости, проведенное рассуждение неприменимо, и вклад в проводимость от МТ диаграммы этого типа не равен нулю (заметим, что в σ^{xx} также дает вклад диаграмма МТ (e) на Рис. 2).

D. Намагниченность

Намагниченность является термодинамической величиной, и поэтому может быть получена из свободной энергии. А именно, если F — поправка к свободной энергии (в единичном объеме) из-за флуктуационных куперовских пар, соответствующий вклад в намагниченность может быть записан в виде:

$$M^z = -\frac{\partial F}{\partial H}. \quad (93)$$

Поправка к свободной энергии дается суммой петель, состоящих из набора поляризационных операторов (см. Рис. 2 в работе [23]), и может быть выражена через пропагатор сверхпроводящих флуктуаций как

$$F = -T \sum_{\Omega_k} \text{tr}[\log(1 - g\Pi_n(\Omega_k))] = \nu_H T \sum_n \sum_{\Omega_k} \log L_n^{-1}(\Omega_k), \quad (94)$$

где $\Pi_n(\Omega_k)$ — поляризационный оператор, см. [20], $\nu_H = eH/\pi c$ и $L_n(\Omega_k)$ определены в Разделе. III. Самый простой способ вычислить поправку к свободной энергии и, соответственно, намагниченность заключается в том, чтобы переписать сумму по мацубаровским частотам и по уровням Ландау в интеграл (см. [23]). Однако, для того, чтобы представить намагниченность в виде пригодном для получения общей формулы, мы оставляем суммирование по уровням Ландау и превращаем в интеграл только сумму по мацубаровским частотам Ω_k :

$$T \sum_{\Omega_k} \log L_n^{-1}(\Omega_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \coth \frac{w}{2T} \log L_n^{-1}(iw). \quad (95)$$

Для того чтобы избавиться от множителя H перед логарифмом, который содержится в ν_H , мы производим замену переменной интегрирования $w \rightarrow z/H$ и получаем:

$$M^z = \frac{e}{2\pi^2 i c} \frac{\partial}{\partial H} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dz \coth \frac{z}{2TH} \log L_n^{-1} \left(\frac{iz}{H} \right). \quad (96)$$

Вычисляя производную по H , и применяя соотношение $\sum_n f_n = \sum_m (m+1)(f_m - f_{m+1})$, можно переписать намагниченность в виде аналогичном формулам, полученным для АЛ и DOS диаграмм:

$$\frac{cM^z}{T} = \frac{e}{2\pi^2 iT} \sum_m (m+1) \left[\int_0^{\infty} dz \coth \frac{z}{2T} P_m^{c(\text{mag})}(z) + \int_0^{\infty} dz \frac{1}{2T \sinh^2 \frac{z}{2T}} P_m^{s(\text{mag})}(z) \right], \quad (97)$$

где

$$P_m^{c(\text{mag})}(z) = L_m^R M_{mm+1}(z) - L_{m+1}^R M_{m+1m}(z) - L_m^A M_{mm+1}(-z) + L_{m+1}^A M_{m+1m}(-z), \quad (98)$$

$$M_{nm}(z) = -\frac{1}{8\pi T} (2iz + \alpha_m - \alpha_n) \psi'_n(-iz); \quad (99)$$

$$P_m^{s(\text{mag})}(z) = z \log \frac{L_{m+1}(iz)}{L_{m+1}(-iz)} - z \log \frac{L_m(iz)}{L_m(-iz)}. \quad (100)$$

Е. Общая формула

Собирая ответы для АЛ, DOS диаграмм и намагниченности, можно получить общую формулу для коэффициента Нернста. При этом наблюдаются значительные сокращения, и общая формула получается проще чем выражения для отдельных слагаемых:

$$\beta^{xy} = \frac{e}{\pi^2 T} \sum_m (m+1) \left[\int_0^{\Lambda} dz \coth \frac{z}{2T} P_m^{c(\text{tot})}(z) + \int_0^{\Lambda} dz \frac{1}{2T \sinh^2 \frac{z}{2T}} P_m^{s(\text{tot})}(z) \right], \quad (101)$$

где функции $P_m^{c(\text{tot})}(z)$ и $P_m^{s(\text{tot})}(z)$ выражаются через дигамма функции следующим образом:

$$P_m^{c(\text{tot})}(z) = \text{Im} \left[L_m^R T_{mm+1}(z) - L_{m+1}^R T_{m+1m}(z) \right], \quad (102a)$$

$$T_{nm}(z) = \frac{1}{16\pi T} \left[(\alpha_m - iz)(\psi'_n(-iz) - \psi'_m(-iz)) + \frac{\alpha^2}{4\pi T(\alpha_m - \alpha_n)} (\alpha_n - iz) \psi''_n(-iz) \right], \quad (102b)$$

$$P_m^{s(\text{tot})}(z) = \text{Re} \left[L_m^R S_{mm+1}(z) - L_{m+1}^R S_{m+1m}(z) + b_m(z) L_{m+1}^R L_m^A + iz \log \frac{L_{m+1}^R}{L_m^R} \right], \quad (103a)$$

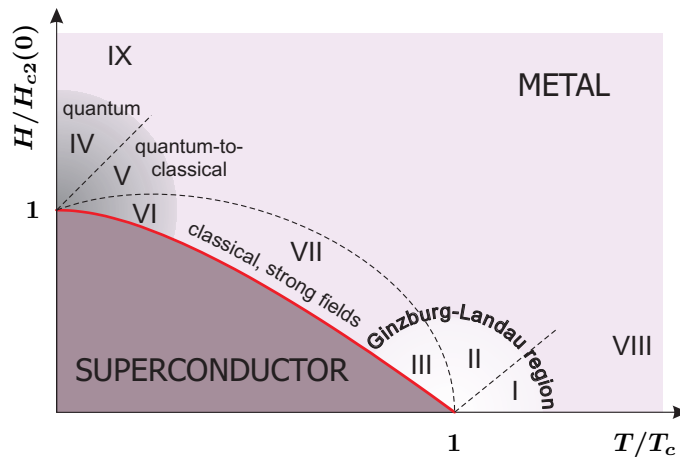


Рис. 7: Области различного асимптотического поведения флуктуационного коэффициента Нернста на $T - H$ фазовой диаграмме.

$$S_{nm}(z) = -\frac{1}{8} \left[(\alpha_n - \alpha_m + 2iz) \psi_n(-iz) + (\alpha_m - \alpha_n) \psi_n(iz) - 2iz \psi_m(-iz) - \frac{\alpha^2(\alpha_n + iz)}{4\pi T(\alpha_m - \alpha_n)} (\psi'_n(-iz) - \psi'_n(iz)) \right], \quad (103b)$$

$$b_m(z) = -\frac{i}{4} (\psi_{m+1}(iz) - \psi_m(-iz)) \operatorname{Im} \left[(\alpha_{m+1} - iz) \psi_{m+1}(-iz) - (\alpha_m - iz) \psi_m(-iz) \right], \quad (103c)$$

В дальнейшем, общая формула будет использована нами для получения асимптотик, а также для численных вычислений в области слабых магнитных полей.

Перед тем как переходить к получению асимптотик, отметим *универсальность* полученного ответа. В отличие от поправок к проводимости [20], функция $\beta^{xy}(T, H)$ зависит только от T/T_c и $H/H_{c2}(0)$, и не зависит от времени свободного пробега τ . Хотя интегрирование по z в формулах (78) и (97) написано в бесконечных пределах, строго говоря, это не так, поскольку интеграл по z не является сходящимся. Однако после того как все вклады собираются в общую формулу, расходящиеся слагаемые сокращаются и зависимость от обрезки исчезает. При этом именно вклад от намагниченности, β_M^{xy} , сокращает расходящиеся (и, соответственно, зависящие от τ) слагаемые в выражении для DOS-диаграммы.

V. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В РАЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Мы начинаем обсуждение асимптотического поведения β^{xy} в различных областях фазовой плоскости $T - H$. Всего можно выделить 9 областей на фазовой диаграмме (см. Рис. 7), где асимптотическое поведение может быть получено в аналитическом виде. Каждая из 9 областей будет последовательно рассмотрена нами в данном разделе в следующем порядке: сначала мы рассмотрим поведение эффекта Нернста в случае слабого магнитного поля и температуре T близкой к T_c (области I-III на Рис. 7). После этого мы перейдем к асимптотикам в квантовой области, т.е. при температурах близких к нулю (области IV-VI), а также мы получим поведение эффекта вблизи произвольной точки на линии перехода (область VII). Наконец, мы получим асимптотики в областях VII и IX, далеких от линии перехода и проведем сравнение с экспериментом при нулевом магнитном поле в широком диапазоне температур.

