

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(Государственный Университет)

Магистерский диплом

**Прохождение неравновесного
электрона через одномерную
неупорядоченную систему.**

Студент 428 гр. Пикулин Д.И.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Иоселевич А.С.

Москва, 2010г.

Содержание

1	Введение	2
2	Физическая модель и механизм движения горячей частицы в холодной неупорядоченной проволоке	3
2.1	Локализованные электроны и холодный термостат	3
2.2	Квазирезонансы и “лестницы”	5
3	Кинетическое уравнение и его решение в экспоненциальном приближении	7
3.1	Экспоненциальное приближение	8
4	Функция распределения логарифма проицаемости	11
4.1	Общие соотношения и точные результаты для коротких проволок	11
4.2	Длинные проволоки: численные результаты	12
4.3	Гипотеза скейлинга: слишком грубое приближение	17
4.4	Насколько низкой должна быть температура термостата?	21
4.5	Асимптотика высокой прозрачности	22
4.6	Асимптотика низкой прозрачности	25
4.7	Недостаточность диффузионного приближения	28
5	Конкретные физические эффекты в различных экспериментальных условиях	29
5.1	Зависимость тока от напряжения на инжекторе	32
5.2	Термоэдс: зависимость тока от температуры инжектора . .	33
6	Случай многих проволок, соединенных параллельно	34
7	Корреляционные эффекты при изменении параметров системы	37
7.1	Изменение проицаемости при сдвиге уровня Ферми в проволоке	37
7.2	“Подвижные контакты”: зависимость от положения контактов с резервуарами	38
7.3	“Прямая инжекция”: зависимость от положения инжектора	39
8	Заключение	41

1 Введение

Электронный транспорт в одномерных неупорядоченных системах исследуется на протяжении последних 50 лет [1, 2, 3]. Было доказано, что в невзаимодействующей системе все состояния локализованы при произвольной степени беспорядка [4]. Проницаемость \mathcal{T} такой системы экспоненциально падает с ее длиной L . Для сильно неупорядоченной цепочки функция распределения вероятностей для логарифма проницаемости $S = -\ln \mathcal{T}$ гауссова [5, 6]:

$$P(S) \propto \exp \left\{ -(S - \bar{S})^2 / (\Delta S)^2 \right\}, \quad (1)$$

$$\bar{S}(L) \simeq L/a, \quad \Delta S(L) \simeq B(L/a)^{1/2}, \quad (2)$$

где a – радиус локализованных состояний, B – зависящий от модели численный коэффициент (например, для модели случайных рассеивателей, предложенной в [5, 6], доказано, что $B < \pi/\sqrt{3}$ и, скорее всего, $B = 1$). Формула (2) описывает центральную часть распределения (т.е., область $|S - \bar{S}| \ll \bar{S}$), где доминирует нерезонансное туннелирование. Негауссов хвост распределения (область $|\bar{S} - S| \sim \bar{S}$) определяется прямым резонансным туннелированием через всю систему.

Таким образом, кондактанс G невзаимодействующей системы экспоненциально спадает с ростом L и равен нулю в термодинамическом пределе (при $L \rightarrow \infty$). Также обращается в нуль и проводимость невзаимодействующей системы. Взаимодействие (например, с фононами) ведет к конечной равновесной проводимости σ прыжкового типа [3, 7]. При некоторой длине системы $L \sim L_0(T)$ экспоненциальная зависимость $G(L)$ сменяется степенной $G = \sigma/L$, где σ экспоненциально зависит от температуры системы T . Соответствующие вычисления были аккуратно проделаны в работах [8, 9]. Было показано, что проводимость длинной цепочки определяется редкими флуктуационными разряжениями в плотности состояний около уровня Ферми, что приводит к активационной зависимости проводимости от температуры системы:

$$\sigma \simeq \exp \left\{ -T_0/2T \right\}, \quad T_0 = 1/ga, \quad (3)$$

где g – средняя плотность состояний около уровня Ферми. Подчеркнем, что (3) не соответствует закону Мотта, который выполняется в более высоких размерностях [3, 10].

Неравновесная прыжковая проводимость в сильных полях была исследована в работах [11, 12, 13, 14]. В этом случае ток через цепочку сильно зависит от приложенного напряжения, а зависимость от температуры системы становится второстепенной. Она полностью исчезает в

пределе очень сильного поля $e\mathcal{E} \gg \sqrt{TT_0/\ln(L/a\sqrt{T_0/T})}$, где можно получить:

$$\sigma \simeq \exp \left\{ -\sqrt{8T_0/e\mathcal{E}a} \right\}. \quad (4)$$

Важными моментами этой модели является неоднородное распределение химического потенциала по цепочке и сильное отличие чисел заполнения локализованных состояний от равновесных.

В нашей работе рассматривается неравновесная ситуация, отличная от рассмотренных ранее: ток в системе определяется относительно малым числом неравновесных частиц, инжектируемых внешним источником. Эти частицы взаимодействуют с термостатом, но не могут, из-за своей малочисленности, вывести последний из равновесия. Таким образом, электронные числа заполнения отличаются от равновесных незначительно, а ток сильно (как мы увидим – экспоненциально) зависит от длины системы L . Кроме того, мы предполагаем, что проволока не настолько длинна, чтобы инжектируемые частицы успевали окончательно термализоваться за время ее прохождения (в противном случае движение частиц в большей части проволоки осуществлялось бы по равновесному сценарию).

Наша постановка задачи кажется привлекательной потому, что позволяет изучить поведение *пробной* неравновесной частицы, взаимодействующей с *равновесным* окружением, в то время как в других ситуациях *вся система* оказывается сильно неравновесной, что делает затруднительным разделение различных эффектов.

Заметим еще, что прыжковая диффузия горячих частиц, сопровождаемая испусканием энергии, рассматривалась в работе [15, 16] в связи с исследованием рекомбинации фотовозбужденных носителей в полупроводниках. Однако, как мы увидим, приближение, использованное в [15, 16] слишком грубо для того, чтобы найти функцию распределения проницаемостей системы.

2 Физическая модель и механизм движения горячей частицы в холодной неупорядоченной проволоке

2.1 Локализованные электроны и холодный термостат

В этом разделе мы описываем используемую нами модель.

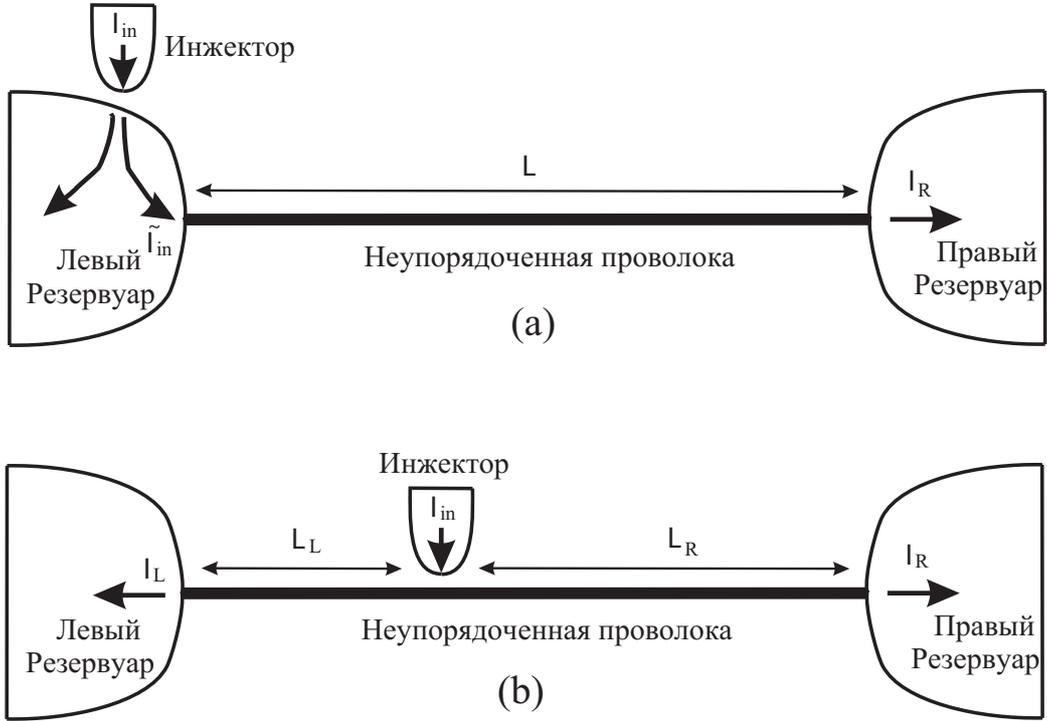


Рис. 1: Модель. Неупорядоченная проволока длиной L находится в хорошем контакте с двумя резервуарами. Неравновесные электроны поступают в систему из инжектора. (а): Инжектор направляет поток электронов I_{in} в левый резервуар, его часть \tilde{I}_{in} доходит до левого конца проволоки. В свою очередь, правого резервуара достигает часть этого тока, равная I_R , остальное отражается. (б): Инжектор направляет поток электронов I_{in} непосредственно в проволоку, ток I_R течет в правый резервуар, I_L – в левый, остальное отражается.

Неупорядоченная проволока длины L находится в равновесии с двумя идеальными металлическими контактами (резервуарами) при температуре T . Химический потенциал системы ϵ_F . Имеется еще и третий резервуар – "инжектор" из которого неравновесные электроны с энергиями $E \gg T$ (E отсчитывается от ϵ_F) попадают в систему. Инжектор связан с системой слабым туннельным контактом так, что входящий ток I_{in} мал. В большей части этой работы мы будем рассматривать случай, когда инжектора подсоединен к левому резервуару (см. рис. 1а), а в конце работы приведем некоторые результаты для случая соединения инжектора непосредственно с проволокой (рис. 1б).

Нашей целью является нахождение тока I_R , попадающего в правый резервуар. В случае, изображенном на рис. 1а, ток $\tilde{I}_{in} = AI_{in}$ достигает

левого конца проволоки. Коэффициент $A \lesssim 1$ зависит от геометрии левого резервуара. Доля \mathcal{T} тока I_{in} достигает правого резервуара, а доля $1 - \mathcal{T}$ отражается обратно в левый резервуар. Именно в коэффициенте проницаемости \mathcal{T} содержится вся интересная информация о процессах в проволоке. \mathcal{T} – случайная величина, зависящая от всех энергий и положений локализованных состояний. Большая часть этой работы посвящена изучению функции распределения логарифма коэффициента проницаемости $\ln \mathcal{T}$.

Высокоэнергетические электроны, попадающие в проволоку, слабо взаимодействуют с тепловым резервуаром температуры T (это взаимодействие может осуществляться, например, через фононы или через электронные моды в контактах). Таким образом, энергия неравновесных электронов в процессе прохождения через проволоку не сохраняется. Однако, пока $E \gg T$, можно учитывать только переходы между локализованными состояниями с потерей энергии. Это утверждение верно только для не слишком длинных проволок, в которых электроны не успевают термализоваться. Условие на температуру и длину проволоки, соответствующее этому требованию, будет получено ниже (см. раздел 4.4).

2.2 Квазирезонансы и “лестницы”

Итак, электрон, имеющий начальную энергию $E \gg T$, двигаясь вдоль проволоки, может останавливаться только в тех локализованных состояниях, энергии которых ε_i лежат в интервале $(0, E)$. Действительно, состояния с $\varepsilon_i < 0$ заняты, так как находятся ниже уровня Ферми. С другой стороны, в состояния с энергиями $\varepsilon_i > E$ электрон не может попасть, так как он не может повышать свою энергию (термостат слишком холодный).

Мы будем называть доступные состояния "квазирезонансами". Нашу систему точно можно считать одномерной, если характерное расстояние между квазирезонансами $1/gE$ много больше толщины проволоки d . Это требование приводит к условию на энергию

$$E \ll 1/gd. \quad (5)$$

Мы будем считать условие (5) выполненным, хотя, на самом деле оно не является совершенно необходимым, так как только малая часть квазирезонансов, лежащая вблизи поверхности Ферми, реально влияет на проницаемость. Поэтому, даже если условие (5) нарушено, основные результаты, полученные ниже, остаются справедливыми. Измениться могут только некоторые тонкие детали, касающиеся асимптотик функции распределения проницаемости.

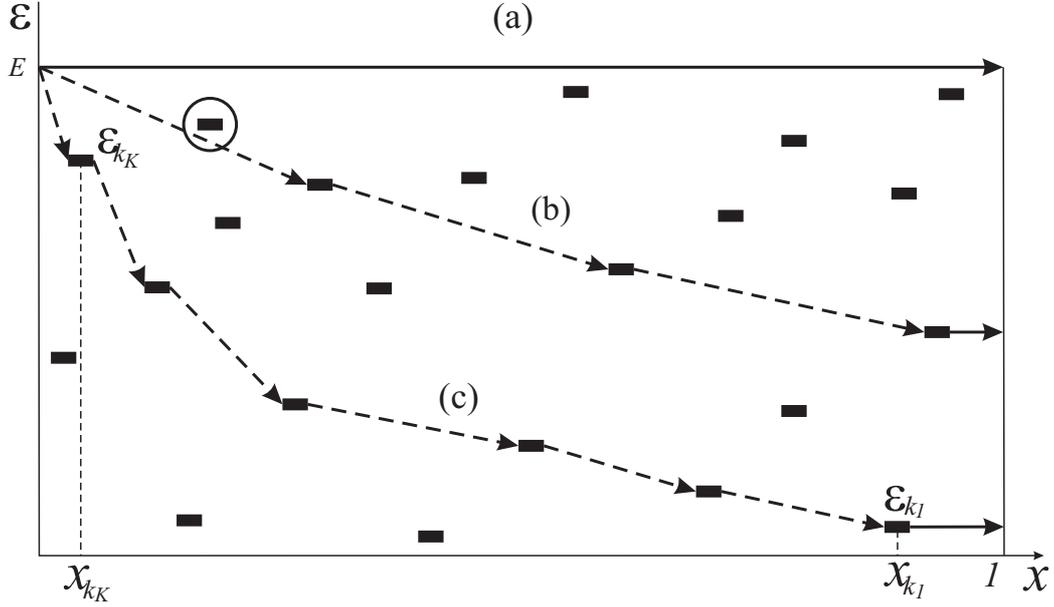


Рис. 2: Три примера возможных сценариев прохода электрона из левого резервуара в правый по квазирезонансам. (a): Прямое туннелирование. (b,c): Прыжки электрона по квазирезонансам, составляющим лестницы. Происходят только прыжки с потерей энергии. Лестница (b) приводима (в нее можно добавить обведенный кружком квазирезонанс). Лестница (c) неприводима

Удобно пронумеровать квазирезонансы в порядке возрастания энергии:

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_N < E. \quad (6)$$

Пространственные положения квазирезонансов, отсчитанные от левого края проволоки, мы обозначим, как $L_i = Lx_i$. Независимые случайные величины x_i равномерно распределены в интервале $(0, 1)$. Кроме того, само число квазирезонансов N – тоже случайная величина, зависящая от конкретной конфигурации локализованных состояний в проволоке.

Как электрон может попасть из левого резервуара в правый? Кроме очевидной возможности прямого туннелирования (рис. 2a), есть множество “лестниц” (рис. 2b,c), по которым электрон может совершать неупругие прыжки, останавливаясь на квазирезонансах. Каждая лестница характеризуется выборкой K ($0 \leq K \leq N$) номеров квазирезонансов, такой, что

$$\varepsilon_{k_1} < \varepsilon_{k_2} < \dots < \varepsilon_{k_K}, \quad x_{k_1} < x_{k_2} < \dots < x_{k_K}. \quad (7)$$

Второе условие в формуле (7) вообще говоря, не является обязательным для попадания электрона в правый резервуар, но, как мы увидим позже, сценарии, для которых оно не выполняется (то есть электрон иногда прыгает назад), всегда проигрывают в конкуренции с лестницами, т.е. с теми сценариями, для которых движение происходит всегда только вперед. Более того, среди всех лестниц достаточно рассмотреть только “неприводимые” – те, которые нельзя удлинить путем добавления дополнительных квазирезонансов (см.рис. 2b,c). Как мы увидим, приводимые лестницы проигрывают конкуренцию неприводимым.

Электрон, “спускаясь по лестнице”, совершает серию прыжков:

- Первый прыжок совершается из левого резервуара в квазирезонанс k_K , при этом энергия $E - \varepsilon_{k_K}$ передается термостату, так что, что электрон переходит в *реальное* состояние в квазирезонансе k_K и может там находиться сколь угодно долго;
- Второй прыжок совершается из квазирезонанса k_K в квазирезонанс k_{K-1} , термостату передается $\varepsilon_{k_K} - \varepsilon_{k_{K-1}}$;
- ...
- Последний прыжок из квазирезонанса k_1 в правый резервуар может происходить и без излучения энергии (т.к. резервуар обладает непрерывным спектром).

Прохождение горячей дырки с энергией $E \gg T$ через неупорядоченную проволоку полностью аналогично рассмотренному выше случаю горячего электрона, с той только разницей, что здесь полоса квазирезонансов шириной E находится не над, а под уровнем Ферми. Важно, что квазирезонансы, лежащие в этих двух полосах, никак не скоррелированы между собой, поэтому, при изменении конфигурации беспорядка или величины E , электронная проницаемость $\mathcal{T}(E)$ и дырочная – $\mathcal{T}(-E)$ флуктуируют совершенно независимо.

3 Кинетическое уравнение и его решение в экспоненциальном приближении

Так как когерентность электронов разрушается при неупругом взаимодействии с термостатом, динамику чисел заполнения квазирезонансов n_i

($1 \leq i \leq N$) можно описывать кинетическим уравнением:

$$\dot{n}_i = P_{\mathcal{L} \rightarrow i} \tilde{I}_{\text{in}} + \sum_{j>i} n_j P_{j \rightarrow i} - n_i P_{i \rightarrow \text{out}}, \quad (8)$$

$$P_{i \rightarrow \text{out}} = P_{i \rightarrow \mathcal{L}} + P_{i \rightarrow \mathcal{R}} + \sum_{j<i} P_{i \rightarrow j}. \quad (9)$$

Первый член в правой части (8) – это входящий поток электронов из левого резервуара; второй член описывает электроны, попадающие на уровень i с других квазирезонансов (такие переходы возможны только с потерей энергии, отсюда условие $j > i$ на номера квазирезонансов, из которых происходит туннелирование); наконец, третий член описывает уход электронов с уровня i на более низкие уровни и в оба резервуара. Налетающий поток электронов \tilde{I}_{in} предполагается настолько малым, что все существенные $n_i \ll 1$ и можно пользоваться линеаризованным вариантом (8) кинетического уравнения.

Проницаемость системы равна нормированному полному потоку электронов, приходящих в правый резервуар из всех возможных источников: как непосредственно из левого резервуара, так и из всех промежуточных квазирезонансов,

$$\mathcal{T} \equiv I_{\mathcal{R}} / \tilde{I}_{\text{in}} = P_{\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}} + \sum_i P_{i \rightarrow \mathcal{R}} (n_i / \tilde{I}_{\text{in}}). \quad (10)$$

Мы интересуемся стационарным решением (8), когда $\dot{n}_i \equiv 0$. В этом случае легко увидеть, что уравнение можно решить рекуррентно, выражая n_i через все n_j с $j > i$:

$$(n_i / \tilde{I}_{\text{in}}) = \frac{P_{\mathcal{L} \rightarrow i} + \sum_{j>i} (n_j / \tilde{I}_{\text{in}}) P_{j \rightarrow i}}{P_{i \rightarrow \text{out}}}. \quad (11)$$

Частота переходов между $j \rightarrow i$

$$P_{j \rightarrow i} = P_{j \rightarrow i}^{(0)} (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \exp\{-2L|x_i - x_j|/a\}. \quad (12)$$

3.1 Экспоненциальное приближение

Матричные элементы взаимодействия электрона с термостатом, входящие в $P_{j \rightarrow i}^{(0)}$ – гладкие степенные функции переданной энергии $\varepsilon_j - \varepsilon_i$, они не влияют на главную, экспоненциальную зависимость \mathcal{T} и могут входить только в предэкспоненциальный множитель. Так как мы интересуемся только экспоненциальными зависимостями, мы можем не учитывать эти матричные элементы. Таким образом, в экспоненциальном

приближении нам не требуется знать вообще никаких свойств взаимодействия электрона с термостатом! Более того, в этом приближении важны не конкретные значения энергий квазирезонансов ε_i , а лишь порядок следования этих уровней. Все эти соображения позволяют серьезно упростить проблему, записывая частоты переходов в виде:

$$P_{j \rightarrow i} \propto \theta(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \exp\{-\alpha|x_i - x_j|\}, \quad (13)$$

где

$$\alpha = 2L/a \gg 1, \quad (14)$$

главный большой параметр нашей теории.

В соответствии с экспоненциальным приближением, основанным на большом параметре $\alpha \gg 1$ (см. (14)), мы будем предполагать, что в каждой сумме, встречающейся в (8), доминирует *только один член* с наибольшей экспонентой. Тогда

$$P_{i \rightarrow \text{out}} \propto \exp\{-\alpha\chi_i\}, \quad (15)$$

$$\chi_i(\mathcal{C}) \equiv \min \left\{ x_i, 1 - x_i, \min_{j < i} \{|x_i - x_j|\} \right\}, \quad (16)$$

где $\mathcal{C} \equiv (x_1, \dots, x_N)$ обозначает конфигурацию квазирезонансов. Введя s и ν_i в соответствии с

$$s = -\frac{\ln \mathcal{T}}{\alpha}, \quad \nu_i = -\frac{\ln(n_i/\tilde{I}_{\text{in}})}{\alpha}, \quad (17)$$

мы получим рекуррентное соотношение, выражающее функцию $\nu_i(\mathcal{C})$ через все $\nu_j(\mathcal{C})$ с $j > i$:

$$\begin{aligned} \nu_i(\mathcal{C}) = & -\chi_i(\mathcal{C}) + \\ & + \min \left\{ x_i, \min_{j > i} \{|x_i - x_j| + \nu_j(\mathcal{C})\} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

После нахождения всех ν_i , мы можем сразу написать выражение для s (и, следовательно, проницаемости \mathcal{T}):

$$s(\mathcal{C}) = 1 + \min \left\{ 0, \min_i \{\nu_i(\mathcal{C}) - x_i\} \right\}. \quad (19)$$

По-другому выражение для $s(\mathcal{C})$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} s(\mathcal{C}) = 1 - X(\mathcal{C}), \quad X(\mathcal{C}) = \max_{\mathcal{S}} \{X(\mathcal{S}|\mathcal{C})\}, \\ X(\mathcal{S}|\mathcal{C}) = \sum_{i_k \in \mathcal{S}} \chi_{i_k}(\mathcal{C}), \end{aligned} \quad (20)$$

где \mathcal{S} пробегает весь набор лестниц, возможных в данной конфигурации квазирезонансов \mathcal{C} . Лестницу $\mathcal{S}_{\text{opt}}(\mathcal{C})$, отвечающую максимуму, мы будем называть оптимальной. Так как функционал $X(\mathcal{C}|\mathcal{S})$ аддитивен, очевидно, что оптимальная лестница должна быть неприводимой (иначе ее приведение приводило бы к увеличению X). Аналогично можно показать, что все сценарии прыжков электрона, не являющиеся лестницами, можно не учитывать. Действительно, если в сценарии есть прыжок назад, то исключение из сценария того квазирезонанса, из которого был сделан этот прыжок, приведет только к увеличению X .

Функция распределения:

$$\mathcal{F}_N(s) = \prod_{i=1}^N \int_0^1 dx_i \delta[s - s(\mathcal{C})]. \quad (21)$$

В предыдущих рассуждениях мы считали число квазирезонансов N постоянной величиной, тогда как в реальности фиксирована начальная энергия E электрона, что ведет к Пуассоновскому распределению N :

$$p(N, \bar{N}) = \bar{N}^N \exp(-\bar{N})/N!, \quad \bar{N} = LEg, \quad (22)$$

так что физически интересное распределение (при фиксированной энергии, или, что то же самое, при фиксированной величине \bar{N}) дается следующей формулой:

$$F_{\bar{N}}(s) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N, \bar{N}) \mathcal{F}_N(s). \quad (23)$$

В частности, средний логарифм проницаемости системы является универсальной функцией одного безразмерного параметра \bar{N} :

$$\bar{s}(\bar{N}) = \sum_{N=0}^{\infty} p(N, \bar{N}) \bar{s}_N, \quad \bar{s}_N = \prod_{i=1}^N \int_0^1 dx_i s(\mathcal{C}), \quad (24)$$

Для $\bar{N} \gg 1$ “большое каноническое распределение” F не отличается от “канонического” \mathcal{F} :

$$F_{\bar{N}}(s) \approx \mathcal{F}_{\bar{N}}(s), \quad \bar{s}(\bar{N}) \approx \bar{s}_{\bar{N}}. \quad (25)$$

Следует еще раз отметить, что в экспоненциальном приближении проницаемость системы определяется одной оптимальной лестницей. Ее структура зависит от конфигурации квазирезонансов. Другими словами, в нашей задаче решение кинетического уравнения можно заменить нахождением всех лестниц в конфигурации, затем нахождением проницаемости для пути по каждой из лестниц и, наконец, нахождением оптимальной лестницы, проницаемость которой максимальна и совпадает с проницаемостью системы. Эти два метода дают один и тот же результат.

4 Функция распределения логарифма проницаемости

4.1 Общие соотношения и точные результаты для коротких проволок

С принципиальной точки зрения соотношения (18) в общем случае решают проблему. Структура общего решения следующая: все многообразие x_1, x_2, \dots, x_N разбивается на конечное число доменов-многогранников с каким-то фиксированным сценарием, являющимся оптимальным внутри этого многогранника, причем $s(x_1, x_2, \dots, x_N)$ – линейная функция своих аргументов внутри каждого из доменов. Для любого N имеется набор величин $s_p(N)$ ($0 < s_1(N) < s_2(N) < \dots < 1$) такой, что

$$\mathcal{F}_N(s) = Q_p^{(N)}(s), \quad \text{for } s_{p-1}(N) < s < s_p(N), \quad (26)$$

где $Q_p(s)$ – определенный полином степени $N - 1$. В частности, можно показать, что $s_1(N) = 2^{-N}$, $Q_1^{(N)}(s) \equiv 0$, $Q_2^{(N)}(s) \propto (s - s_1(N))^{N-1}$. Таким образом, для малых $s < s_2(N)$

$$\mathcal{F}_N(s) \sim (s - 2^{-N})^{N-1} \theta(s - 2^{-N}), \quad (27)$$

и $s_1(N)$ есть ничто иное, как минимальное возможное (для заданного N) значение s . Оно отвечает максимальной проницаемости и реализуется для “идеально упорядоченной” конфигурации квазирезонансов, для которых $x_k = 2^{-k}$ (см. Рисунок 3).

Самые маленькие проницаемости (и, соответственно, самые большие $s \rightarrow 1$) получаются в конфигурациях, в которых все квазирезонансы разделены на две группы: уровни в первой группе находятся около правого резервуара (соответствующие $x_i > s$), уровни во второй группе формируют “обратную лестницу”, начиная от левого резервуара ($\varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k$ и $x_{k+1} > x_k$, $x_1 < 1 - s$, $x_{k+1} - x_k < 1 - s$). Вероятность того, что все квазирезонансы соберутся в описанные группы, по порядку величины равна $\sim (1 - s)^{N-1}$, так что

$$\mathcal{F}_N(s) \sim (1 - s)^{N-1}, \quad \text{for } s \rightarrow 1. \quad (28)$$

Как мы увидим позже, для применимости приведенных выше рассуждений требуется условие $1 - s < \frac{1}{N}$.

Хотя соотношения (18) очень удобны для компьютера, они довольно бесполезны для нахождения *аналитических* выражений для функции распределения. Практически это можно сделать лишь для $N = 1, 2$. В

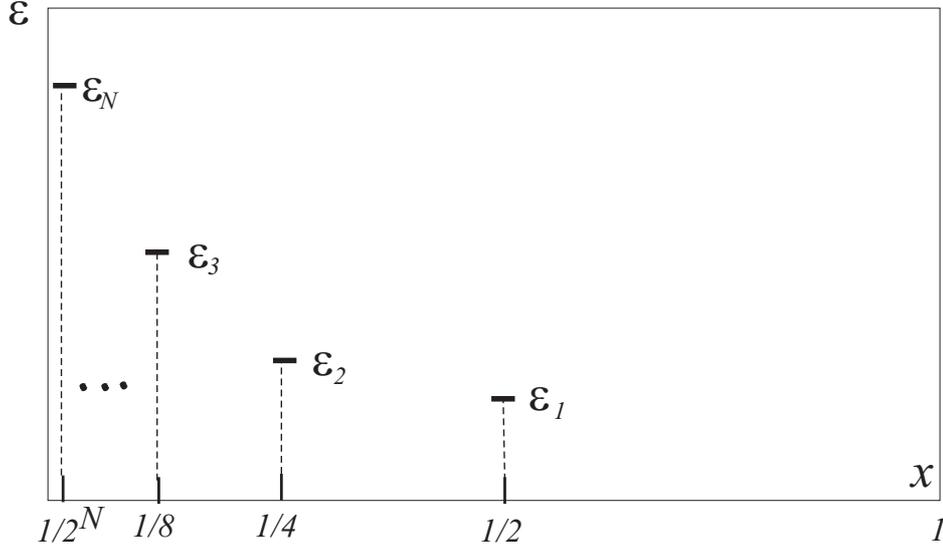


Рис. 3: "Идеально упорядоченная" конфигурация квазирезонансов с $x_k = 2^{-k}$. Она отвечает максимальной проницаемости $\mathcal{T}_{\max}(N) = \exp\{-\alpha 2^{-N}\}$, возможной при данном N .