A. Область слабого магнитного поля

Мы начинаем обсуждение с *классического режима вблизи температуры перехода* T_c : области I, II, III на Рис. 7 характеризуются $\epsilon = \ln(T/T_c) \ll 1$ и $\tilde{h} = H/\tilde{H}_{c2}(0) \ll 1$. Как мы покажем, в этих областях вклад дают только классические флуктуации, описываемые диаграммой Асламазова-Ларкина, и намагниченность. DOS-вклад в окрестности T_c содержит лишнюю степень \tilde{h} и, как следствие, является малым.

Асимптотики в областях I-III могут быть получены как из общей формулы, так и отдельно для каждой диаграммы. Результат не зависит от способа вычисления, но мы воспользуемся последним способом ввиду

того, что он позволяет понять, какие диаграммы дают вклад. С целью сравнения вычислений с работой [14], мы воспользуемся еще не проинтегрированной по частям формулой для диаграммы Асламазова-Ларкина (60).

Для начала, заметим, что из-за условий $\epsilon \ll 1$, $\tilde{h} \ll 1$ вид пропагатора сверхпроводящих флуктуаций существенно упрощается. А именно, мы можем разложить дигамма функцию в формуле (32), и, используя значение $\psi'(1/2) = \pi^2/2$, получить следующее выражение для пропагатора:

$$L_n(\Omega_k) = -\frac{\nu^{-1}}{\epsilon + \frac{\pi}{8T} [|\Omega_k| + \alpha_n]}. \quad (104)$$

Действительно, поскольку $\epsilon \ll 1$, все интегралы и суммы с $L_n(\Omega_k)$ будут набираться на значениях Ω_k , α_n , таких, что

$$\Omega_k/T, \alpha_n/T \sim \epsilon \ll 1. \quad (105)$$

Это означает, что мы можем разложить все ψ -функции которые присутствуют в выражении для диаграмм по Ω_k/T и α_n/T и заменить функцию $\coth \frac{z}{2T}$ разложением при малых z . Кроме того, везде в числителе мы можем пренебречь разницей между m и $m+1$ уровнями Ландау, учтя ее в главном порядке⁴. В результате, тепловой и электрический блок сводятся к своим разложениям по частоте в главном порядке, полученным ранее. Как следует из формулы (46), электрический блок может быть заменен на константу, в то время как тепловой блок (50) зависит от области в которой мы его рассматриваем. В нашем приближении вклад в интеграл по z в формуле (60) дают только слагаемые содержащие одновременно запаздывающий и опережающий пропагаторы (нам нужно «зацепить» полюс), как следствие ответ зависит только от $B^{(Q)RA}$, которое, согласно ур. (50b) равно:

$$B_{nm}^{(Q)RA}(\Omega_k, \omega_\nu) = -\frac{i}{2e} (2\Omega_k + \omega_\nu) B^{(e)}. \quad (106)$$

Полезно сравнить это выражение с вершиной использованной Уссишкином при вычислении эффекта Нернста в рамках диаграммной техники. Из уравнения (21) в работе [14], приводя обозначения в соответствии с Рис. 3, мы получаем:

$$\tilde{B}_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = -\frac{i}{2e} \left(\Omega_k + \frac{\omega_\nu}{2} \right) B^{(e)}. \quad (107)$$

Видно, что использованное в [14] выражение для блока $\tilde{B}_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu)$, отличается в два раза от выражения, полученного в результате точных вычислений:

$$\tilde{B}_{nm}^{(Q)}(\Omega_k, \omega_\nu) = \frac{1}{2} B_{nm}^{(Q)RA}(\Omega_k, \omega_\nu). \quad (108)$$

Это приводит к тому, что полученный ответ оказывается в 2 раза больше чем результат, полученный в [13, 14] и использованный в [20]. Действительно, применив все приближения описанные ранее, из (60) можно получить:

$$Q_{AL}^{xy}(\omega_\nu) = \frac{e\alpha^2}{128T} \omega_\nu \sum_m (m+1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} \left(L_{m+1}^R L_m^A - L_m^R L_{m+1}^A \right). \quad (109)$$

Интегрируя при помощи вычетов и выражая получающуюся сумму по m через ψ -функции, мы получаем вклад диаграммы АЛ в $\tilde{\beta}^{xy}$ в следующем виде:

$$\tilde{\beta}_{AL}^{xy} = 2\beta_0 F(x)/x, \quad (110)$$

где $\beta_0 = k_B e / \pi \hbar = 6.68$ нА/К — квант термоэлектрической проводимости. Функция $F(x)$, уже определенная в ур. (12), зависит от $x = \epsilon / 2\tilde{h}$ — отношения приведенной температуры $\epsilon = \ln \frac{T}{T_c} \approx \frac{T-T_c}{T_c}$ и безразмерного магнитного поля $\tilde{h} = \frac{H}{\tilde{H}_{c2}(0)}$. Магнитное поле обезразмеривается линейной аппроксимацией верхнего критического магнитного поля $\tilde{H}_{c2}(0) = 4cT_c / \pi eD$. Можно заметить, что функциональная зависимость соответствующего

⁴ При этом, необходимо сохранить различие между m и $m+1$ в пропагаторах, поскольку учет этой разницы в конечном порядке означает разложение по \tilde{h}/ϵ , которое является малым только в области I.

вклада в коэффициент Нернста от x совпадает с качественной оценкой (11). Вклад намагниченности в физически наблюдаемую величину β^{xy} [см. ур. (18)] дается

$$\beta_M^{xy} = \beta_0 \left[\ln \frac{\Gamma(1/2 + x)}{\sqrt{2\pi}} - x \psi(1/2 + x) + x \right]. \quad (111)$$

Как мы уже сказали, $\tilde{\beta}_{\text{DOS}}^{xy}$ содержит лишнюю степень магнитного поля $\tilde{h} \ll 1$ по сравнению с β_{AL}^{xy} и β_M^{xy} . В результате, асимптотика для β^{xy} в областях I-III записывается в виде:

$$\beta^{xy} = \beta_0 \left(\log \frac{\Gamma(1/2 + x)}{\sqrt{2\pi}} - 1 + x [1 + \psi(1/2 + x) - 2\psi(x)] \right). \quad (112)$$

В пределе, когда магнитное поле исчезающе мало, $\tilde{h} \ll \epsilon$, (область I), раскладывая ур. (110), получаем $\tilde{\beta}_{\text{AL}}^{xy} = \beta_0(\tilde{h}/2\epsilon)$, что в два раза больше чем результат из [13, 14, 20] (см. обсуждение выше). Теперь намагниченность $\beta_M^{xy} = -\beta_0(\tilde{h}/6\epsilon)$ сокращает только 1/3 от $\tilde{\beta}^{xy}$, и конечный ответ оказывается уже в четыре раза большим, чем ответ полученный в работах [13, 14, 20]:

$$\beta_I^{xy} = \beta_0 \frac{\tilde{h}}{3\epsilon} = \beta_0 \frac{\pi \epsilon D H}{12c(T - T_c)}, \quad \tilde{h} \ll \epsilon \ll 1. \quad (113)$$

В случае $\epsilon \ll \tilde{h}$ (область II), и вблизи линии перехода, при $\tilde{h} + \epsilon \ll \tilde{h}$ (область III), из формулы (112) мы получаем:

$$\beta_{\text{II}}^{xy} = \beta_0 [1 - (\ln 2)/2], \quad \epsilon \ll \tilde{h} \ll 1; \quad (114)$$

$$\beta_{\text{III}}^{xy} = \beta_0 \frac{\tilde{h}}{\epsilon + \tilde{h}} = \beta_0 \frac{H_{c2}(T)}{H - H_{c2}(T)}, \quad \epsilon + \tilde{h} \ll \tilde{h} \ll 1. \quad (115)$$

В. Область низких температур

Теперь мы переходим к рассмотрению квантового режима вблизи верхнего критического магнитного поля $H_{c2}(0) = \pi c T_c / 2 \gamma_E e D$ (области IV, V, VI на Рис. 7), где $\gamma_E = 1.78\dots$ — экспонента константы Эйлера. Теперь намагниченность начинает играть ключевую роль: расходящееся как $1/T$ слагаемое $\beta_M^{xy} = cM^z/T$ в точности сокращает расходящиеся вклады в $\tilde{\beta}^{xy}$ от диаграмм, что является необходимым для выполнения третьего закона термодинамики. В результате, тензор β_{IV}^{xy} стремится к нулю как T при приближении к нулевой температуре.