случае $N = 1$ наибольшая проницаемость соответствует $s_1(1) = 1/2$ и $Q_2^{(1)}(s) \equiv 2$. В случае $N = 2$ многоугольники с разными оптимальными лестницами (и соответствующие выражения для $s(x_1, x_2)$) показаны на рис.4а, $s_1(2) = 1/4$, $s_2(2) = 1/2$, $s_3(2) = 2/3$,

$$Q_2^{(2)}(s) = (16/3)(s - 1/4), \quad (29)$$

$$Q_3^{(2)}(s) = 7/3 + 4/3(s - 1/2), \quad (30)$$

$$Q_4^{(2)}(s) = (23/3)(1 - s). \quad (31)$$

Графики $\mathcal{F}_1(s)$, $\mathcal{F}_2(s)$ даны на рис.4б.

Чтобы получить физически интересную величину $F_{\bar{N}}(s)$ уже для малых \bar{N} требуется численный расчет (см. рис. 5).

4.2 Длинные проволоки: численные результаты

Для больших N решение рекуррентного соотношения (18) возможно только численно. Результаты наших численных вычислений показаны на рисунках 6, 7. Мы использовали метод Монте-Карло: случайно расставлялись N квазирезонансов и затем по формуле (18) вычислялась величина s для конкретной реализации (заметим, что сложность такого вычисления растет $\sim N^2$). В методе Монте-Карло использовался генератор случайных чисел Mersenne Twister, MT19937, см. [17]. Типичное

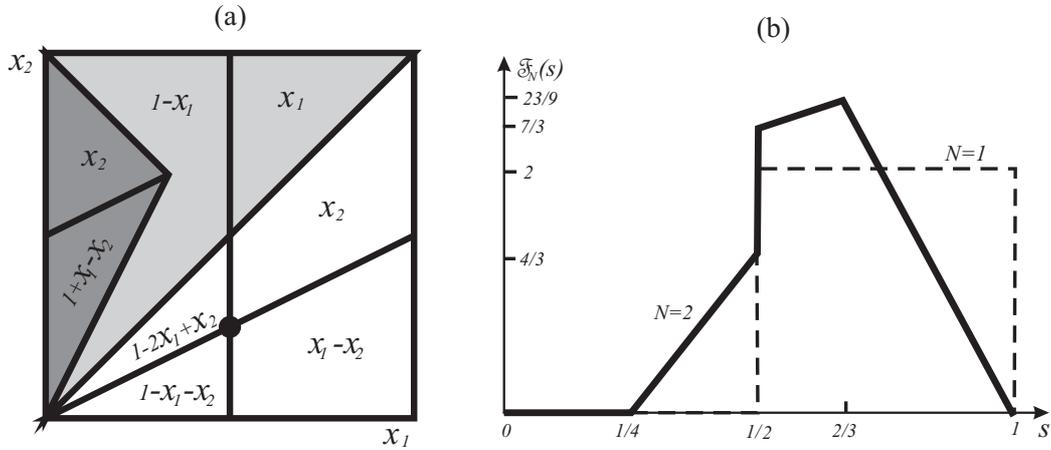


Рис. 4: (а): Домены на плоскости x_1, x_2 для случая $N = 2$. Белые домены отвечают оптимальной лестнице $\mathcal{L} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \mathcal{R}$, светло-серые домены – лестнице $\mathcal{L} \rightarrow 1 \rightarrow \mathcal{R}$, темно-серые – лестнице $\mathcal{L} \rightarrow 2 \rightarrow \mathcal{R}$. В каждом домене записано выражение для $s(x_1, x_2)$, справедливое внутри соответствующего домена. Черная точка отвечает идеальной конфигурации, где $s(x_1, x_2)$ достигает абсолютного минимума, равного $1/4$. (б): Функции распределения $\mathcal{F}_1(s)$ (пунктирная линия) и $\mathcal{F}_2(s)$ (сплошная линия).

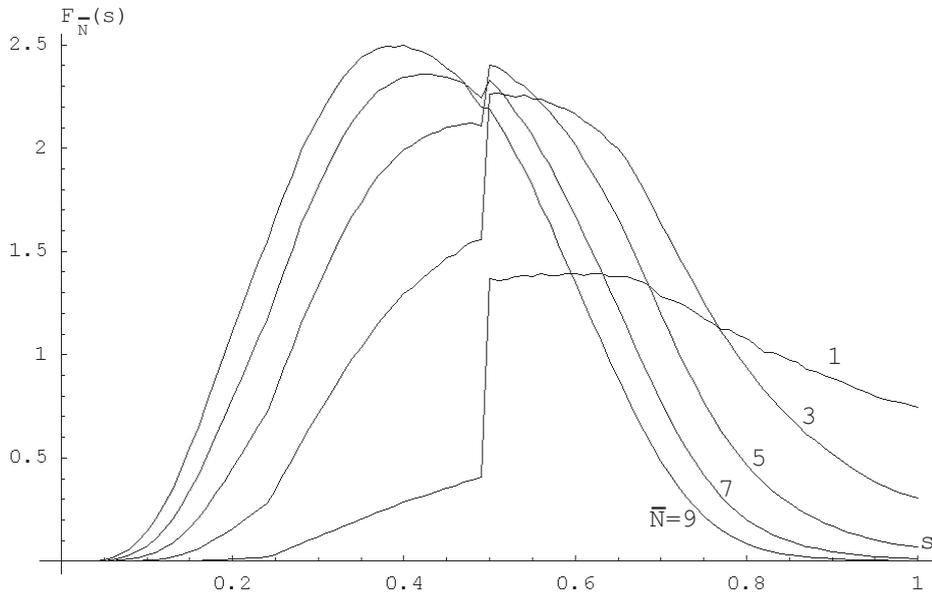


Рис. 5: Функция распределения $F_{\bar{N}}(s)$ в большом каноническом ансамбле для нескольких значений \bar{N} из интервала $1 < \bar{N} < 10$. Не показан дельта-функциональный вклад $e^{-\bar{N}}\delta(s-1)$ от $\mathcal{F}_0(s)$.

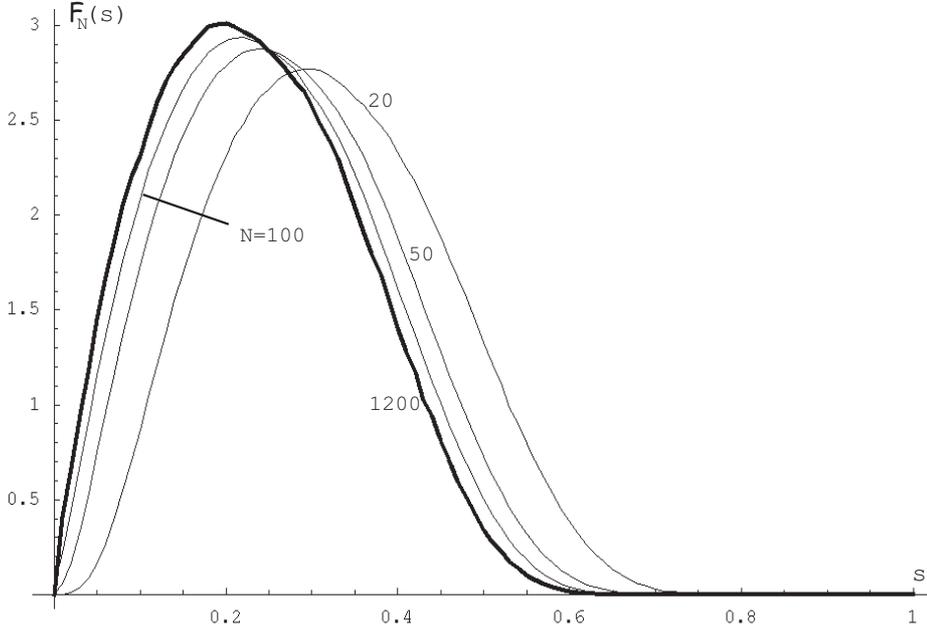


Рис. 6: Функции распределения логарифма проницаемости ($s \equiv -\ln \mathcal{T}/\alpha$) для разных значений среднего числа квазирезонансов $\bar{N} \equiv ELg$. Для значений $\bar{N} \geq 200$ кривые практически сливаются и совпадают с $\mathcal{F}_\infty(s)$, показанной жирной линией.

количество реализаций системы, генерировавшееся для последующего усреднения, составляло $\sim 10^6$.

Опишем теперь некоторые качественные черты полученных нами численных результатов.

При $1 - s \ll 1$ функция распределения $F_{\bar{N}}(s)$ быстро убывает, в разделе 4.6 мы исследуем характер этой асимптотики. К сожалению, из-за очень малой величины $F_{\bar{N}}(s)$ (и, соответственно, необходимости набора очень большой статистики) точность наших численных результатов в этой области недостаточна для проверки аналитических предсказаний.

Функции распределения $F_{\bar{N}}(s)$ широкие: дисперсия s порядка среднего \bar{s} для всех \bar{N} . При больших N наши численные результаты указывают на крайне необычную линейную асимптотику $F_\infty(s)$ при малых s :

$$F_\infty(s) \approx bs, \quad \text{for } s \ll 1, \quad (b \approx 29). \quad (32)$$

Аналитический вывод этого соотношения дан в следующем разделе.

Среднее значение $\bar{s}(\bar{N})$ монотонно уменьшается с увеличением \bar{N} . Тем не менее, $\bar{s}(\bar{N})$ остается конечным для всех \bar{N} , и для больших \bar{N} оно стремится к конечному пределу $\bar{s}_\infty \approx 0.237$. Сходимость очень медленная:

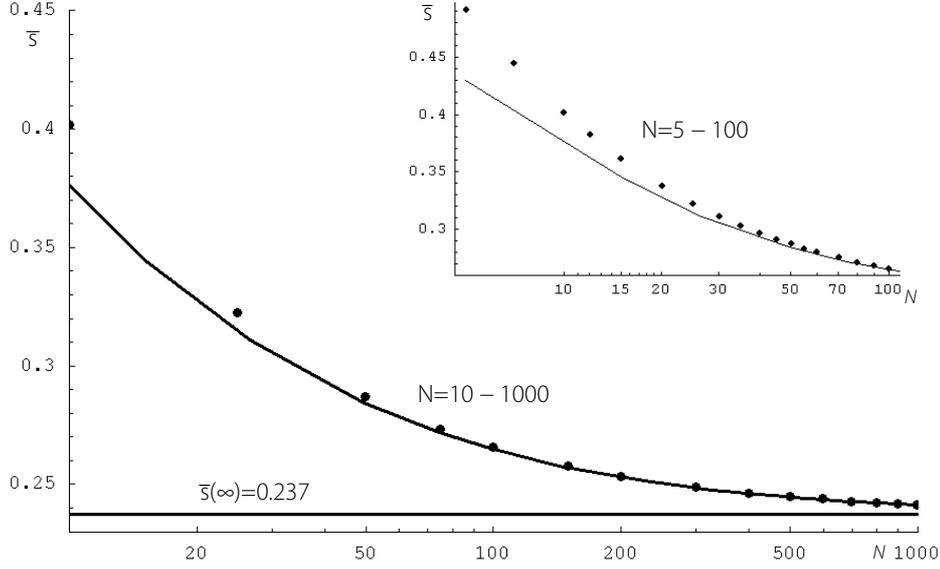


Рис. 7: Зависимость среднего логарифма проницаемости от \bar{N} . Асимптотическая формула (33) показана непрерывной кривой.

даже для $N = 1000$ относительное отклонение от предельного значения все еще значительно: $(\bar{s}_{1000} - \bar{s}_\infty)/\bar{s}_\infty \approx 2\%$. Это отклонение можно описать с помощью эмпирического асимптотического выражения

$$\bar{s}_N \approx 0.237 + 0.598 \ln N/N, \quad \text{for } N \gg 1. \quad (33)$$

Сходимость к асимптотическому выражению (33) происходит гораздо быстрее: отклонение "экспериментального" \bar{s}_N от асимптотики (33) становится меньше 2% уже для $N \sim 30$.

Интересно исследовать зависимость от N среднего числа прыжков \bar{K} в оптимальной лестнице. Численные данные, показанные на рис. 8, наилучшим образом описываются с помощью зависимости

$$\bar{K}(N) \approx 0.39 \ln^2 N + 2.4, \quad \text{for } N \gg 1 \quad (34)$$

Понятно, что главный вклад в s дают несколько последних прыжков длины $L_i \sim 1$. Тем не менее, поправочный член в формуле (33), дающий зависимость от \bar{s}_N от N при больших N , по-видимому определяется большим числом начальных коротких прыжков в оптимальной лестнице. Нам представляется, что зависимости (33) и (34) должны быть связаны друг с другом. Мы сделали много попыток объяснить эти зависимости, одна из которых описана в разделе 4.3, но, к сожалению, все они оказались неудачными. Все они вели к результату $\bar{K}(N) \propto \ln N$ and

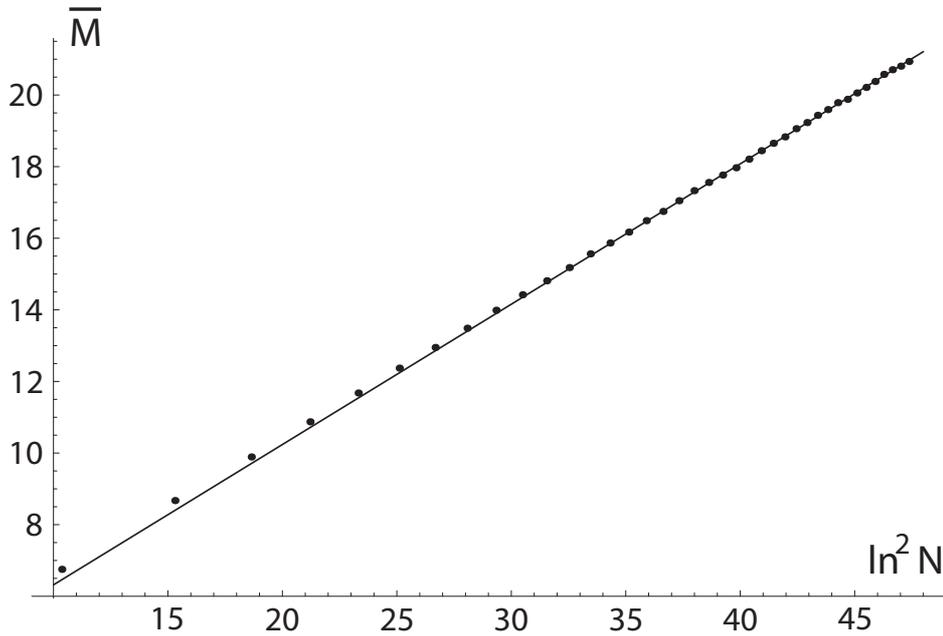


Рис. 8: Усредненное (по $\sim 5 \cdot 10^4$ случайным конфигурациям) число прыжков \bar{K} в оптимальной лестнице как функция N .

$\bar{s}_N - \bar{s}_\infty \propto 1/N$, не соответствующему нашим численным результатам. Таким образом, эмпирические зависимости (33,34) остаются загадочными и по-прежнему нуждаются в теоретическом объяснении.

Здесь стоит сказать о схожей по постановке математической задаче Улама [18, 19, 20]. Она заключается в определении статистики для длины самой длинной из всех возрастающих подпоследовательности в наборе случайно упорядоченных натуральных чисел от 0 до N . Математическое ожидание длины такой последовательности — $2\sqrt{N}$, а дисперсия функции распределения $\sim N^{1/6}$. Таким образом, функция распределения в пределе больших N — узкая. Сходство нашей проблемы с задачей Улама в том, что мы тоже рассматриваем только монотонные последовательности, однако оптимизация происходит по-другому: мы ищем не самую длинную подпоследовательность, а соответствующую максимальной проницаемости. Поэтому известные математические результаты (см. [19, 20]), к сожалению, не помогают в решении нашей задачи.

4.3 Гипотеза скейлинга: слишком грубое приближение

В этом разделе мы кратко опишем одну из наших попыток аналитического описания функции распределения логарифмов проницаемости для длинных проволок. Она основывается на гипотезе скейлинга, которая, как показали дальнейшие численные исследования, строго говоря, неверна и поэтому, в частности не способна дать объяснение эмпирическим законам (32,33,34). Вместе с тем, эта гипотеза неплохо выполняется для последних – самых длинных (и дающих наибольший вклад в s) прыжков в оптимальной лестнице и поэтому качественно верно описывает самые общие и грубые черты функции распределения $F_\infty(s)$. Кроме того, анализ причин нарушения гипотезы скейлинга позволяет хотя бы отчасти понять происхождение нетривиальных зависимостей (33,34).

Рассмотрим последний прыжок в оптимальной лестнице. Положение квазирезонанса, из которого он был совершен $\ell_1 = x_{k_1}$ случайное, распределенное на интервале $(0, 1)$. Обозначим распределение этой величины $\mathcal{P}_1(\ell_1)$. Положение x_{k_2} квазирезонанса, из которого был совершен предпоследний прыжок, распределено на интервале $(0, x_{k_1})$. Перенормированная случайная величина $\ell_2 = x_{k_2}/x_{k_1}$, так же, как и ℓ_1 , оказывается распределенной на интервале $(0, 1)$, соответствующую функцию распределения мы обозначаем $\mathcal{P}_2(\ell_2)$. Далее вводим $\ell_3 = x_{k_3}/x_{k_2}, \dots, \ell_i = x_{k_i}/x_{k_{i-1}}, \dots$ и соответствующие им функции распределения $\mathcal{P}_i(\ell_i)$.

Гипотеза скейлинга состоит в предположении том, что величины ℓ_i – независимые случайные переменные, а все функции $\mathcal{P}_i \equiv \mathcal{P}$ – одинаковы. Выполнение этого предположения означало бы, что все прыжки в среднем подобны последнему, соответствующим образом отмасштабированному. Скейлинг не противоречит качественно верному утверждению о том, что наибольший вклад в s дают последние, самые длинные прыжки.

Гипотеза скейлинга позволяет найти вероятность возникновения той или иной оптимальной лестницы, но сама по себе ничего не говорит о том, как определить соответствующую этой лестнице величину s . Дело в том, что s зависит не только от положения “ведущих” квазирезонансов, входящих в оптимальную лестницу, но также и от положения “ловушек” – квазирезонансов, ближайших к ведущим, и имеющих более низкую энергию. Именно, вклад в s от i -го прыжка по оптимальной лестнице

$$\rho_i = x_{k_{i-1}} - x_{k_i} - \chi_{k_i}, \quad s = \sum_i \rho_i, \quad (35)$$

где χ_{k_i} – расстояние до соответствующей ловушки (см формулу (16)).

Чтобы как-то ответить на вопрос о величине χ_i , мы использовали приближение, согласно которому ловушкой для каждого ведущего квазирезонанса всегда является либо следующий ведущий квазирезонанс, либо левый резервуар. Это приближение приводит к явному выражению

$$\rho_i \approx x_{k_{i-1}} f(\ell_i), \quad f(\ell_i) = (1 - 2\ell_i)\theta(1 - 2\ell_i), \quad (36)$$

Совокупность гипотезы скейлинга и приближения (36) позволяет написать интегральное уравнение для функции распределения $F(s)$. Действительно, если длина последнего прыжка $1 - \ell_1$, то на нем набирается “стоимость” $f(\ell_1)$, при этом для всех оставшихся прыжков в нашем распоряжении еще остается длина ℓ_1 , на которой следует набрать “стоимость” $s - f(\ell_1)$. Из гипотезы скейлинга следует, что вероятность этого есть $F[(s - f(\ell_1))/\ell_1]$. В результате получаем

$$F(s) = \int_0^1 \mathcal{P}(\ell) F[(s - f(\ell))/\ell] d\ell. \quad (37)$$

В частности, можно показать, что при малых $s \ll 1$ решение уравнения (37) имеет асимптотический вид $F(s) \propto s^\varphi$, где показатель степени φ определяется из уравнения

$$\int_0^{1/2} \mathcal{P}(\ell) \ell^{-\varphi} d\ell = 1. \quad (38)$$

Исследование уравнения (37) при $s \rightarrow 1$ показывает, что неисчезающий вклад в интеграл по ℓ в (37) в этом случае дают две узкие области: $s < \ell < 1$ и $(1 - s)/2 < \ell < 1 - s$. Вклад первой области $\sim (1 - s)F(s)\mathcal{P}(1)$ пренебрежимо мал, и все определяется вторым вкладом. В результате

$$F(s) \sim (1 - s)\mathcal{P}(1 - s) \quad \text{при } s \rightarrow 1, \quad (39)$$

то есть асимптотика $F(s)$ при $s \rightarrow 1$ определяется (неизвестной) асимптотикой функции $\mathcal{P}(\ell)$ при $\ell \rightarrow 0$.

Для вычисления \bar{s} заметим, что, из-за подобия прыжков друг другу $\bar{\rho}_i \approx (\bar{l})^{i-1} f(\bar{l})$, и, в результате

$$\bar{s} = \sum_i \bar{\rho}_i \approx \frac{\int_0^1 \mathcal{P}(\ell) f(\ell) d\ell}{1 - \int_0^1 \mathcal{P}(\ell) \ell d\ell}, \quad (40)$$

Обратимся теперь к “экспериментальной” проверке использованных нами гипотез. Определенные численно функции распределения

$$\bar{s} = \mathcal{P}_i^{(\text{exp})}(\ell_i) = \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j \delta[\ell_i - x_{k_i}/x_{k_{i-1}}], \quad (41)$$

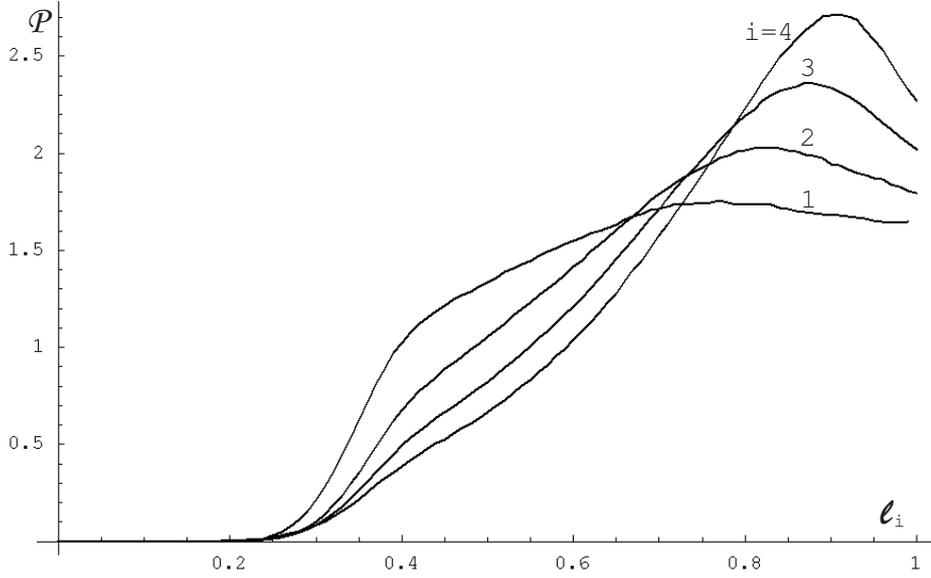


Рис. 9: Численно определенные функции распределения $\mathcal{P}_i(\ell_i)$ для $i = 1, \dots, 4$.

и нормированные на x_{k_i} “стоимости” нескольких последних (самых важных) прыжков

$$f_i^{(\text{exp})}(\ell_i) = \left[\mathcal{P}_i^{(\text{exp})}(\ell_i) \right]^{-1} \prod_{j=1}^N \int_0^1 dx_j (\rho_i / x_{k_{i-1}}) \delta[\ell_i - x_{k_i} / x_{k_{i-1}}], \quad (42)$$

показаны на рисунках 9 и 10.

Видно, что $\mathcal{P}_i^{(\text{exp})}(\ell_i)$ довольно заметно отличаются друг от друга, причем с ростом i центр тяжести функции распределения все больше смещается сторону больших ℓ . Это означает, что относительная длина соответствующих прыжков уменьшается с ростом i : она составляет уже не фиксированную (на уровне $\sim 1/3$, как при $i = 1$), а малую и все более уменьшающуюся долю всей доступной длины. Это численное наблюдение находится в согласии с тем фактом, что характерное число прыжков $K(N)$ в оптимальной лестнице растет быстрее, чем $\ln N$ (именно, $K(N) \sim \ln^2 N$, как уже отмечалось в разделе 4.2, см рисунок 8). Отклонение $f_i^{(\text{exp})}$ от f не столь драматично, но также увеличивается с ростом i .

Памятуя о том, что главную роль играют прыжки с малыми i , несмотря на очевидное нарушение гипотезы скейлинга при больших i , можно ожидать, что ее использование должно все-таки приводить к качественно правильным результатам. Чтобы это проверить, мы вычислили \bar{s} по

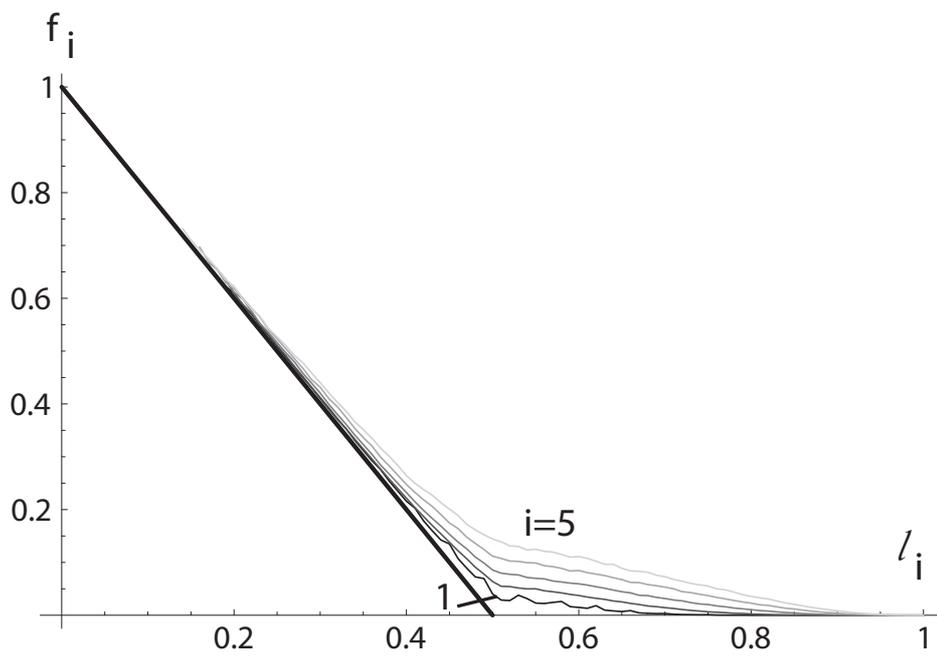


Рис. 10: Численно определенные зависимости $f_i(l_i)$ для $i = 1-5$ (линии от самой темной ($i = 1$) к более светлым по мере увеличения i). Использованный нами приближенный вид $f_i \equiv f$ (см. (36)) показан сплошной жирной линией.

формуле (40) и решили уравнение (38) для φ , используя $\mathcal{P}_1^{(\text{exp})}$ в качестве \mathcal{P} . Мы получили $\bar{s} \approx 0.12$ (вместо правильного результата $\bar{s} \approx 0.24$) и $\varphi \approx 1.34$ (вместо правильного $\varphi = 1$).

Итак, мы убедились, что гипотеза скейлинга приводит к разумным результатам на грубом качественном уровне: функция распределения $F(s)$ оказывается широкой, с дисперсией порядка среднего. Характерные параметры этого распределения, однако, оказываются верными только по порядку величины, с точностью до фактора ~ 2 . Что касается тонких эффектов (например, зависящих от N поправок), определяемых прыжками с большими i , то тут скейлинг, естественно, приводит к грубо неверным результатам.

Чем заменить гипотезу скейлинга? Ответа на этот интригующий вопрос мы так пока и не нашли, хотя и потратили чуть не половину всего времени на попытки...

4.4 Насколько низкой должна быть температура термостата?

Выведем теперь явные условия на температуру термостата T и длину проволоки L , позволяющие пренебрегать процессами, в которых частица не отдает энергию термостату, а, наоборот, получает ее. Предположим, что мы разрешили процессы с поглощением энергии: это приведет к появлению массы дополнительных возможностей и перестройке оптимальной лестницы, так что суммарная стоимость прыжков уменьшится на величину δs . Самые маленькие передачи энергии $\Delta\varepsilon \sim 1/gL$ как раз соответствуют последним, самым важным прыжкам в оптимальной лестнице, имеющим длину $\sim L$. Поэтому, если поглощение энергии разрешено хотя бы для этих $\Delta\varepsilon$, то выигрыш δs уже оказывается порядка единицы, то есть величина проницаемости приобретает большой множитель $e^{\alpha\delta s}$. С другой стороны, плата за снятие запрета на поглощение составляет $e^{-\Delta\varepsilon/T}$. Сравнивая эти два противоположно направленных эффекта, мы заключаем, что снятие запрета приведет к суммарному выигрышу, если

$$L < L_{\text{Mott}}(T) \sim a(T_0/T)^{1/2}, \quad (43)$$

что эквивалентно условию

$$T < T_c, \quad T_c \sim T_0/\alpha^2. \quad (44)$$

Итак, мы получили, что процессы с поглощением энергии вступают в игру, когда длина проволоки сравнивается с типичной Моттовской длиной прыжка $L_{\text{Mott}}(T)$ при данной температуре T . При этом в области длин

$L_{\text{Mott}}(T) \ll L \ll L_{\text{sa}}(T)$ проницаемость определяется моттовским процессом проводимости с переменной длиной прыжка и характеризуется экспоненциально большими флуктуациями, контролируруемыми случайными провалами в плотности состояний на уровне Ферми (см. [9]). Только при экспоненциально больших длинах $L \gg L_{\text{sa}}(T) \sim ae^{T_0/2T}$ происходит самоусреднение и проницаемость начинает описываться формулой (3).