Переходя к получению асимптотик, мы с самого начала определим безразмерную температуру t , магнитное поле h и величину, определяющую близость к линии перехода, η :

$$t = \frac{T}{T_c}, \quad h = \frac{H}{H_{c2}(0)}, \quad \eta = \frac{H - H_{c2}(t)}{H_{c2}(t)}, \quad (116)$$

которые будут использоваться нами при получении и записи асимптотик. Далее, заметим, что, поскольку мы рассматриваем область вблизи $H_{c2}(0)$, нам нет необходимости вычислять сумму по уровням Ландау. Главный сингулярный вклад будет даваться нулевым уровнем Ландау. Для пропагатора сверхпроводящих флуктуаций на нулевом уровне Ландау близи линии перехода, разложившись по $t \ll 1$ до нулевого порядка, легко получить (см. например [24])

$$L_0(\Omega_k) = -\nu^{-1} \left(\eta + \frac{\gamma_E |\Omega_k|}{\pi T_c} \right)^{-1}. \quad (117)$$

Видно, что интегралы по частоте z будут набираться при $z \sim \eta \ll 1$, таким образом, мы везде кроме пропагатора L_0 можем провести разложение не только по t , но и по z .

Находя сначала по отдельности вклады от диаграмм и намагниченности в области IV, для главного слагаемого можно получить:

$$\tilde{\beta}^{xy} = -\beta_M^{xy} = \beta_0 \frac{1}{\gamma_E t} \ln \eta^{-1}. \quad (118)$$

Как мы уже говорили, нефизическая расходимость $1/T$ при $T \rightarrow 0$ сокращается вкладом намагниченности. Обращаясь к общей формуле (101), можно заметить, что там сокращение слагаемых типа (118) происходит

автоматически. Действительно, тензор $T_{nm}(z)$, определяющий слагаемое $P_m^{c(\text{tot})}(z)$ в (101) при разложении по $T \rightarrow 0$ начинается со слагаемых T^2 . «Синусный» вклад $P_m^{s(\text{tot})}(z)$ ведет себя как z^2 , что, после интегрирования

$$\int_0^\infty dz \frac{z^2}{2T \sinh^2 \frac{z}{2T}} = \frac{2\pi^2 T^2}{3}, \quad (119)$$

приводит к его пропорциональности T^2 . Собирая оба однотипных вклада, и учитывая общий коэффициент T^{-1} , мы получаем ответ, который оказывается отрицательным:

$$\beta_{\text{IV}}^{xy} = -\frac{2\beta_0 \gamma_E t}{9\eta} = -\frac{\beta_0 \pi c T}{9eD[H - H_{c2}(0)]}, \quad t \ll \eta \ll 1. \quad (120)$$

Знак меняется из-за того, что отрицательный вклад от DOS-диаграммы становится больше, чем положительный вклад от АЛ в данной области параметров. Это изменение знака в термоэлектрическом отклике напоминает отрицательное магнетосопротивление в квантовом флуктуационном транспорте, обнаруженное в работе [24] в окрестности $H_{c2}(0)$.

Асимптотики для областей V и VI проще получить из общей формулы, дающей поведение эффекта Нернста вблизи $H_{c2}(0)$ (формула также содержит асимптотику для области IV, уже полученную нами):

$$\beta^{xy} = \beta_0 \left[2 \log \Gamma(r) + \log \left(\frac{r}{2\pi} \right) + \frac{4}{3} \psi'(r) \left(\frac{11}{18} \eta - 2r^2 \right) - 2\psi(r) \left(\frac{7}{27} \frac{\eta}{r} + r \right) + \frac{2}{3} \frac{\eta}{r} \left(\frac{7}{9} \log \frac{r}{\eta} - \frac{1}{r} - \frac{11}{9} \right) + \frac{14}{3} r + \frac{1}{3} \right], \quad (121)$$

где как $r = \eta/(2\gamma_E t)$ обозначено отношение безразмерной температуры и η , измеряющей близость к линии перехода. Сложная комбинация дигамма-функций и логарифмов возникает в результате явной записи интегралов $I_\alpha(\eta, t)$ и $I_\beta(\eta, t)$, определенных в работе [24], а также раскрытия вклада, содержащего логарифм пропагатора.

Асимптотика в переходной квантово-классической области, где H стремится к $H_{c2}(t)$, но при этом остается ограниченным как $t^2/\ln(1/t) \ll \eta \ll t$ (область V), находится из общей формулы (121). Коэффициент β_{xy} теперь оказывается положительным:

$$\beta_{\text{V}}^{xy} = \beta_0 \ln \frac{t}{\eta}, \quad t^2/\ln(1/t) \ll \eta \ll t \ll 1. \quad (122)$$

Наконец, совсем вблизи линии перехода, рядом с $H_{c2}(t)$ ($\eta \ll t^2/\ln(1/t)$, область VI), мы находим:

$$\beta_{\text{VI}}^{xy} = \frac{8\beta_0 \gamma_E^2 t^2}{3\eta}, \quad \eta \ll t^2/\ln(1/t) \ll 1. \quad (123)$$

С. Вблизи линии перехода

Подробно рассмотрев окрестности T_c и $H_{c2}(0)$, мы переходим к получению асимптотики вблизи произвольной точки на линии перехода. Область VII на Рис. 7, характеризующаяся условием $\eta \ll 1$, охватывает широкий диапазон температур и магнитных полей. Учет квантования Ландау является необходимым для получения асимптотик в этой области. Пока мы находимся не при слишком слабом магнитном поле, как и в разделе посвященном окрестности $H_{c2}(0)$, мы можем учитывать только нулевой уровень Ландау. Используя пропагатор нулевого уровня Ландау в виде аналогичном (117),

$$L_0^{-1}(\Omega_k) = -\nu^{-1} \left[\psi'(1/2 + h/4\gamma_E t) \left(\frac{|\Omega_k|}{4\pi T} + \frac{h}{4\gamma_E t} \eta \right) \right]^{-1} \quad (124)$$

и раскладываясь во всех остальных выражениях по z , из общей формулы можно получить следующий ответ

$$\beta_{\text{VII}}^{xy} = \frac{\beta_0}{\eta} \left[1 + \frac{h}{4\gamma_E t} \frac{\psi''(1/2 + h/4\gamma_E t)}{\psi'(1/2 + h/4\gamma_E t)} \right], \quad \eta \rightarrow 0, \quad (125)$$

где, напомним, $h = H/H_{c2}(0)$. Если рассматривать выражения для диаграмм АЛ и DOS по-отдельности, то они оказываются достаточно сложными, однако, при их сложении большинство слагаемых исчезает, и учитывая намагниченность,

$$\beta_{\text{M}}^{xy} = -\frac{\beta_0}{\eta}, \quad (126)$$

можно воспроизвести (125).

Заметим, что полученная асимптотика (125) замечательно сшивается с выражениями полученными для областей III и VI. Вблизи T_c , ур. (125) дает

$$\beta_{\text{VII}}^{xy} = \frac{\beta_0}{\eta}, \quad (127)$$

что совпадает с ответом (115) для области III. С другой стороны, при $T \rightarrow 0$, используя асимптотику (D10), можно получить

$$\beta_{\text{VII}}^{xy} = 8\beta_0 \frac{\gamma_E^2 t^2}{3\eta h^2}, \quad (128)$$

откуда, учитывая, что $h \approx 1$ в области VI, получаем асимптотику (123) при условии $\eta \ll t^2/\ln(1/t)$.

D. Области далекие от линии перехода

Сначала рассмотрим область высоких температур и слабых магнитных полей. Это область VIII на Рис. 7, находящаяся вдали от линии перехода и характеризующаяся условиями $\epsilon \gg 1$, $H \ll H_{c2}(0)$. Аналогично флуктуационной поправке к проводимости [20], главный вклад в эффект Нернста от диаграмм содержит двойную логарифмическую расходимость, зависящую от времени свободного пробега τ , которое определяет ультрафиолетовое обрезание для куперонных мод. Однако, такую же расходимость с противоположным знаком содержит вклад от намагниченности β_M^{xy} . Таким образом, полный ответ не зависит от τ и является универсальным.

С целью продемонстрировать предыдущее утверждение подробнее, рассмотрим сначала вклады от диаграмм и намагниченности по-отдельности. В данной области мы можем разложиться по магнитному полю, оставив только главный порядок. Аналогично области I, тензор β^{xy} получается пропорциональным магнитному полю, так что коэффициент Нернста не зависит от H в главном порядке. Превратив сумму по уровням Ландау в интеграл, и заменив дигамма-функции их асимптотикой (D10) для больших значений аргумента (см. формулу (D10) в Приложении D), можно легко вычислить двойной интеграл и найти вклад в главном порядке по $\epsilon \gg 1$:

$$\beta_{\text{AL}}^{xy} = O(1/\epsilon), \quad (129)$$

$$\beta_{\text{DOS}}^{xy} = -\beta_M^{xy} = \beta_0 \frac{\alpha}{24\pi T} (\log \log \frac{1}{\tau T_c} - \log \epsilon) + O(1/\epsilon). \quad (130)$$

Как видим, главный порядок сокращается. Получить слагаемые порядка $1/\epsilon$, не используя общей формулы, намного сложнее. Применив общую формулу, можно с легкостью получить:

$$\beta_{\text{VIII}}^{xy} = \beta_0 \frac{\alpha}{24\pi T \ln(T/T_c)} = \beta_0 \frac{eDH}{6\pi cT \ln(T/T_c)}, \quad (1, h) \ll t, \quad (131)$$

где α — циклотронная частота для куперовских пар, определенная в (33). Видно, что коэффициент Нернста достаточно быстро убывает с повышением температуры.

В области IX на Рис. 7, которая характеризуется магнитным полем много большим $H_{c2}(0)$ и температурой близкой к нулю, аналогично области VIII, $\tilde{\beta}^{xy}$ расходится как $[\ln \ln(1/T_c \tau) - \ln \ln h]$. Эта расходимость снова сокращается вкладом от намагниченности β_M^{xy} . Из общей формулы, работая в главном порядке по $T \rightarrow 0$, легко получить следующую асимптотику:

$$\beta_{\text{IX}}^{xy} = \beta_0 \frac{\pi T}{3\alpha \ln(H/H_{c2})} = \beta_0 \frac{\pi cT}{12eDH \ln[H/H_{c2}(0)]}, \quad (1, t) \ll h. \quad (132)$$

Из выражений (131) и (132) мы видим, что даже далеко от линии перехода, флуктуационный вклад в эффект Нернста может быть сравнимым или даже параметрически большим, чем ферми-жидкостные слагаемые (см. следующий раздел). Кроме того, поскольку в области слабого магнитного поля и высоких температур β^{xy} убывает как H/T , а в области низких температур и сильного магнитного поля как T/H , очевидно что в промежуточной области при $T \sim \alpha$ сигнал Нернста будет иметь максимум. Этот максимум определяет линию псевдокритического магнитного поля (ghost critical field), которая была обнаружена экспериментально [16, 17].

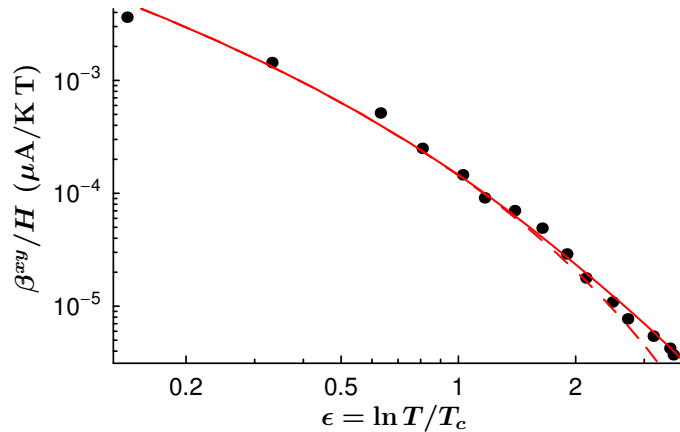


Рис. 8: Сравнение с экспериментальными данными. Черные точки представляют собой экспериментальные данные для величины $\lim_{H \rightarrow 0} \beta^{xy}/H$ в зависимости от $\epsilon = \ln T/T_c$, полученные для пленки $\text{Nb}_{0.15}\text{Si}_{0.85}$ толщиной 12.5 нм [16]. Пунктирная линия показывает теоретические предсказания для строго двумерного случая, сплошная линия соответствует реальному [16] образцу с учетом перехода от двумерной к трехмерной геометрии.

Е. Сравнение с экспериментом

В заключение данного раздела, мы представим сравнение экспериментальных данных с предсказаниями, полученными из общей формулы (101). При этом, мы ограничиваемся только областью слабых магнитных полей. Экспериментальные данные из работы [16] для коэффициента Нернста в пленках $\text{Nb}_{0.15}\text{Si}_{0.85}$ толщиной $d = 12.5$ нм совместно с теоретическими предсказаниями показаны на Рис. 8.

Пунктирная линия показывает наши предсказания для величины $\lim_{H \rightarrow 0} \beta^{xy}/H$ в широком диапазоне температур вплоть до $30 T_c$ (т.е. в областях I, VIII и промежуточной области между ними). При этом, мы использовали значение коэффициента диффузии $D = 0.087 \text{ см}^2/\text{сек}$, что составляет 60% значения, использованного в работе [16] (при $k_F l \sim 1$, точное определение D является затруднительным). Экспериментальные данные могут быть описаны двумерной теорией только в небольшой окрестности вблизи T_c , при $\epsilon \lesssim 2$. Для больших значений ϵ , сверхпроводящая длина когерентности $\xi(T)$ становится меньше чем толщина пленки d , и необходимо учитывать трехмерность образца.

Это может быть сделано заменой спектра $\alpha_n \rightarrow \alpha_n + D(\pi p/d)^2$ (см. ур. (33)) и проведением дополнительного суммирования по $p = 0, 1, \dots$ в уравнении (101). Получающаяся в результате теоретическая кривая показана на Рис. 7. Видно, что поправки в результате учета трехмерности при $\epsilon \gtrsim 2$ становятся существенными и заметно меняют величину эффекта, улучшая согласие с экспериментом.

На основе теоретических предсказаний можно найти температуру, при которой вклад в эффект Нернста от сверхпроводящих флуктуаций становится меньше, чем вклад электронов проводимости. Для отношения ν_{SC}/ν_N на основе выражений (131) и (С16) можно получить следующую оценку

$$\frac{\nu_{SC}}{\nu_N} = \frac{2}{\pi^2 \epsilon} \frac{1}{k_F d} \frac{\mu}{T} \frac{L_T^2}{\ell^2}. \quad (133)$$

Для конкретного образца, используя данные из [16], можно получить при $T = T_c$

$$\frac{\nu_{SC}}{\nu_N} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{\mu}{T}, \quad \frac{\mu}{T} \sim 5 \cdot 10^4. \quad (134)$$

Так как, согласно (133), отношение ν_{SC}/ν_N убывает как T^{-2} с повышением температуры, приблизительно при $T \sim 100\text{K}$ мы будем иметь $\nu_{SC} \sim \nu_N$. Отметим, что учет трехмерности образца отодвигает температуру, при которой нормальный и сверхпроводящий вклады сравниваются, еще дальше.

VI. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе была построена микроскопическая теория флуктуационного эффекта Нернста в двухмерном сверхпроводнике. Наши результаты объясняют большой сигнал Нернста, обнаруженный экспериментально в

сверхпроводящих пленках [16, 17]. Получено универсальное выражение, определяющее коэффициент Нернста во всей фазовой плоскости выше линии перехода. В 9 различных областях фазовой плоскости, допускающих аналитическое рассмотрение, были найдены асимптотики. Обнаружено медленное убывание сигнала Нернста при удалении от линии сверхпроводящего перехода вглубь нормальной области.

Остается открытым вопрос о расхождении результатов, полученных в рамках диаграммной техники, с результатами, полученными из временного уравнения Гинзбурга-Ландау. Проблема существует уже довольно долгое время, при этом ясности в данном вопросе до сих пор не имеется. С одной стороны, в работе Шмидта [25], исходя из представления о сверхпроводящих флуктуациях, как о свободных бозонах, получено соотношение между тепловым и электрическим током с независимым от микроскопических деталей коэффициентом пропорциональности. С другой стороны, в работе Кароли и Маки [21], вышедшей годом позднее, выражения для теплового и электрического токов выводятся из микроскопической теории. Коэффициент пропорциональности между токами является неуниверсальным (зависящим от $T\tau$) и в грязном пределе оказывается *в два раза большим*, чем у Шмидта [25]. При этом результат Кароли и Маки совпадает с нашим соотношением между электрическим и тепловыми токами.

Таким образом, если строить TDGL на основании соотношения между токами, полученного из микроскопии, феноменология воспроизводит метод линейного отклика Кубо [26]. Однако, большая часть работ посвященных TDGL используют «гидродинамическое» соотношение, полученное Шмидтом.

Наконец, в недавно вышедшей работе [27] поведение коэффициента Нернста было исследовано в рамках техники Келдыша. Результаты, полученные в работе [27], качественно совпадают с нашими и отличаются только численными коэффициентами порядка 1. При этом ответы, полученные из техники Келдыша, согласуются с временным уравнением Гинзбурга-Ландау, в котором использовано соотношение Шмидта.

Вероятно, причина расхождения между «гидродинамическим» соотношением и соотношением, полученным на основе микроскопии заключается в виде оператора теплового тока. При этом проблема не решается использованием точного оператора теплового тока, вместо ε -представления, см. Приложение В. Данный вопрос будет являться предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: ТЕНЗОРЫ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ВКЛАД НАМАГНИЧЕННОСТИ

В данном приложении мы остановимся подробнее на особенностях термоэлектрических явлений в магнитном поле. Изложенные результаты были в основном получены в работах [28–30] и будут использоваться при определении коэффициента Нернста через диаграммную технику.