4.5 Асимптотика высокой прозрачности

Как видно из наших численных результатов (см. рис. 6), для $N \gg 1$ вероятность большой проницаемости (или, что тоже самое, малого s) уменьшается как первая степень s . Конечно, это только промежуточная асимптотика, имеющая место при $2^{-N} \ll s \ll 1$, так как при самых малых $s \sim 2^{-N}$ справедлив строгий результат (27). Чтобы получить эту промежуточную асимптотику, мы сначала должны понять природу “удачных” конфигураций \mathcal{C} , ведущих к высокой проницаемости. Давайте попытаемся ее угадать.

Предположим, что некоторая конфигурация \mathcal{C} дает такую оптимальную лестницу, в которой серия из n последних прыжков $\varepsilon_{k_n} \rightarrow \varepsilon_{k_{n-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \varepsilon_{k_1} \rightarrow \mathcal{R}$ “бесплатная” (т.е., $\chi_{k_p} = x_{k_{p-1}} - x_{k_p}$ для $1 \leq p \leq n$, см. рис.11). Другими словами, после того, как электрон попадает на самый высокий из этих уровней ε_{k_n} , он прыгает по остальным узлам этой последовательности в правый резервуар с вероятностью, близкой к единице. Тогда, если этот верхний уровень близок к левому резервуару (а именно, если $x_{k_n} < s$), то можно гарантировать, что $s(\mathcal{C}) < s$, вне зависимости от того, были ли бесплатными предыдущие короткие прыжки, или нет. Наша гипотеза заключается в том, что именно такие “удачные” конфигурации как раз и являются оптимальными флуктуациями для достижения малых $s(\mathcal{C})$.

Давайте сформулируем критерии на конфигурацию, которая является оптимальной флуктуацией в описанном выше смысле:

- Последний прыжок (в \mathcal{R}) должен производиться из низшего уровня (т.е., $k_1 = 1$), и этот уровень должен находиться в правой половине проволоки ($x_1 > 1/2$).
- Следующий прыжок происходит из самого низкого по энергии квазирезонанса i из интервала $0 < x_i < x_1$. Этот уровень должен быть расположен в правой половине части проволоки, заключенной между \mathcal{L} и x_{k_1} : $x_{k_1}/2 < x_{k_2} < x_{k_1}$.

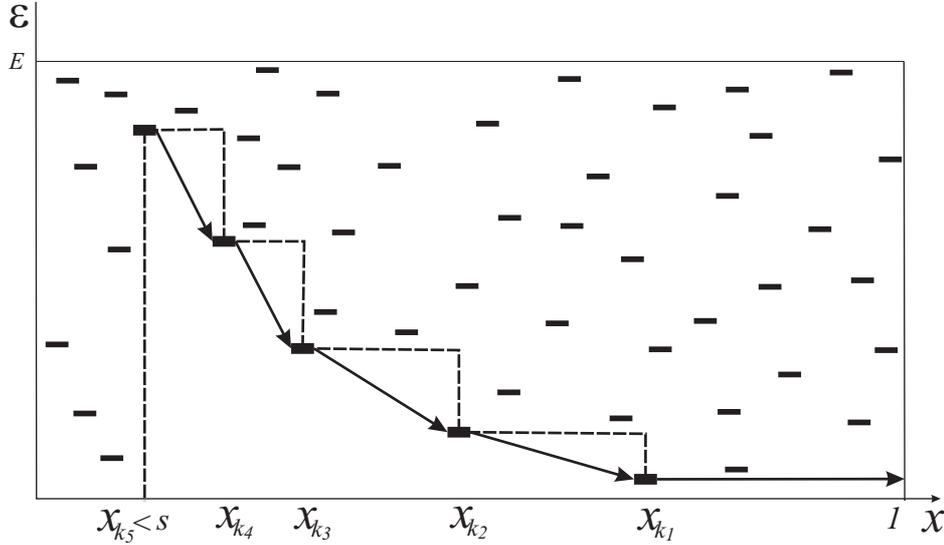


Рис. 11: Последние n “бесплатных” прыжков в лестнице, отвечающей оптимальной флуктуации ($n = 5$). Для всех $p \leq n$ условие $x_{k_{p-1}}/2 < x_{k_p} < x_{k_{p-1}}$ выполнено. Кроме того, не должно быть квазирезонансов под пунктирной линией.

- Далее, каждый уровень k_p из бесплатной части оптимальной лестницы ($1 \leq p \leq n$) – самый низкий из квазирезонансов с $0 < x_i < x_{k_{p-1}}$; этот уровень должен быть в правой половине интервала: $x_{k_{p-1}}/2 < x_{k_p} < x_{k_{p-1}}$.
- Бесплатная часть лестницы должна начинаться достаточно близко к левому резервуару: $x_{k_n} < s$.

Очевидно, что вероятность того, что все n последних прыжков из оптимальной лестницы бесплатны, 2^{-n} . Единственный вопрос – чему равно n ? В самом деле, n определяется не только s : для фиксированного s величина n все еще флуктуирует от конфигурации к конфигурации. Ниже мы исследуем статистику этих флуктуаций.

Давайте введем переменные $\xi_p = 2[x_{k_p} - x_{k_{p-1}}]/x_{k_{p-1}}$. Очевидно, что все ξ_p статистически независимы и равномерно распределены в интервале $0 < \xi_p < 1$. Тогда можно написать:

$$s = \prod_{p=1}^n (1 + \xi_p)/2, \quad \ln(1/s) = n \ln 2 - \phi, \quad \phi \equiv \sum_{p=0}^n \ln(1 + \xi_p). \quad (45)$$

Случайная величина ϕ описывается функцией распределения

$$P_n(\phi) \equiv \int_0^1 \prod_{p=1}^n d\xi_p \delta\left(\phi - \sum_{p=0}^n \ln(1 + \xi_p)\right), \quad (46)$$

Для $|\phi - \bar{\phi}| \ll \bar{\phi} \equiv n(2 \ln 2 - 1) \approx 0.386n$ это распределение гауссово, но мы увидим, что определяющий вклад в $\mathcal{F}_\infty(s)$ при малых s вносят как раз большие – негауссовы – флуктуации, для которых $|\phi - \bar{\phi}| \sim \bar{\phi}$. Таким образом, мы не можем довольствоваться гауссовым приближением, а должны найти более точное выражение для $P_n(\phi)$, верное также и для больших отклонений.

Используя преобразование Фурье, мы получаем:

$$P_n(\phi) = \int \frac{dq}{2\pi} e^{-iq\phi} \left[\int_0^1 d\xi e^{iq \ln(1+\xi)} \right]^n = \int \frac{dq}{2\pi} e^{-iq\phi} \left[\frac{2^{iq+1} - 1}{iq + 1} \right]^n. \quad (47)$$

Теперь мы можем найти вероятность того, что величина s принимает определенное значение:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\infty(s) &\approx \sum_n 2^{-n} \int d\phi P_n(\phi) \delta(s - \exp\{\phi - n \ln 2\}) = \\ &= \frac{1}{s} \sum_n 2^{-n} \int d\phi P_n(\phi) \delta(\phi - n \ln 2 + \ln(1/s)) = \\ &= \frac{1}{s} \sum_n 2^{-n} P_n(n \ln 2 - \ln(1/s)) = \\ &= \frac{1}{s} \sum_n \int \frac{dq}{2\pi} \exp\left\{iq \ln(1/s) + n \ln \left[\frac{1 - 2^{-(iq+1)}}{iq + 1} \right]\right\} = \\ &= \frac{1}{s} \int \frac{dq}{2\pi} \frac{(1 + iq) e^{iq \ln(1/s)}}{2^{-(1+iq)} + iq}. \end{aligned}$$

В последний интеграл наибольший вклад дает вычет от того полюса подынтегрального выражения, который лежит в верхней полуплоскости комплексного q и находится ближе всего к вещественной оси. Это полюс $q = 2i$, и мы можем окончательно получить выражение

$$\mathcal{F}_\infty(s) \propto \frac{1}{s} e^{-2 \ln(1/s)} \propto s, \quad (48)$$

которое воспроизводит линейное поведение, обнаруженное в численном эксперименте. Этот подтверждает правильность нашего выбора оптимальной флуктуации. Еще раз подчеркнем, что наибольший вклад в

$\mathcal{F}_\infty(s)$ происходит отнюдь не от типичных “удачных конфигураций” (для которых $\phi \approx \bar{\phi}$). Последние вносят только относительно малый вклад $\sim s^\lambda$ (где $\lambda = (2 \ln 2 - 1)/(1 - \ln 2) \approx 1.26 > 1$). Главный вклад в $\mathcal{F}_\infty(s)$ идет от аномально “растянутых” удачных конфигураций, с более длинными прыжками, чем в типичных. Они отвечают $\phi \approx \phi_{\text{opt}} = (n \ln 2)/2 \approx 0.347n$, меньшим, чем $\bar{\phi} = 0.386n$. Так как оптимальное отклонение $|\phi_{\text{opt}} - \bar{\phi}| \sim \bar{\phi}$ большое, его вероятность *не может быть* описана Гауссовым распределением, которое применимо только для не слишком больших флуктуаций ϕ . Оптимальные флуктуации лежат в далеком, негауссовом хвосте функции распределения; учет этого факта совершенно необходим для получения правильного значения показателя степени s в исследуемой асимптотике.

4.6 Асимптотика низкой прозрачности

Как видно из рис.6, функция распределения $\mathcal{F}_\infty(s)$ быстро спадает при $s > 0.6$. Ее поведение в непосредственной близости от $s = 1$ описывается неуниверсальной асимптотикой (28), но в промежуточной области $N^{-1/2} \ll 1 - s \ll 1$ распределение остается универсальным, и выполняется асимптотический закон:

$$\mathcal{F}_\infty(s) \propto (1 - s)^{\text{const}/(1-s)^2}. \quad (49)$$

Проводники с малой проницаемостью соответствуют “неудачным конфигурациям”, описанным ниже. Самым важным элементом такой конфигурации является последовательность низкоэнергетических квазирезонансов, которую мы будем называть “обратной лестницей”, см. рис. 12, 13.

Сначала попытаемся поставить все квазирезонансы в обратную лестницу таким образом, чтобы максимальное расстояние между двумя последовательными квазирезонансами было не больше $1 - s$. (см. рис.12). Очевидно, что таким образом можно разместить не более $2/(1 - s)$ квазирезонансов, значит для применимости этой процедуры необходимо условие $N < 2/(1 - s)$. Если оно выполнено, то:

$$\mathcal{F}_N(s) \sim \exp \{N \ln((1 - s)/2)\}, \quad (50)$$

и, соответственно,

$$F_{\bar{N}}(s) \sim \sum_{N=1}^{\infty} \frac{((1 - s)/2)^N \bar{N}^N \exp\{-\bar{N}\}}{N!} = \exp \{-\bar{N}(1 + s)/2\}. \quad (51)$$

Когда резонансов очень много ($N \gg (1 - s)^{-2}$), оптимальная лестница должна быть устроена следующим образом.

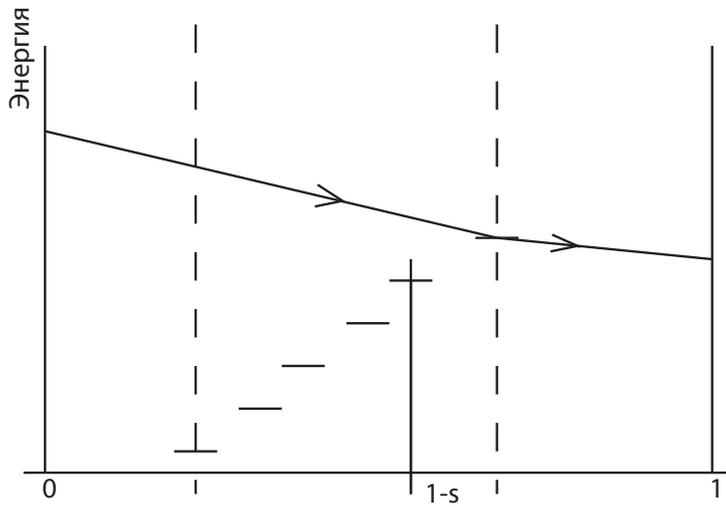


Рис. 12: Обратная лестница в случае малого общего количества квазирезонансов ($N < 2/(1 - s)$). В этом случае лестница включает в себя все квазирезонансы в системе

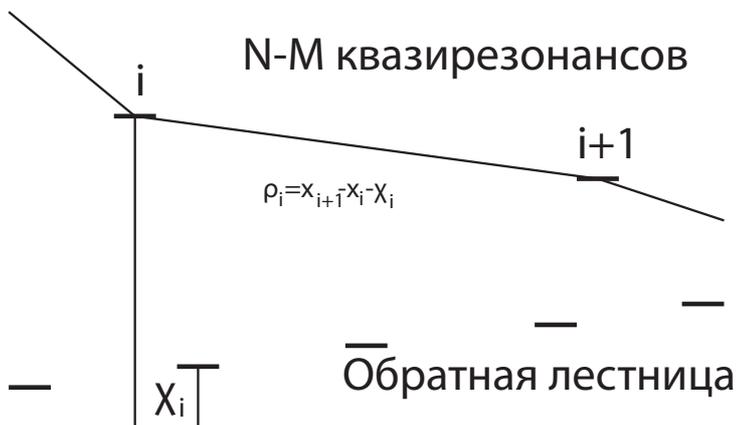


Рис. 13: Обратная лестница в случае большого общего количества квазирезонансов ($N > 2/(1 - s)$). В этом случае лестница содержит только часть всех квазирезонансов. Возможны прыжки над лестницей. На рисунке показана стоимость одного из этих прыжков: $\rho_i = x_{i+1} - x_i - \chi_i$.

- Возьмем $1 \ll N_0 \ll N$ наимизших квазирезонансов и построим их в обратную лестницу с примерно одинаковой длиной ступеней $\sim 1/N_0$. Величину N_0 в дальнейшем определим самосогласованно.
- Оставшиеся $N - N_0$ квазирезонансов образуют “облако”, висящее над обратной над лестницей. Никаких дополнительных условий на это облако не накладываем.
- В оптимальной лестнице может участвовать не более одного квазирезонанса из обратной лестницы, вклад этого единственного квазирезонанса в величину $X = 1 - s$ пренебрежимо мал, роль обратной лестницы сводится к созданию “останавливающего подвала”, попав в который, частица гарантированно возвращается в левый резервуар.
- Основная часть прыжков будет происходить в нижнем слое облака, содержащем $N_1 \sim N_0$ квазирезонансов.

Действительно, как известно из уже упоминавшейся задачи Улама [18, 19, 20], максимальное число прыжков, которое может совершить частица, спускаясь в слое толщиной N_1 , есть $\sqrt{N_1}$. С другой стороны, характерная величина $\chi_i \sim (N_0 + N_1)^{-1}$. В результате

$$X(N_1) = \sum_i \chi_i \sim \sqrt{N_1}/(N_0 + N_1), \quad (52)$$

достигает максимума $X_{\max} \sim N_0^{-1/2}$ при $N_1 \sim N_0$. Для того, чтобы величина X_{\max} равнялась $1 - s$, как это требуется по условию задачи, необходимо выбрать $N_0 \sim (1 - s)^{-2}$.