1. Транспортный ток и ток намагниченности

При наличии симметрии по отношению к обращению времени (магнитное поле $H = 0$), в равновесии тепловой и электрический токи отсутствуют, $\mathbf{J}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^Q(\mathbf{r}) = 0$. Соответственно, тензоры термоэлектрических коэффициентов определяются как коэффициенты пропорциональности между возникающим откликом тока и возмущением. Возмущение может создаваться как наличием градиентов электрического и химического потенциалов, $\nabla\varphi$, $\nabla\mu$, так и градиентами температуры ∇T , и «гравитационного поля», $\nabla\psi$ [31]. Каждому возмущению, в принципе, должен соответствовать свой тензор коэффициентов, однако, благодаря соотношениям Эйнштейна [30], всего четыре тензора определяют все семейство термоэлектрических явлений:

$$\begin{cases} \mathbf{J}^e = -\hat{\sigma}[\nabla\varphi + T\nabla(\mu/T)] + T\hat{\beta}[\nabla\psi + (\nabla T)/T], \\ \mathbf{J}^Q = -\hat{\gamma}[\nabla\varphi + T\nabla(\mu/T)] - T\hat{\kappa}[\nabla\psi + (\nabla T)/T]. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

В случае ненулевого магнитного поля в системе начинают циркулировать токи намагниченности и, даже в равновесном состоянии, $\mathbf{J}^e(\mathbf{r}), \mathbf{J}^Q(\mathbf{r}) \neq 0$. В этом случае можно разбить *полные локальные токи* $\mathbf{J}^e(\mathbf{r})$ и $\mathbf{J}^Q(\mathbf{r})$ на *транспортную часть* и *вклад от токов намагниченности*:

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{\text{tr}}^e(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_{\text{mag}}^e(\mathbf{r}), \quad (\text{A2})$$

$$\mathbf{J}^Q(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{\text{tr}}^Q(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_{\text{mag}}^Q(\mathbf{r}). \quad (\text{A3})$$

Здесь транспортные, или, макроскопические токи \mathbf{J}_{tr}^e и \mathbf{J}_{tr}^Q равны нулю в состоянии термодинамического рав-

новесия, а токи намагниченности могут быть представлены как

$$\mathbf{J}_{\text{mag}}^e(\mathbf{r}) = c \nabla \times \mathbf{M}^e(\mathbf{r}), \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{J}_{\text{mag}}^Q(\mathbf{r}) = c \nabla \times \mathbf{M}^Q(\mathbf{r}). \quad (\text{A5})$$

Плотность намагниченности $\mathbf{M}^e(\mathbf{r})$, а также величина $\mathbf{M}^Q(\mathbf{r})$ зависят только от температуры и химического потенциала в данной точке пространства \mathbf{r} . То есть мы можем использовать их равновесное значение, как будто бы во всем пространстве $T = T(\mathbf{r})$ и $\mu = \mu(\mathbf{r})$.

Чтобы лучше понять смысл разбиения (A2)-(A3), вспомним, что аналогичное разделение тока производится при выводе уравнений Максвелла в веществе для учета влияния среды [32]. Микроскопическая плотность тока дается суммой тока проводимости (транспортного) и токов намагниченности: $\mathbf{J}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_{\text{tr}}^e(\mathbf{r}) + c \nabla \times \mathbf{M}^e$. То, что в (A4) стоит именно плотность намагниченности более строго можно показать на основе термодинамических соотношений, см. [20, 29].

Микроскопический ток задан однозначно, и дается усреднением оператора $\mathbf{j}^e(\mathbf{r})$, который может быть получен как вариация действия по калибровочному потенциалу (для теплового тока такой вывод также возможен, см. [33]). В равновесии микроскопический ток равен ротору намагниченности, и транспортный ток равен нулю. Пусть теперь в системе имеется некоторое возмущение. Тогда оно, во-первых, вызовет отклик тока, и, во-вторых, изменит картину распределения токов намагниченности. Если до приложения возмущения (допустим, образец однородный), токи намагниченности текли только по краям, то теперь они появятся и в объеме. Однако, как и прежде, *токи намагниченности не дают вклада в полный ток через образец*. Ток через произвольную поверхность S , полностью пересекающую образец, будет даваться только транспортной составляющей тока:

$$I_S^{e,Q} = \int_S d^2s \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}^{e,Q} = \int_S d^2s \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_{\text{tr}}^{e,Q}, \quad (\text{A6})$$

поскольку

$$\int_S d^2s \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_{\text{mag}}^{e,Q} = \int_S d^2s \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}^{e,Q}) = 0. \quad (\text{A7})$$

Поэтому нас интересует именно транспортная компонента тока. Для ее нахождения мы получим выражения для токов намагниченности в присутствии возмущения, после чего вычтем этот вклад из микроскопического тока.

2. Токи намагниченности в присутствии возмущения

Для определения полных токов \mathbf{J}^e , \mathbf{J}^Q мы вводим соответствующие микроскопические операторы, и с помощью метода Кубо считаем их отклик на возмущение. Вывод, а также вид микроскопических операторов тока $\hat{\mathbf{j}}^e$ и $\hat{\mathbf{j}}^Q$ обсуждается в Приложении В. Здесь же мы, предполагая вид этих операторов заданным, рассмотрим как они меняются при появлении электрического поля или градиента температуры. Ввиду сложностей возникающих при попытке записать возмущение соответствующее градиенту температуры, мы будем рассматривать вместо него т.н. «гравитационное поле», впервые введенное Латтинджером [31]. Пусть $\rho(\mathbf{r})$ и $h(\mathbf{r})$ операторы плотности заряда и энергии:

$$\rho(\mathbf{r}) = e \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad h(\mathbf{r}) = e \sum_{i=1}^N \{h_i, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\}. \quad (\text{A8})$$

Тогда полный гамильтониан, с учетом электрического и гравитационного потенциала, можно записать как

$$H_T = \int d^3\mathbf{r} h_T(\mathbf{r}), \quad (\text{A9})$$

$$h_T(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r})h(\mathbf{r}). \quad (\text{A10})$$

Оказывается, что присутствие потенциалов $\varphi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$ меняет вид микроскопических операторов тока. Если \mathbf{j}_0^e и \mathbf{j}_0^Q — операторы тока в отсутствие возмущения, то в первом порядке по φ , ψ можно получить:

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0^e(\mathbf{r})[1 + \psi(\mathbf{r})], \quad (\text{A11})$$

$$\mathbf{j}^Q(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0^Q(\mathbf{r})[1 + 2\psi(\mathbf{r})] + \mathbf{j}_0^e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}). \quad (\text{A12})$$

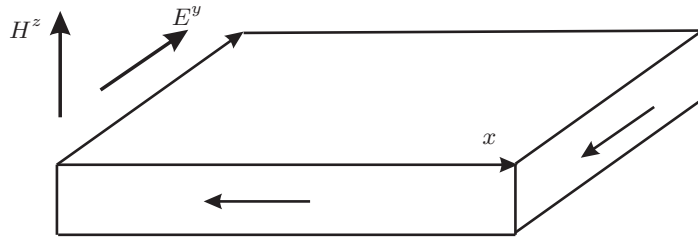


Рис. 9: Образец помещенный в магнитное поле H^z , и возникающие при этом токи намагниченности. Размер образца в направлении оси x считается бесконечным, а вдоль осей y и z предполагается равным L_y и L_z , соответственно.

Так как, в состоянии термодинамического равновесия, токи $\mathbf{J}^e(\mathbf{r})$ и $\mathbf{J}^Q(\mathbf{r})$ совпадают с токами намагниченности, мы можем записать для намагниченностей:

$$\mathbf{M}^e = (1 + \psi)\mathbf{M}_0^e(\mu, T), \quad (\text{A13})$$

$$\mathbf{M}^Q = (1 + 2\psi)\mathbf{M}_0^Q(\mu, T) + \varphi\mathbf{M}_0^e(\mu, T), \quad (\text{A14})$$

где индекс 0 обозначает намагниченности при $\varphi = \psi = 0$. Тогда, для токов намагниченности мы получаем

$$\mathbf{J}_{\text{mag}}^e = -c \frac{\partial \mathbf{M}_0^e}{\partial \mu} \times \nabla \mu - c \frac{\partial \mathbf{M}_0^e}{\partial T} \times \nabla T - c \mathbf{M}_0^e \times \nabla \psi, \quad (\text{A15})$$

$$\mathbf{J}_{\text{mag}}^Q = -c \frac{\partial \mathbf{M}_0^Q}{\partial \mu} \times \nabla \mu - c \frac{\partial \mathbf{M}_0^Q}{\partial T} \times \nabla T - 2c \mathbf{M}_0^Q \times \nabla \psi - c \mathbf{M}_0^e \times \nabla \varphi. \quad (\text{A16})$$

3. Поправки к тензорам термоэлектрических коэффициентов

Воспользовавшись методом Кубо, усредняя корреляторы микроскопических операторов тока, $\hat{\mathbf{j}}^e$ и $\hat{\mathbf{j}}^Q$, мы можем получить связь между откликом в полном токе и возмущением. В частности, можно записать

$$J^{e\alpha} = T \tilde{\beta}^{\alpha\beta} \nabla^\beta \psi, \quad J^{Q\alpha} = \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} E^\beta, \quad (\text{A17})$$

в случае, когда $E^\alpha = 0$ или $\nabla^\alpha \psi = 0$, соответственно, где тензоры $\tilde{\beta}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}$ определяются корреляторами соответствующих операторов тока:

$$Q^{\alpha\beta}(\omega_\nu) = \langle \hat{j}^{e\alpha}(-\omega_\nu) \hat{j}^{Q\beta}(\omega_\nu) \rangle = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_\nu \tau} \langle T_\tau \hat{j}^{e\alpha}(\tau, \mathbf{r}) \hat{j}^{Q\beta}(0, \mathbf{r}') \rangle, \quad (\text{A18})$$

$$\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} = T \tilde{\beta}^{\alpha\beta} = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}[Q^{\alpha\beta}(-i\omega + 0)]}{\omega}. \quad (\text{A19})$$

Поскольку именно транспортные токи удовлетворяют системе (A1), вычитая из (A17) вклад от токов намагниченности (A15)-(A16) при условии $\nabla T = \nabla \mu = 0$, мы получаем следующие выражения для тензоров $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\beta} = \tilde{\beta} + \frac{c}{T} \hat{\epsilon} \cdot \mathbf{M}_0^e, \quad \hat{\gamma} = \tilde{\gamma} + c \hat{\epsilon} \cdot \mathbf{M}_0^e, \quad (\text{A20})$$

как $\hat{\epsilon}$ здесь обозначена тензорная запись антисимметричного ϵ -символа с тремя индексами. Записав это в компонентах, и, опуская в дальнейшем индекс e у намагниченности, мы получим:

$$\beta^{\alpha\beta} = \tilde{\beta}^{\alpha\beta} + \frac{c}{T} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} M^\gamma, \quad \gamma^{\alpha\beta} = \tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + c \epsilon^{\alpha\beta\gamma} M^\gamma. \quad (\text{A21})$$

4. Качественное рассмотрение

Попробуем получить поправку (A21) к тензору $\hat{\gamma}$, пользуясь качественными соображениями, изложенными в работе [28]. Для этого рассмотрим однородный образец с гранями перпендикулярными осям, в магнитном

поле, направленном вдоль оси z (см. Рис. 9). В равновесном состоянии, в силу однородности образца, токи намагниченности в объеме будут отсутствовать, так что $\mathbf{J}^{e,Q} = \mathbf{J}_{\text{tr}}^{e,Q}$. Кроме этого, будут течь одинаковые по величине и противоположно направленные токи по граням $y = 0$, $y = L_y$. Эти токи не исчезнут, даже если мы будем считать образец бесконечно длинным вдоль оси x .

Теперь включим электрическое поле E_y , направленное вдоль оси y . Вместо того, чтобы рассматривать как изменяются токи в объеме образца, обратимся к его граням. Согласно условию (A6), токи намагниченности не дают вклад в общий ток. То есть токи текущие по граням $y = 0$ и $y = L_y$ компенсируют возникающий ток в объеме образца. Вычислим поток поток электростатической энергии, направленный вдоль оси x , соответствующий краевым токам. Для плотности поверхностного потока электростатической энергии по грани $y = 0$ мы имеем (ср. с последним слагаемым в уравнении (A16)):

$$w^{Ex}(0) = -j^{ex}(0)\varphi(0) = -cM^z\varphi(0), \quad (\text{A22})$$

где $\varphi(0)$ — значение электростатического потенциала на грани $y = 0$. Суммарный поток электростатической энергии по граням $y = 0$ и $y = L_y$ равен:

$$L_z[w^{Ex}(L_y) + w^{Ex}(0)] = cM^z L_z[\varphi(L_y) - \varphi(0)] = cM^z L_z L_y \frac{d\varphi}{dy} = -cM^z E_y L_z L_y. \quad (\text{A23})$$

Этому потоку соответствует добавка к плотности макроскопического потока энергии в объеме образца

$$\Delta J^{Qx} = cM^z E_y. \quad (\text{A24})$$

Отсюда, используя определение (A17), найдем

$$\gamma^{xy} = \tilde{\gamma}^{xy} + cM^z. \quad (\text{A25})$$

Стоит отметить, что полученная аналогичным методом в работе [28], поправка к тензору $\hat{\beta}$ отличается от ур. (A21). Это связано с тем, что тензор $\hat{\beta}$ определен в [28] как отклик на градиент температуры, и, в силу отсутствия соотношений Эйнштейна для полных токов, не совпадает с тензором $\hat{\beta}$ вычисляемым как отклик на $\nabla\psi$ через диаграммную технику.

ПРИЛОЖЕНИЕ В: МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ТЕПЛОВОГО ТОКА

Здесь мы остановимся подробнее на форме микроскопического оператора теплового тока. Оператор теплового тока может быть получен как из уравнения непрерывности, так и из условия инвариантности по отношению к произвольной (зависящей от пространственных координат) репараметризации времени [33]. Мы воспользуемся первым способом. Уравнение непрерывности связывает производную от плотности энергии с тепловым током:

$$\dot{h}(r) + \nabla \cdot \mathbf{j}^Q(r) = 0. \quad (\text{B1})$$

Плотность Гамильтониана в импульсном представлении записывается как

$$h = \sum_p \varepsilon_p \psi_{\alpha p}^+ \psi_{\alpha p} + \sum_{j,p,p'} U_{\text{imp}} e^{i(p-p')R_j} \psi_{\alpha p'}^+ \psi_{\alpha p} + \frac{1}{2} \sum_{p,p',q} V(q) \psi_{\alpha p+q}^+ \psi_{\beta p'-q}^+ \psi_{\beta p'} \psi_{\alpha p}, \quad (\text{B2})$$

где $\varepsilon_p = p^2/(2m)$, потенциал примесей $U_j(p' - p) = U_{\text{imp}}$ предполагается не зависящим от импульса, $V(q)$ — взаимодействие в куперовском канале. Производную от плотности энергии мы находим, коммутируя фурье-образ от локальной плотности гамильтониана $h(\mathbf{k})$ с (B2), после чего из уравнения непрерывности получаем:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}^Q(\mathbf{k}) = -\dot{h}(\mathbf{k}) = i[h(\mathbf{k}), h]. \quad (\text{B3})$$

Вычисляя коммутатор, для теплового тока мы получаем [34]:

$$\mathbf{j}^Q = \sum_p \varepsilon_p \frac{\mathbf{p}}{m} \psi_{\alpha p}^+ \psi_{\alpha p} + \sum_{j,p,p'} U_{\text{imp}} e^{i(p-p')R_j} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} \psi_{\alpha p'}^+ \psi_{\alpha p} + \sum_{p,p',q} \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} V(q) \psi_{\alpha p+q}^+ \psi_{\beta p'-q}^+ \psi_{\beta p'} \psi_{\alpha p}. \quad (\text{B4})$$

Видно, что, в отличие от оператора электрического тока, оператор теплового тока содержит несколько разных вкладов. В частности, наличие взаимодействия приводит к появлению вершины четвертого порядка. Таким

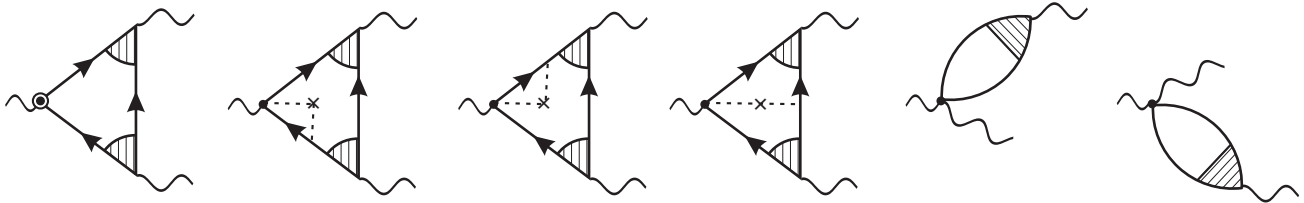


Рис. 10: Все диаграммы, которые надо учитывать для вычисления тепловой вершины $B^{(Q)}$, при использовании полной формы оператора теплового тока. Точка обозначает оператор скорости, точка в кружке — оператор скорости умноженный на ε_p .

образом, в общем случае, наличие взаимодействия приводит к существенному усложнению формы оператора теплового тока.