Теперь мы можем оценить вероятность возникновения описанной флуктуации:

$$\mathcal{F}_N(s) = F_{\overline{N}}(s) \sim N_0^{-N_0} \sim \exp \left\{ \frac{\ln(1 - s)}{(1 - s)^2} \right\} \quad (53)$$

Можно также показать, что в промежуточном случае, когда $2/(1 - s) < N < 2/(1 - s)^2$

$$\mathcal{F}_N(s) \sim \exp\{-K \ln K\}, \quad K = \frac{2(1 - s) + (\sqrt{1/4 - 3(2 - s) + N(1 - s)^2} - 1/2)}{(1 - s)^2} \quad (54)$$

Этот ответ сшивается с (50) и (53) в соответствующих предельных случаях.

4.7 Недостаточность диффузионного приближения

В работе [15] Шкловский, Фритцше и Барановский также рассматривали прыжковое движение горячей частицы, испускающей энергию. Они резонно предполагали, что, в духе экспоненциального приближения, каждый раз частица совершает прыжок на *ближайший* к ней уровень с энергией, более низкой, чем та, которой располагает частица на данный момент. При этом отдаваемая энергия на каждом прыжке, грубо говоря, в два раза меньше, чем на предыдущем, а длина прыжка, наоборот, в два раза больше. Пространственное направление прыжков, естественно, случайное. Это – “диффузионное” – приближение позволяет определить *усредненную по ансамблю образцов* пространственно-временную функцию распределения частиц, рождающихся в определенный момент в определенной точке с определенной энергией.

Попробуем применить эту же идеологию к нашей задаче о вероятности ухода на *большое* расстояние от исходной точки рождения. Для затравки посадим частицу на какой-нибудь уровень вблизи левого резервуара, а дальнейшее ее движение будем описывать с помощью диффузионного приближения. Что произойдет с частицей? Естественно, с подавляющей вероятностью она окажется снова в левом резервуаре, так как вероятность диффундировать направо на достаточно большое расстояние, счастливо избежав поглощающего резервуара, мала. В случае обычной диффузии эта малость была бы экспоненциальной, в случае же горячей частицы, как показано в работе [15], убывание вероятности ухода с расстоянием всего лишь степенное, $\propto L^{-\beta}$.

На первый взгляд, здесь возникает противоречие с нашими результатами, согласно которым убывание остается экспоненциальным для типичных конфигураций. Причина этого кажущегося противоречия в особой природе степенного хвоста, получающегося в диффузионном приближении: главный вклад в этот хвост дают те редкие диффузионные траектории, на которых частица аномально долго движется направо. Такие траектории возникают в редких конфигурациях, где существует очень длинная цепочка убывающих уровней, в которой каждый следующий является ближайшим (нижним) соседом предыдущего и находится всегда *справа* от него. Это те оптимальные флуктуации, которые приводят к аномально высокой проницаемости системы (см раздел 4.5).

Диффузионное приближение описывает *среднюю по ансамблю* прозрачность (не путать с ее средним логарифмом!), которая как раз и определяется такими редкими конфигурациями, каждая из которых, однако, дает аномально большой вклад. Действительно, пользуясь асимптотикой

(32), получаем

$$\bar{T} \approx \int F(s)e^{-\alpha s} \approx b/\alpha, \quad (55)$$

то есть средняя прозрачность действительно убывает степенным образом, именно, как $1/\alpha$. Именно из-за аномально большого вклада редких траекторий средняя прозрачность не является сколько-нибудь репрезентативной величиной.

Поскольку наша цель – определение функции распределения прозрачностей, нас, в основном, интересуют типичные конфигурации (и, соответственно, типичные значения прозрачности). При этом, однако, на фоне типичной конфигурации мы готовы учитывать такие экспоненциально редкие события, как прыжки частицы на *неблизжайшие* узлы. Эти события в диффузионном приближении полностью игнорируются.

Таким образом, диффузионное приближение хорошо описывает усредненные по ансамблю величины (в том числе, среднюю прозрачность). Это приближение принципиально непригодно для описания ухода частицы на далекое расстояние в типичной конфигурации и, следовательно, для определения функции распределения прозрачностей.

5 Конкретные физические эффекты в различных экспериментальных условиях

В общем случае электрический ток, протекающий через проволоку можно записать в виде:

$$I_R \propto \int_0^{\infty} [T(E)f_{\text{el}}(E) - T(-E)f_{\text{hole}}(E)]dE \quad (56)$$

где $f_{\text{el}}(E)$ – функция распределения налетающих неравновесных электронов, $f_{\text{hole}}(E)$ – дырок. Энергия электронов отсчитывается вверх от уровня Ферми, энергия дырок – вниз. Проницаемость проволоки $T(E) \propto \exp\{-\alpha s(E)\}$ зависит от энергии налетающей частицы. Важно понимать, что величины $s(E)$ и $s(E')$ сильно скоррелированы между собой при одинаковом знаке E и E' , и совсем не скоррелированы при противоположных знаках. Действительно, здесь мы имеем дело с одной фиксированной конфигурацией беспорядка, поэтому, когда при увеличении E в дело вступают новые квазирезонансы, эти новые квазирезонансы лежат в верхней, удаленной от уровня Ферми части полосы и оказывают лишь

незначительное влияние на проницаемость. Главные же квазирезонансы, лежащие вблизи уровня Ферми и в основном определяющие проницаемость, остаются теми же, что и до увеличения энергии.

При увеличении энергии налетающего электрона E увеличивается и число квазирезонансов $N(E)$. Понятно, что это увеличение происходит скачками, возникающими при прохождении границы полосы через уровни локализованных состояний. При больших $N(E)$, однако, флуктуации становятся относительно несущественными и

$$N(E) \approx \bar{N}(E) = |E|gL, \quad (57)$$

так что вместо зависимости $s(E)$ можно приближенно пользоваться более привычной зависимостью $s(N)$. Эта зависимость также состоит из нерегулярной последовательности скачков (см. рисунок 14), причем, чем больше N , тем в среднем меньше амплитуда скачков и тем больше расстояние между ними $\delta N(N)$. Зависимость $\delta N(N)$, определенная численно, показана на рисунке 15. Экспериментальные точки прекрасно легли на кривую

$$\delta N(N) = 1.04N/\ln N. \quad (58)$$

Это, очевидно, означает, что среднее полное число $\tilde{K}(N)$ скачков, которое $s(E)$ испытывает при увеличении $|E|$ от нуля до N/gL , ведет себя, как $\tilde{K}(N) \approx 0.48 \ln^2 N$, то есть имеет тот же порядок величины, что и среднее число квазирезонансов в оптимальной лестнице $\bar{K}(N)$. Такое совпадение представляется естественным, так как всякая перестройка оптимальной лестницы сопровождается скачком в s , а, с другой стороны, большинство перестроек (но не все) приводят к удлиннению лестницы.

При очень больших E имеем

$$s(E) \approx s^{(\pm)}(\mathcal{C}) + \Delta s^{(\pm)}(E, \mathcal{C}) \quad \text{при } E \rightarrow \pm\infty. \quad (59)$$

Зависящие от конфигурации беспорядка \mathcal{C} случайные величины $s^{(+)}(\mathcal{C})$ и $s^{(-)}(\mathcal{C})$ нескоррелированы между собой, распределение каждой из них описывается функцией $\mathcal{F}_\infty(s)$. Поправка представляет собой ступенчатую случайную функцию параметра E , состоящую из скачков $\delta_i s$ в точках E_i . Эта функция, естественно, не поддается аналитическому описанию. Можно, однако, произвести процедуру “огрубления” – усреднения по интервалу ΔE вблизи значения E (причем ΔE должно удовлетворять условию $\delta N(N)/gL \ll \Delta E \ll |E|$). После огрубления (обозначаемого ниже символом $\{\dots\}$) функция сглаживается, и мы получаем

$$\{\Delta s^{(\pm)}(E, \mathcal{C})\} \simeq D^{(\pm)}(\mathcal{C}) \frac{\ln N}{N}. \quad (60)$$

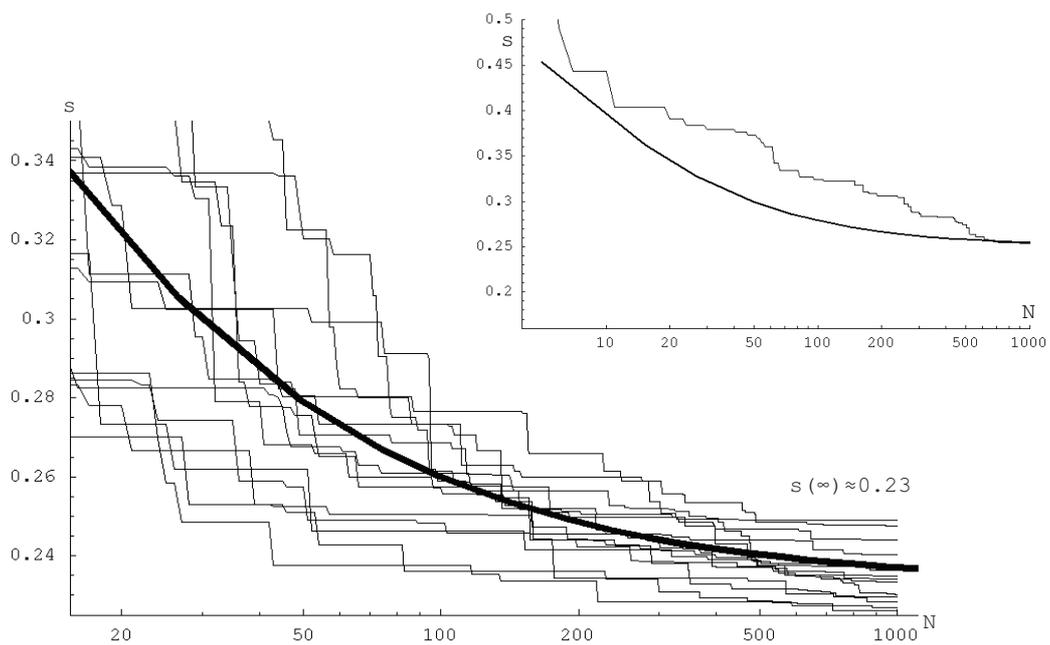


Рис. 14: $s(N)$ для одной реализации (врезка) и для серии реализаций, для которых $s(1000) \simeq 0.23$. Сплошной линией показана зависимость (60).

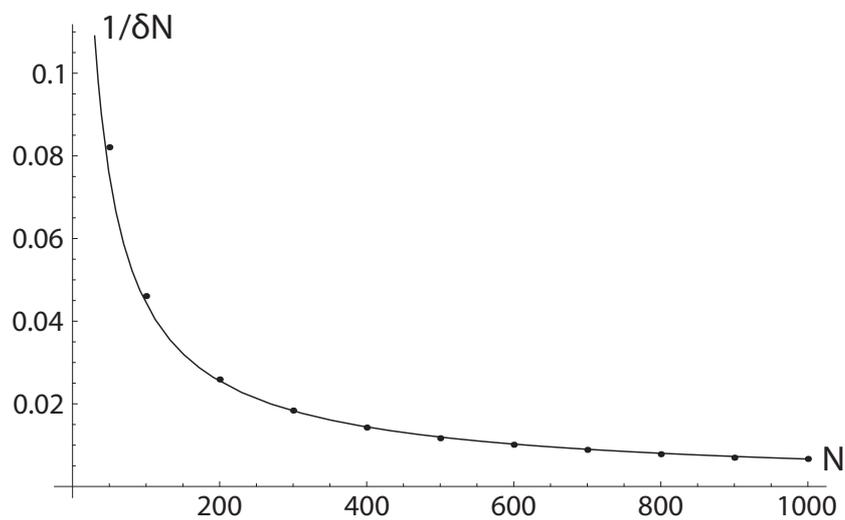


Рис. 15: Зависимость $[\delta N]^{-1}$ от N . Точки – результат численной симуляции, сплошная кривая – функция $0.96 \ln N/N$.

Поскольку $s^{(\pm)}(\mathcal{C})$ определяется несколькими последними – самыми длинными – прыжками, а поправка, наоборот, несколькими первыми короткими, то корреляции величин $s^{(\pm)}(\mathcal{C})$ и $D(\mathcal{C})$ должны быть сильно подавлены. Более того, можно ожидать, что, вследствие процедуры огрубления, $D(\mathcal{C})$ самоусредняется и вообще почти не флуктуирует, совпадая со своим средним значением, взятым из формулы (33):

$$D^{(\pm)}(\mathcal{C}) \simeq \bar{D} = 0.598. \quad (61)$$

Проверить это утверждение численно нам пока, увы, не удалось. Трудности связаны со слишком медленным убыванием отношения $\delta N/N \sim 1/\ln N$, что не позволяет надежно произвести процедуру огрубления даже при $N = 1000$. Вместе с тем оно представляется довольно естественным и ниже мы будем пользоваться формулой (61) для получения качественных оценок.

5.1 Зависимость тока от напряжения на инжекторе

Простейший способ сделать инжектор неравновесным – подать на него напряжение V , так что химический потенциал инжектора окажется сдвинут на величину $\mu = eV$ относительно резервуаров. Считая температуру инжектора равновесной: $T_{\text{in}} = T \ll |\mu|$, мы можем записать:

$$f_{\text{el}}(E) = \theta(\mu - E), \quad f_{\text{hole}}(E) = 0 \quad \text{при } \mu > 0, \quad (62)$$

$$f_{\text{el}}(E) = 0, \quad f_{\text{hole}}(E) = \theta(|\mu| - E) \quad \text{при } \mu < 0. \quad (63)$$

Подставляя в формулу (56) и принимая во внимание экспоненциальный (в среднем) рост проницаемости $\mathcal{T}(E)$ с увеличением $|E|$, так что главный вклад в интеграл по E дает окрестность $E = |\mu|$, мы получим

$$I(V) \propto \text{sign}\mu \exp\{-\alpha s(eV)\}. \quad (64)$$

Поскольку зависимость $s(E)$ – скачкообразная (см рисунок 14), то ток $I(V)$ также должен испытывать скачки при изменении напряжения. Расположение этих скачков V_i и их величины δI_i – нерегулярны и зависят от конкретной реализации беспорядка. В реальности скачки будут несколько сглажены (причем эта сглаженность сохраняется даже при $T \rightarrow 0$). Действительно, сразу же после достижения какого-либо $V = V_i$ возникает новая оптимальная лестница, с проницаемостью, в $\exp\{\alpha \delta s_i\}$ раз большей, чем предшествующая. Однако вклад этой новой лестницы по-началу содержит малый множитель $V - V_i$ и реально начинает доминировать над вкладом предшествующей только при

$(V - V_i)/(V_i - V_{i-1}) \exp\{\alpha\delta s_i\} \gtrsim 1$. Отсюда легко оценить характерную ширину Γ размытия скачка по V :

$$\Gamma(V) \sim \delta V(V) \exp\{-\alpha\delta s\}, \quad \delta V(V) \sim \delta N(N)/(gLe) \sim N/(gLe) \ln N. \quad (65)$$

Для относительно больших скачков с $\delta s \gg 1/\alpha$ (а только такие скачки правомерно рассматривать в принятом в нашей работе экспоненциальном приближении) ширина размытия $\Gamma(V) \ll \delta V(V)$ – много меньше характерного расстояния между скачками. Это значит, что такие скачки не сливаются между собой и должны быть отчетливо видны в вольт-амперной характеристике.

5.2 Термоэдс: зависимость тока от температуры инжектора

Другой способ сделать инжектор сильно неравновесным – нагреть его до температуры $T_{\text{in}} \gg T$. В этом случае $f_{\text{el}}(E) = f_{\text{hole}}(E)$ и в систему из инжектора поступают равные по величине потоки электронов и дырок. Если бы в неупорядоченной проволоке наблюдалась приближенная симметрия относительно замены электронов на дырки (такая симметрия имеется в металлах), то результирующий ток I_R был бы сильно подавлен. В нашей системе, однако, электрон-дырочной симметрии нету вовсе. Как мы уже отмечали в конце раздела 2.2, наборы квазирезонансов для электронов и для дырок не совпадают, поэтому соответствующие электронам и дыркам проницаемости экспоненциально сильно отличаются друг от друга, и в термоэдс не возникает никакой малости, связанной с электрон-дырочной симметрией, несмотря на наличие такой симметрии в исходном потоке частиц, прилетающих из инжектора.

Мы сосредоточимся на случае достаточно длинных проволок, для которых справедлив результат (59). Более того, имея в виду усреднение по достаточно широкому интервалу энергий ($\sim T_{\text{in}}$), мы будем пользоваться огрубленным выражением (60). Подставляя (60) в (56), мы получим

$$\begin{aligned} I_R &\propto \int_0^{\infty} [\mathcal{T}(E) - \mathcal{T}(-E)] f(E) dE \approx \\ &\approx [e^{-\alpha s^{(+)}(c)} - e^{-\alpha s^{(-)}(c)}] \int_0^{\infty} \exp\left\{-\alpha \bar{D} \frac{\ln N}{N}\right\} f(E) dE. \end{aligned} \quad (66)$$

При очень высокой температуре, когда $T_{\text{in}} > \alpha/gL \sim T_0$, поправочным членом в (59) вообще можно пренебречь при характерных энергиях

$E \sim T_{\text{in}}$ и мы приходим к результату, не содержащему никакой экспоненциальной зависимости от температуры инжектора:

$$I_R \propto [e^{-\alpha s^{(+)}(C)} - e^{-\alpha s^{(-)}(C)}]. \quad (67)$$

При температурах из интервала $T \ll T_{\text{in}} \ll T_0$, как мы сейчас убедимся, главный вклад в термоток дают электроны (или дырки) с энергиями $E \gg T_{\text{in}}$, так что можно заменить $f(E)$ на больцмановское распределение $e^{-E/T_{\text{in}}}$. Тогда

$$I_R \propto [e^{-\alpha s^{(+)}(C)} - e^{-\alpha s^{(-)}(C)}] \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\alpha \bar{D} \frac{\ln N}{N} - \frac{E}{T_{\text{in}}} \right\} dE. \quad (68)$$

Интегрирование по методу перевала с учетом связи $N \approx gLE$ дает:

$$I_R \propto [e^{-\alpha s^{(+)}(C)} - e^{-\alpha s^{(-)}(C)}] \exp \left\{ -(E_0/T_{\text{in}})^{1/2} \right\}, \quad (69)$$

$$E_0 = 8\bar{D}T_0 \ln N_{\text{opt}}, \quad (70)$$

а оптимальная энергия, дающая наибольший вклад в интеграл

$$E_{\text{opt}} = N_{\text{opt}}/gL = (2\bar{D}T_0T_{\text{in}} \ln N_{\text{opt}})^{1/2} \sim (T_0T_{\text{in}})^{1/2}. \quad (71)$$

Можно показать, что, из-за большой ширины области интегрирования, никаких скачков в зависимости тока от температуры инжектора не будет.

Итак, присутствие нагретого инжектора вызывает в системе термоток, знак и величина которого флуктуируют от образца к образцу. Этот ток, как правило, определяется либо только вкладом электронов, либо только вкладом дырок (в зависимости от того, что больше: $s^{(-)}(C)$ или $s^{(+)}(C)$). Величина термотока флуктуирует экспоненциально сильно, но она не содержит никакой дополнительной малости, связанной с электрон-дырочной симметрией: последняя симметрия в системе отсутствует. Отметим еще, что температурная зависимость (69) по случайному совпадению напоминает известный закон Эфроса-Шкловского (см. [3]), однако в нашем случае результат определяется не температурой термостата T , а температурой инжектора T_{in} .

6 Случай многих проволок, соединенных параллельно

В этом разделе мы рассмотрим $M \gg 1$ длинных проволок, соединенных параллельно (см. рис. 16). Для такой постановки задачи проникаемость

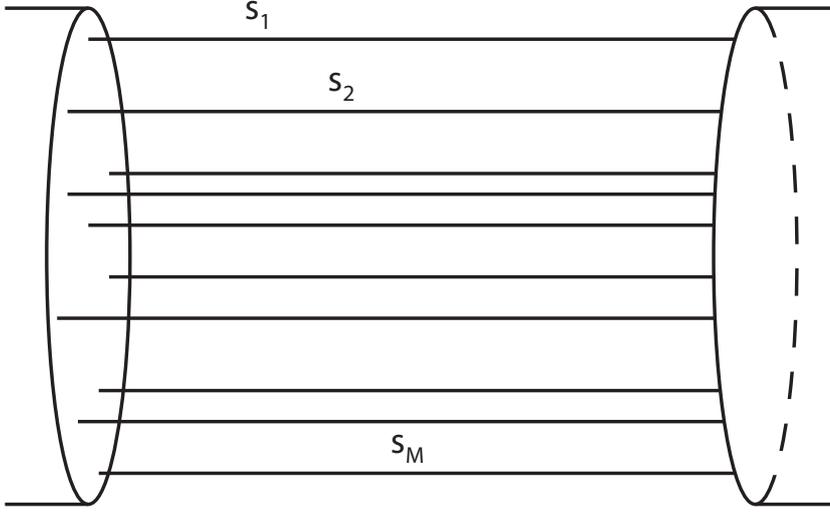


Рис. 16: Постановка задачи в многопроволочном случае.

системы пропорциональна сумме индивидуальных проницаемостей:

$$\mathcal{T}_{\text{tot}} \equiv e^{-\alpha s_{\text{tot}}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M e^{-\alpha s_m}. \quad (72)$$

Для определения функции распределения величины s_{tot} мы воспользуемся методом, сходным с предложенным в работе [21]. Если проволоки достаточно длинные, то распределение каждого s_m описывается функцией \mathcal{F}_{∞} и, соответственно, распределение s_{tot}

$$\begin{aligned} F(s_{\text{tot}}, M) &= \alpha e^{-\alpha s_{\text{tot}}} \prod_{m=1}^M \int \mathcal{F}_{\infty}(s_m) ds_m \delta \left(e^{-\alpha s_{\text{tot}}} - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M e^{-\alpha s_m} \right) = \\ &= \alpha e^{-\alpha s_{\text{tot}}} \int \frac{dq}{2\pi} \exp\{-iqe^{-\alpha s_{\text{tot}}}\} \left[\int ds \mathcal{F}_{\infty}(s) \exp\left\{-\frac{iq}{M} e^{-\alpha s}\right\} \right]^M. \end{aligned} \quad (73)$$

Далее используем условие нормировки:

$$\int ds \mathcal{F}_{\infty}(s) \exp\left\{-\frac{iq}{M} e^{-\alpha s}\right\} = 1 + \int ds \mathcal{F}_{\infty}(s) \left[\exp\left\{-\frac{iq}{M} e^{-\alpha s}\right\} - 1 \right]. \quad (74)$$

Как мы увидим, для $M \gg 1$ соответствующие $q/M \gg 1$, и второй член в (74) мал. Интеграл по s в нем определяется в основном малыми $s \ll 1$,

поэтому мы можем использовать асимптотику (32). В результате

$$F(s_{\text{tot}}, M) \approx \alpha e^{-\alpha s_{\text{tot}}} \int \frac{dq}{2\pi} \times \\ \times \exp \left\{ -iqe^{-\alpha s_{\text{tot}}} + Mb \int_0^\infty s ds \left[\exp \left\{ -\frac{iq}{M} e^{-\alpha s} \right\} - 1 \right] \right\}. \quad (75)$$

Вводя новые переменные $y = \alpha s$ и $u = \ln(q/M)$, мы получаем

$$F(s_{\text{tot}}, M) \approx \alpha \int \frac{du}{2\pi} \exp \left\{ \ln M - \alpha s_{\text{tot}} + u - ie^{\ln M - \alpha s_{\text{tot}} + u} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ Mb/\alpha^2 \int_0^\infty y dy \left[\exp \left\{ -ie^{u-y} \right\} - 1 \right] \right\} \approx \\ \approx \alpha \int \frac{dt}{2\pi} \exp \left\{ t - ie^t - \frac{M}{2} \left(s_{\text{tot}} - \frac{\ln M + t}{\alpha} \right)^2 \right\}, \quad (76)$$

где сдвинутая переменная интегрирования $t = \ln M - \alpha s_{\text{tot}} + u$. По смыслу экспоненциального приближения α – самый большой параметр модели, поэтому можно рассматривать только случай $\ln M \sqrt{M} \ll \alpha$ и пренебрегать вторым членом в круглых скобках в (76). Интеграл по t в (76) в области $t \ll 1$ обрезается за счет первого члена в экспоненте (76), а в области $t \gg 1$ – за счет второго члена. В результате главный вклад в интеграл дают $t \sim 1$, так что после интегрирования мы получаем обрезанное квази-гауссово распределение:

$$F(s_{\text{tot}}, M) \approx \theta(s_{\text{tot}}) \sqrt{2M/\pi} \exp \left\{ -Ms_{\text{tot}}^2/2 \right\}. \quad (77)$$

Таким образом, среднее значение

$$\bar{s}_{\text{tot}} = \sqrt{2/(\pi M)}, \quad (78)$$

убывает с ростом M .

Формула (77) несправедлива в ближайшей окрестности точки $s_{\text{tot}} = 0$. Можно показать, что при $s_{\text{tot}} \rightarrow +0$ распределение быстро спадает: $F(s_{\text{tot}}, M) \propto s_{\text{tot}}^{2M-1}$.

Для качественного объяснения основного результата этой главы, формулы (78), заметим, что при достаточно большом α проводимость пучка из M цепочек определяется одной из них – самой прозрачной. Таким образом, для того, чтобы выполнялось условие $\mathcal{T}_{\text{tot}} > e^{-\alpha s_{\text{tot}}}$, из M цепочек должна найтись хотя бы одна с $s < s_{\text{tot}}$. Для этого необходимо, чтобы

$$M \int_0^{s_{\text{tot}}} F(s) ds \gtrsim 1. \quad (79)$$

Имея в виду, что $s_{\text{tot}} \ll 1$ (это подтверждается ответом), мы можем воспользоваться асимптотикой $F(s) \approx bs$. В результате условие (79) сведется к $M s_{\text{tot}}^2 \gtrsim 1$, что подтверждает зависимость $\bar{s}_{\text{tot}} \sim M^{-1/2}$.

7 Корреляционные эффекты при изменении параметров системы

В прошлой главе мы рассмотрели зависимости тока, протекающего через систему, от напряжения на инжекторе и от его температуры. Здесь мы исследуем зависимость тока от других, в основном – геометрических – параметров.

7.1 Изменение проницаемости при сдвиге уровня Ферми в проволоке

В разделах 5.1 мы изучали эволюцию проницаемости системы при изменении потенциала инжектора V или его температуры T_{in} , и выяснили, что сначала, при “малых” $\bar{N} \lesssim 100$ (где $\bar{N} \sim e|V|gL$ или $\bar{N} \sim T_{\text{in}}gL$), проницаемость сильно растет с увеличением V (или T_{in}), а затем, при больших \bar{N} , практически выходит на насыщение, причем “насыщенное” значение s случайно меняется от образца к образцу. Таким образом, в этом случае наблюдается стопроцентная корреляция величин s при различных (но больших) значениях V (или T_{in}) в одном и том же образце.

Другая возможная постановка эксперимента заключается в том, чтобы менять не свойства инжектора, а положение химпотенциала в проволоке и в резервуарах. Сдвиг химпотенциала можно осуществить, например, с помощью гейта, на который подается потенциал. Как будет меняться s в этом случае? Если при изменении V затрагивались высокие квазирезонансы, играющие маргинальную роль для проницаемости, сдвиг химпотенциала, напротив, приводит к смене конфигурации именно низших, самых важных, квазирезонансов. Поэтому следует ожидать, что уже при небольшом сдвиге, соответствующем изменению \bar{N} всего на несколько единиц, величина s должна полностью смениться. Количественно за этим можно проследить, вычисляя нормированную корреляционную функцию

$$C(\mu_1, \mu_2) = \frac{\overline{s(\mu_1)s(\mu_2)} - \overline{s(\mu_1)} \cdot \overline{s(\mu_2)}}{\sqrt{\overline{s^2(\mu_1)} - \left(\overline{s(\mu_1)}\right)^2} \sqrt{\overline{s^2(\mu_2)} - \left(\overline{s(\mu_2)}\right)^2}}, \quad (80)$$

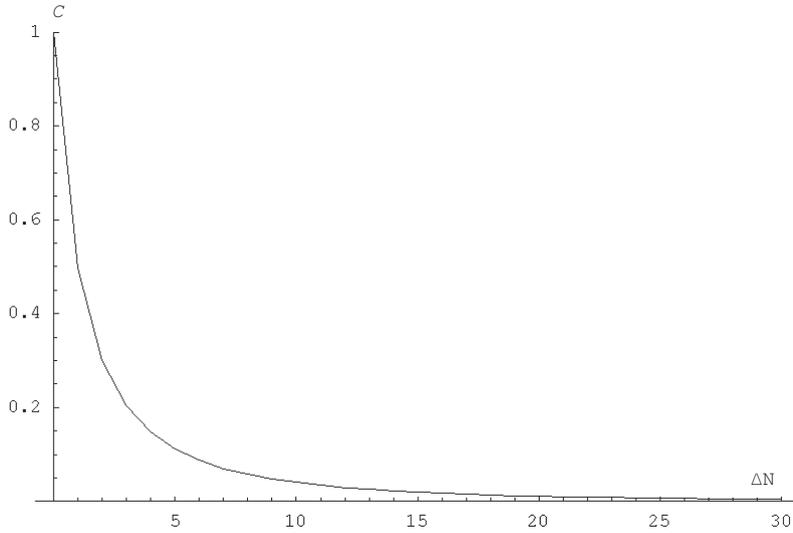


Рис. 17: Зависимость корреляционной функции $C(\Delta N)$ при изменении химического потенциала системы; $\Delta N = Lg\Delta\mu$.

где $s(\mu)$ находятся при одной и той же конфигурации беспорядка и при одинаковых параметрах инжектора, но при различных значениях химического потенциала μ . Если параметры системы таковы, что \bar{N} – велико, то как нетрудно сообразить, $C(\mu_1, \mu_2) \approx C(\mu_1 - \mu_2)$ должно зависеть только от абсолютной величины сдвига химического потенциала $\Delta\mu = |\mu_1 - \mu_2|$, а не от обоих его значений по отдельности. Более того, ясно, что существенной переменной является характерное число затронутых уровней $\Delta N \equiv Lg\Delta\mu$. Наши численные результаты, показанные на рис. 17, подтверждают высказанное выше предположение: уже при $\Delta N \sim 5$ величина C уменьшается на порядок.