Однако, в случае короткодействующего взаимодействия, форма оператора теплового тока (B4) оказывается вполне эквивалентной т.н. ε -представлению тепловой вершины, которое использует производную по времени:

$$\mathbf{j}^Q = \frac{i}{2} \sum_p \frac{\mathbf{p}}{m} (\psi_{\alpha p}^+ \dot{\psi}_{\alpha p} - \dot{\psi}_{\alpha p}^+ \psi_{\alpha p}). \quad (\text{B5})$$

Данный вопрос обсуждался в работах [33, 35, 36] в общем случае. Кроме того, в работе Рейзера и Сергеева [19] был вычислен тепловой блок $B^{(Q)}$ (см. Раздел IV A 2) с использованием оператора теплового тока в виде (B4). Учет первых четырех диаграмм, изображенных на Рис. 10, в главном порядке по $T\tau$ приводит к тем же результатам, что и вычисление с ε -представлением тепловой вершины (B5). Две оставшиеся диаграммы из Рис. 10 оказываются малы по обратному кондактансу. Действительно, последнее слагаемое в выражении (B4) содержит полусумму импульсов p и p' , которая оказывается равна импульсу втекающему через пропагатор сверхпроводящих флуктуаций. Таким образом, нам не надо будет раскладываться по внутреннему импульсу бегущему в поляризационной петле, и следовательно, мы не заработаем «лишнего» множителя $v_F^2\tau$. С учетом множителя ν^{-1} , который содержится в $V(q)$, мы получаем малость по νD , т.е. по кондактансу.

Таким образом, хотя и в общем случае использование ε -представления для тепловой вершины не эквивалентно полному выражению для оператора теплового тока, в случае сверхпроводящих флуктуаций обе формы оператора теплового тока оказываются эквивалентными.

ПРИЛОЖЕНИЕ С: ЭФФЕКТ НЕРНСТА В НОРМАЛЬНОМ МЕТАЛЛЕ

В данном приложении мы проведем детальное вычисление коэффициента Нернста в нормальном металле. В отличие от вклада сверхпроводящих флуктуаций, нам необходимо вычислить обе компоненты тензора β , β^{xy} и β^{xx} . После чего, воспользовавшись известными значениями проводимости, σ^{xx} и σ^{xy} мы воспроизведем результат, полученный в работе [1].

Мы вычисляем коррелятор теплового и электрического токов, $Q^{\alpha\beta}(\omega_\nu)$, который, согласно (A19), дает нам тензор $\beta^{\alpha\beta}$. Данный коррелятор определяется одной диаграммой, являющейся петлей из электронных функций Грина. В вершинах стоят операторы электрического и теплового тока (22), соответственно.

1. Недиагональная компонента тензора β

Сначала мы рассмотрим вклад в недиагональную компоненту тензора β , определяющийся $Q^{xy}(\omega_\nu)$. Мы начинаем рассмотрение для случая трех измерений, имея ввиду в дальнейшем получение формулы, которая верна и для двух измерений. В этом случае, кроме суммы по уровням Ландау мы имеем дополнительный интеграл по импульсу, и можем записать:

$$Q^{xy}(\omega_\nu) = 2\tilde{\nu}_H T \int \frac{dp}{2\pi} \sum_{\varepsilon_k} \sum_{mn} \left[i(\varepsilon_k + \omega_\nu/2) \hat{v}_{nm}^y \right] \left[-e \hat{v}_{mn}^x \right] G(\varepsilon_k, m, p) G(\varepsilon_{k+\nu}, n, p), \quad (\text{C1})$$

где множитель 2 возникает из-за учета спина, первая скобка под суммой соответствует тепловому току, а вторая — электрическому. Электронная функция Грина определена как

$$G(\varepsilon, n, p) = \frac{1}{i\varepsilon - \omega_c(n + 1/2) - p^2/2m + \mu + i \text{sign}(\varepsilon)/2\tau(i\varepsilon)}, \quad (\text{C2})$$

$\tilde{\nu}_H = eH/2\pi c$ — плотность состояний на уровне Ландау (подчеркнем, что элементарный заряд тут равен e , а не $2e$ как это было сверхпроводящем случае), и $\omega_c = eH/mc$ — циклотронная частота. Используя матричные элементы для $\hat{q} = m\hat{v}$ из уравнения (52) с заменой $2e \rightarrow e$ мы получаем:

$$Q^{xy}(\omega_\nu) = \frac{e\omega_c\tilde{\nu}_H}{m} T \sum_{\epsilon_k} (\epsilon_k + \omega_\nu/2) \int \frac{dp}{2\pi} \sum_n (n+1) [G(\epsilon_k, n+1, p)G(\epsilon_{k+\nu}, n, p) - G(\epsilon_k, n, p)G(\epsilon_{k+\nu}, n+1, p)]. \quad (C3)$$

Откуда, вводя обозначение $\omega_c(n+1/2) + p^2/2m = \mu + \xi$, легко получить

$$Q^{xy}(\omega_\nu) = \frac{e\tilde{\nu}_H}{m} T \sum_{\epsilon_k} (\epsilon_k + \omega_\nu/2) \int \frac{dp}{2\pi} \sum_n [(\mu + \xi)_{xy} + \omega_c/2] [G_k(\xi + \omega_c)G_{k+\nu}(\xi) - G_k(\xi)G_{k+\nu}(\xi + \omega_c)], \quad (C4)$$

где $(\mu + \xi)_{xy} = \omega_c(n+1/2)$. Так как мы заинтересованы в случае слабого магнитного поля, мы можем разложить по циклотронной частоте ω_c , и оставить только главное слагаемое, линейное по H . После этого, мы получаем

$$\begin{aligned} Q^{xy}(\omega_\nu) &= \frac{e\omega_c}{m} T \sum_{\epsilon_k} (\epsilon_k + \omega_\nu/2) \int d\xi \nu(\xi) (\mu + \xi) \langle n_x^2 + n_y^2 \rangle [G_k^2 G_{k+\nu} - G_k G_{k+\nu}^2] \\ &= \frac{2e\omega_c}{dm} T \sum_{\epsilon_k} (\epsilon_k + \omega_\nu/2) \int d\xi \nu(\xi) (\mu + \xi) [G_k^2 G_{k+\nu} - G_k G_{k+\nu}^2]. \end{aligned} \quad (C5)$$

Здесь все функции Грина зависят от ξ , а как d обозначена размерность пространства. Легко проверить, что, если не учитывать дополнительного импульса p , мы воспроизведем ответ (C5) с $d = 2$, и, таким образом, полученное выражение применимо для любой размерности.

Следующим шагом мы выполняем аналитическое продолжение

$$\begin{aligned} Q^{xy}(-i\omega) &= \frac{2e\omega_c}{dm} \int d\xi \nu(\xi) (\mu + \xi) \\ &\quad \times \int \frac{dz}{4\pi} \left(\tanh \frac{z + \omega}{2T} - \tanh \frac{z}{2T} \right) (z + \omega/2) [(G^R(z + \omega))^2 G^A(z) - G^R(z + \omega) (G^A(z))^2], \end{aligned} \quad (C6)$$

опуская при этом слагаемые, содержащие произведение двух запаздывающих или двух опережающих функций Грина, поскольку они исчезают после интегрирования по ξ . Разложение по ω теперь производится элементарно:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Q^{xy}(-i\omega)}{\omega} = \frac{2e\omega_c}{dm} \int d\xi \nu(\xi) (\mu + \xi) \int \frac{dz}{8\pi T} \frac{z}{\cosh^2(z/2T)} [(G^R(z))^2 G^A(z) - G^R(z) (G^A(z))^2] \quad (C7)$$

Вычисляя интегралы по ξ при помощи соотношения $G^R G^A (G^R - G^A) = i\tau (G^R - G^A)^2$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Q^{xy}(-i\omega)}{\omega} &= \frac{-2ie\omega_c}{dm} \int \frac{d\varepsilon}{2T} \frac{\varepsilon \nu(\varepsilon) (\mu + \varepsilon) \tau^2(\varepsilon)}{\cosh^2(\varepsilon/2T)} = \\ &= \frac{-2ie\omega_c}{dm} \frac{\partial(\nu\mu\tau^2)}{\partial\mu} \int \frac{d\varepsilon}{2T} \frac{\varepsilon^2}{\cosh^2(\varepsilon/2T)} = \frac{-4\pi^2 ie\omega_c T^2}{3dm} \frac{\partial(\nu\mu\tau^2)}{\partial\mu}. \end{aligned} \quad (C8)$$

И, наконец, мы получаем ответ для β^{xy} :

$$\beta^{xy} = \frac{4\pi^2 e\omega_c T}{3dm} \frac{\partial(\nu\mu\tau^2)}{\partial\mu}, \quad (C9)$$

совпадающий с выражением полученным Зондхаймером [1].

2. Термоэдс

Переходя теперь в вычислению термоэдс, определяющейся β^{xx} , мы записываем для соответствующего коррелятора в трехмерии:

$$Q^{xx}(\omega_\nu) = \frac{-ie\omega_c\tilde{\nu}_H}{m} T \sum_{\epsilon_k} (\epsilon_k + \omega_\nu/2) \int \frac{dp}{2\pi} \sum_n (n+1) [G(\epsilon_k, n+1, p)G(\epsilon_{k+\nu}, n, p) + G(\epsilon_k, n, p)G(\epsilon_{k+\nu}, n+1, p)] \quad (C10)$$

Полагая магнитное поле равным нулю, мы получаем:

$$Q^{xx}(\omega_\nu) = \frac{-ie}{m} T \sum_{\varepsilon_k} (\varepsilon_k + \omega_\nu/2) \int d\xi \nu(\xi)(\mu + \xi) \langle n_x^2 + n_y^2 \rangle [2G_k G_{k+\nu}]$$

$$= \frac{-2ie}{dm} T \sum_{\varepsilon_k} (\varepsilon_k + \omega_\nu/2) \int d\xi \nu(\xi)(\mu + \xi) [2G_k G_{k+\nu}]. \quad (C11)$$

Далее, выполняя те же преобразования что и в случае вычисления β^{xy} , мы получаем

$$Q^{xx}(-i\omega) = \frac{-2ie}{dm} \int d\xi \nu(\xi)(\mu + \xi) \int \frac{d\varepsilon}{4\pi} \left(\tanh \frac{\varepsilon + \omega}{2T} - \tanh \frac{\varepsilon}{2T} \right) (\varepsilon + \omega/2) [2G^R(\varepsilon + \omega)G^A(\varepsilon)]. \quad (C12)$$

Что, после разложения по ω дает:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Q^{xx}(-i\omega)}{\omega} = \frac{-2ie}{dm} \int d\xi \nu(\xi)(\mu + \xi) \int \frac{d\varepsilon}{8\pi T} \frac{\varepsilon}{\cosh^2(\varepsilon/2T)} [2G^R(\varepsilon)G^A(\varepsilon)], \quad (C13)$$

и приводит к следующему ответу

$$\beta^{xx} = \frac{4\pi^2 e T}{3dm} \frac{\partial(\nu\mu\tau)}{\partial\mu}. \quad (C14)$$

3. Коэффициент Нернста

Собирая полученные ответы (C9) и (C14), и подставляя их в соотношение (15), для коэффициента Нернста мы получаем:

$$\nu_N = \frac{1}{H} \frac{\beta^{xy}\sigma^{xx} - \beta^{xx}\sigma^{xy}}{(\sigma^{xx})^2 + (\sigma^{xy})^2} = \frac{4\pi^2 e \omega_c T}{3dm\sigma H} \left(\frac{\partial(\nu\mu\tau^2)}{\partial\mu} - \tau \frac{\partial(\nu\mu\tau)}{\partial\mu} \right) = \frac{4\pi^2 e^2 T}{3dm^2 c \sigma} \nu\mu\tau \frac{\partial\tau}{\partial\mu}. \quad (C15)$$

Здесь мы пренебрегли σ^{xy} в знаменателе, а в числителе использовали $\sigma^{xy} = (\omega_c \tau)\sigma^{xx}$. Подставляя в полученное выражение $\sigma = \sigma^{xx} = 2e^2 \nu D$, мы воспроизводим результат Зондхаймера [1]:

$$\nu_N = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{mc} \frac{\partial\tau}{\partial\mu}, \quad (C16)$$

который оказывается верным как в двухмерном, так и в трехмерном случаях.

ПРИЛОЖЕНИЕ D: НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИГАММА-ФУНКЦИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ

Дигамма-функция является производной гамма-функции Эйлера и определяется следующим образом:

$$\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} \Gamma(z) = \lim_{n_c \rightarrow \infty} \left\{ \ln n_c - \sum_{n=0}^{n_c-1} \frac{1}{n+z} \right\}. \quad (D1)$$

Ее производные выражаются уже сходящимися рядами,

$$\psi^{(N)}(z) = (-)^{N+1} N! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^{N+1}}, \quad (D2)$$

и могут быть переписаны через дзета-функции Гурвица с целочисленным первым аргументом:

$$\psi^{(N)}(z) = (-)^{N+1} N! \zeta(N+1, z). \quad (D3)$$

Это позволяет получить выражения для значения дигамма-функции и ее производных в точке $z = 1/2$ через обычную дзета-функцию:

$$\psi'(1/2) = 3\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}, \quad (D4)$$

$$\psi''(1/2) = -14\zeta(3). \quad (D5)$$

Кроме определения, нами будут использоваться также следующие функциональные и асимптотические соотношения:

$$\psi(1/2) = -\ln(4\gamma_E) = -2\ln 2 - C_{\text{Euler}}, \quad (\text{D6})$$

где $\gamma_E = e^{C_{\text{Euler}}} = 1.78\dots$,

$$\psi(1+z) - \psi(z) = \frac{1}{z}, \quad (\text{D7})$$

$$\psi(1/2+iz) - \psi(1/2-iz) = \pi i \tanh \pi z. \quad (\text{D8})$$

Для больших значений аргумента $|z| \gg 1$,

$$\psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2}, \quad (\text{D9})$$

$$\psi(1/2+z) \approx \ln z + \frac{1}{24z^2}. \quad (\text{D10})$$

Все суммы по мацубаровским частотам или уровням Ландау вычисляются разложением суммируемой дроби на простейшие и использования определения дигамма-функции и ее производных (D1) и (D2).

-
- [1] E. H. Sondheimer, Proc. R. Soc. A **193**, 484 (1948).
 [2] Z. A. Xu et al., Nature **406**, 486 (2000).
 [3] Y. Wang et al., Phys. Rev. B **64**, 224519 (2001).
 [4] Y. Wang et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 257003 (2002).
 [5] C. Capan et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 056601 (2002).
 [6] C. Capan et al., Phys. Rev. B **67**, 100507 (2003).
 [7] H. H. Wen et al., Europhys. Lett. **63**, 583 (2003).
 [8] Z. A. Xu et al., Phys. Rev. B **72**, 144527 (2005).
 [9] Y. Wang, L. Li, and N. P. Ong, Phys. Rev. B **73**, 024510 (2006).
 [10] P. Li and R. L. Greene, Phys. Rev. B **76**, 174512 (2007).
 [11] D. Podolsky, S. Raghu, and A. Vishwanath, Phys. Rev. Lett. **99**, 117004 (2007).
 [12] S. Raghu, D. Podolsky, A. Vishwanath, and D. A. Huse, arXiv:0801.2925v2 (2008).
 [13] I. Ussishkin, S. L. Sondhi, and D. A. Huse, Phys. Rev. Lett. **89**, 287001 (2002).
 [14] I. Ussishkin, Phys. Rev. B **68**, 024517 (2003).
 [15] I. Ussishkin and S. L. Sondhi, Int. J. Mod. Phys. B **18**, 3315 (2004).
 [16] A. Pourret et al., Nature Phys. **2**, 683 (2006).
 [17] A. Pourret et al., Phys. Rev. B **76**, 214504 (2007).
 [18] S. Ullah and A. T. Dorsey, Phys. Rev. Lett. **65**, 2066 (1990); Phys. Rev. B **44**, 262 (1991).
 [19] M. Yu. Reizer and A. V. Sergeev, Phys. Rev. B **50**, 9344 (1994).
 [20] А. И. Ларкин, А. А. Варламов, Теория флуктуаций в сверхпроводниках, Добросвет, Москва 2007.
 [21] C. Caroli and K. Maki, Phys. Rev. **164**, 591 (1967).
 [22] Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **41**, 1241 (1961).
 [23] М. Н. Сербин, Диплом на соискание степени бакалавра, Москва 2007.
 [24] V. M. Galitski and A. I. Larkin, Phys. Rev. B. **63**, 174506 (2001).
 [25] A. Schmid, Phys. Kondens. Mater. **5**, 302 (1966).
 [26] A. Houghton and K. Maki, Phys. Rev. B **3**, 1625 (1971).
 [27] K. Michaeli and A. Finkel'stein, Arxiv preprint arXiv:0812.4268 (2008).
 [28] Ю. Н. Образцов, ФТТ, **6**, 414 (1964).
 [29] K. Maki, Phys. Rev. Lett. **21**, 1755 (1968).
 [30] N. R. Cooper, B. I. Halperin, and I. M. Ruzin, Phys. Rev. B **55**, 2344 (1997).
 [31] J. M. Luttinger, Phys. Rev. **135**, A1505 (1964).
 [32] Д. В. Сивухин, Общий курс физики, Т. 3: Электричество и магнетизм, стр. 253, М., Наука, 1977.
 [33] J. Moreno and P. Coleman, Arxiv preprint cond-mat/9603079.
 [34] J. S. Langer, Phys. Rev. **128**, 110 (1962).
 [35] R. Raimondi, G. Savona, P. Schwab, and T. Lück, Phys. Rev. B **70**, 155109 (2004).
 [36] I. Paul and G. Kotliar, Phys. Rev. B **67**, 115131 (2003).