Заметим еще, что, изучая статистику проницаемостей, получающихся с помощью изменения химического потенциала, в принципе возможно восстановить функцию распределения $F(s)$, используя только один образец.

7.2 “Подвижные контакты”: зависимость от положения контактов с резервуарами

Как изменяется прозрачность, если контакт с одним из резервуаров (или оба контакта) перемещаются вдоль проволоки? Мы исследовали корреляции

ляторы

$$C_R(x_R^{(1)}, x_R^{(2)}) = \frac{\overline{s(x_R^{(1)})s(x_R^{(2)})} - \overline{s(x_R^{(1)})} \cdot \overline{s(x_R^{(2)})}}{\sqrt{\overline{s^2(x_R^{(1)})} - (\overline{s(x_R^{(1)})})^2} \sqrt{\overline{s^2(x_R^{(2)})} - (\overline{s(x_R^{(2)})})^2}}, \quad (81)$$

$$C_L(x_L^{(1)}, x_L^{(2)}) = \frac{\overline{s(x_L^{(1)})s(x_L^{(2)})} - \overline{s(x_L^{(1)})} \cdot \overline{s(x_L^{(2)})}}{\sqrt{\overline{s^2(x_L^{(1)})} - (\overline{s(x_L^{(1)})})^2} \sqrt{\overline{s^2(x_L^{(2)})} - (\overline{s(x_L^{(2)})})^2}}, \quad (82)$$

где, в случае (81) изменяется положение правого контакта x_R , а в случае (82) – левого (x_L).

Результаты для $C_{R,L}$ как функции отношения длин $L_1 = x_R^{(1)} - x_L^{(1)}$ и $L_2 = x_R^{(2)} - x_L^{(2)}$ показаны на рис. 18. Разная форма C_R и C_L еще раз указывает на важность последних прыжков в оптимальной лестнице.

Приведем качественные соображения, объясняющие, почему, в случае движения левого резервуара, корреляционная функция C становится отрицательной при достаточном отклонении L_2 от L_1 . Рассмотрим самый низкий квазирезонанс в проволоке. Если этот квазирезонанс находится в левой ее половине, то он является вредной ловушкой – препятствием на пути электрона; актуальное s , соответствующее такой конфигурации – больше среднего \bar{s} . Если переместить левый резервуар к середине проволоки, то этот квазирезонанс эффективно исчезнет и s станет произвольным, значит, в среднем – больше, чем до сдвига. Если, наоборот, нижний квазирезонанс находился в правой половине проволоки, но ближе к центру, то соответствующее такой конфигурации s должно было быть ниже среднего, т.к. последний прыжок был бесплатным и достаточно длинным. После сдвига левого резервуара к центру проволоки этот квазирезонанс окажется в левой половине новой конфигурации; соответствующее s станет выше среднего. Таким образом, в любом случае, $s(L_1)$ и $s(L_2)$ отклоняются от среднего в противоположные стороны, что подтверждается отрицательной корреляцией, видной на рис. 18.

7.3 “Прямая инъекция”: зависимость от положения инжектора

В этом разделе мы рассмотрим экспериментальную постановку, показанную на рис. 1b, когда частицы инжектируются непосредственно в проволоку, через туннельный контакт. Поскольку нас интересует ситуация,

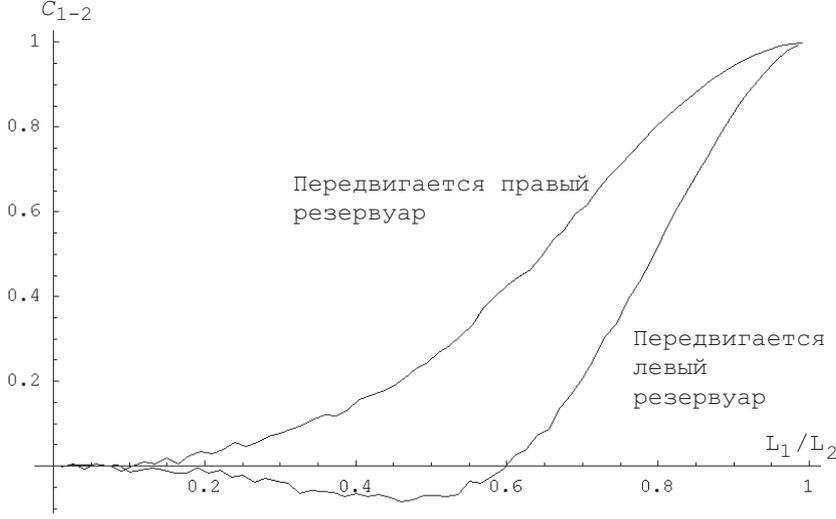


Рис. 18: $C(L_1/L_2)$ для двух случаев: подвижного правого контакта и подвижного левого контакта

когда состояние проволоки слабо отклоняется от равновесия, мы будем предполагать, что инжектируемые электроны не накапливаются в ней, а относительно быстро уходят (либо в левый, либо в правый резервуар). Ясно, что это условие будет выполнено, если проницаемость туннельного контакта \mathcal{T}_0 ниже, чем проницаемость самой проволоки. При этом, в частности, можно будет пренебречь потоком, возвращающимся из проволоки обратно в инжектор.

Итак, из инжектора в проволоку попадает ток $I_0 = \mathcal{T}_0 I_{\text{in}}$. Будем следить за токами, I_L и I_R , приходящими, соответственно, в левый и в правый резервуары. Пусть $s_{L,R} = -(\ln \mathcal{T}_{L,R})/\alpha$, где $\mathcal{T}_{L,R} = I_{L,R}/I_0$ – проницаемость по отношению к проходу частицы в соответствующий резервуар. Поскольку попадающая в проволоку частица с единичной вероятностью уходит из нее в один из резервуаров, мы можем написать

$$\exp\{-\alpha s_L\} + \exp\{-\alpha s_R\} = 1. \quad (83)$$

При этом в типичной ситуации одна из этих проницаемостей близка к единице ($s \approx 0$), а другая – экспоненциально мала ($s \neq 0$). Ясно, что максимальные значения $s_{L,R}$, достигающиеся в случае прямого туннелирования в соответствующем направлении, есть $s_L^{(\max)} = x_{\text{in}}$ и $s_R^{(\max)} = 1 - x_{\text{in}}$, где x_{in} – положение инжектора.

Зависимость \bar{s}_R от x_{in} для длинной цепочки приведена на рис. 19.

На рис. 20 показаны функции распределения $F(s_R)$ при нескольких малых значениях x_{in} . Дельта-функциональный вклад при $s = 0$ соответ-

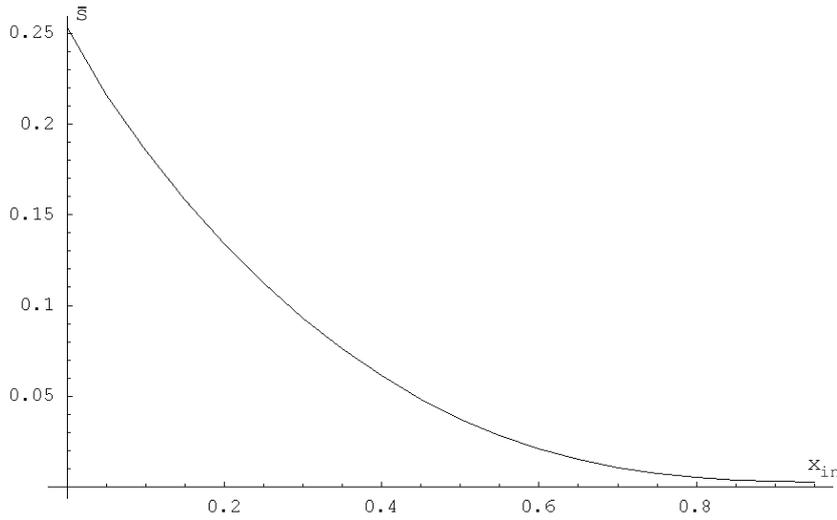


Рис. 19: \bar{s} как функция положения инжектора x_{in} для $\bar{N} = 1000$

ствует вероятности того, что “проницаемость вправо” окажется больше “проницаемости влево”. Естественно, что эта вероятность возрастает при увеличении x_{in} . Для малых x_{in} эволюцию функции распределения при увеличении x_{in} сводится к следующему: Возьмем “стандартный” график $F(s)$ (см. рис. 6), соответствующий крайне левому положению инжектора сдвинем его влево на x_{in} . Все, что оказалось левее точки $s = 1$ –отрежем и соберем в дельта-функцию. Действительно, при малом x_{in} уход частиц в левый резервуар осуществляется в основном путем прямого упругого туннелирования, которому соответствует подбарьерное действие αx_{in} . Все те конфигурации, в которых подбарьерное действие, соответствующее уходу вправо, меньше, чем αx_{in} , отвечают, поэтому, случаю $s_R = 0$.

8 Заключение

Мы исследовали проницаемость равновесной одномерной системы по отношению к прохождению неравновесных пробных частиц с энергиями, много большими, чем температура системы. Возможность по пути останавливаться в некоторых локализованных состояниях, отдавая избыточную энергию термостату, в среднем сильно увеличивает проницаемость.

- Мы нашли функцию распределения $F(s)$ для s – нормированного логарифма проницаемости. С увеличением длины системы L среднее по ансамблю образцов \bar{s} растет сначала несколько медленнее линейного закона, но при очень больших L зависимость выходит на

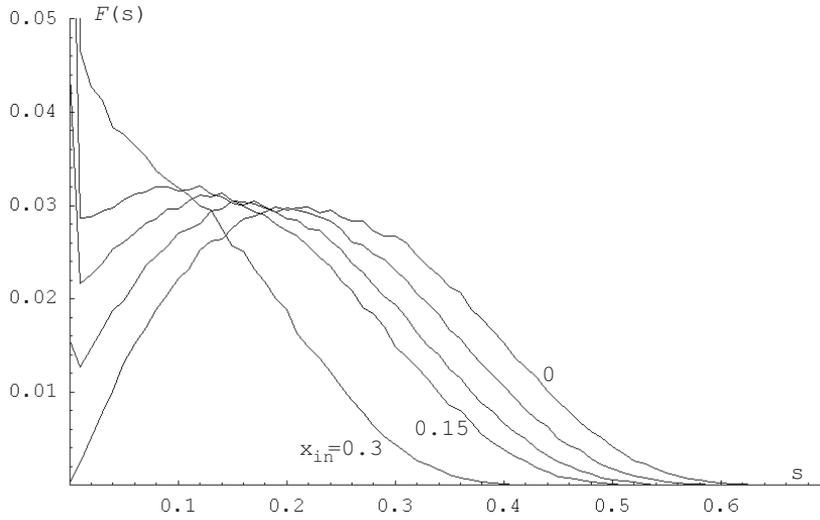


Рис. 20: Функция распределения $F(s)$ при различных x_{in} для $\bar{N} = 1000$, $x = 0.3, 0.15, 0.1, 0.05, 0$.

линейную. Ее наклон, однако, примерно в 4 раза меньше, чем для случая прямого упругого туннелирования. Функция $F(s)$ – широкая: ее дисперсия порядка среднего значения. Во всем диапазоне s функция распределения была нами определена численно; ее асимптотики при $s \rightarrow 0$ и при $s \rightarrow 1$ были найдены аналитически.

- Мы выполнили специальное исследование с целью понять устройство “оптимальной лестницы” – последовательности локализованных состояний с убывающими энергиями, которую путешествующая по проволоке частица выбирает для своих промежуточных остановок. Структура конца лестницы – ее нескольких последних, самых длинных прыжков, дающих главный вклад в величину s , оказалась довольно простой: она неплохо описывается гипотезой скейлинга. Некоторые тонкие эффекты (например, связанные с поправочными членами в асимптотике \bar{s}), однако, определяются как раз множеством начальных, очень коротких, прыжков. Здесь, как мы убедились, условие скейлинга не работает. Мы подробно исследовали структуру начала лестницы численно и получили ряд эмпирических формул для ее описания. Вывести эти законы аналитически нам, увы, так пока и не удалось.
- Мы также вычислили функцию распределения $F_M(s)$ для пучка из $M \gg 1$ параллельно соединенных проволок. При этом как \bar{s} , так и дисперсия, уменьшаются, как $M^{-1/2}$.

- Мы исследовали зависимость проницаемости фиксированного образца от энергии частицы. Эта зависимость представляет собой случайную функцию, которая, однако, приобретает вполне регулярный вид после “процедуры огрубления” (сглаживания быстрых флуктуаций). На основании этого исследования мы получили зависимости проницаемости от напряжения на инжекторе и от его температуры.
- Мы определили статистические свойства эволюции проницаемости при изменении химического потенциала в системе и геометрического положения контактов.

Список литературы

- [1] P. W. Anderson, Phys. Rev. 109, 1492 (1958).
- [2] И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул и Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, - Наука, 1989.
- [3] Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. *Электронные свойства легированных полупроводников*, - Наука, 1979.
- [4] В. Л. Березинский. ЖЭТФ, 65, 1251, 1973.
- [5] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams and D. S. Fisher, Phys. Rev. B 22, 3519 (1980).
- [6] P. W. Anderson, Phys. Rev. B 23, 4828 (1981).
- [7] А.А. Гоголин, В.И. Мельников, Э.И. Раппа. ЖЭТФ, 69 (1), 327-349 (1975).
- [8] J. Kurkijärvi, Phys. Rev. B 8, 922 (1973).
- [9] М.Э. Райх, И.М. Рюзин. ЖЭТФ, 95, 1113, 1989.
- [10] N. F. Mott, J. Non-Cryst. Solids, 1, 1 (1968); V. Ambegaokar, B. J. Halperin and J. S. Langer, Phys. Rev. B 4, 2612 (1971).
- [11] T. Nattermann, T. Giamarchi and P. Le Doussal, Phys. Rev. Lett. 91, 056603 (2003).
- [12] M. M. Fogler and R. S. Kelley, Phys. Rev. Lett. 95, 166604 (2005).
- [13] A. S. Rodin and M. M. Fogler, Phys. Rev. B 80, 155435 (2009).
- [14] Nguyen Van Lien and B.I. Shklovskii, Sol. St. Comm., 38, 99 (1981).
- [15] B.I. Shklovskii, H.Fritzsche, and S.D.Baranovskii, Phys. Rev. Lett. 62, 2989 (1989).
- [16] S.D. Baranovskii, H. Fritzsche, E.I. Levin, I.M. Ruzin, B.I. Shklovskii, ЖЭТФ, 96, 1362 (1989).
- [17] M. Matsumoto and T. Nishimura, ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation Vol. 8, No. 1, January pp.3-30 (1998)
- [18] S.M.Ulam, in *Modern Mathematics for the Engineers*, E.F.Beckenbach, ed., McGraw-Hill, 261-281, 1961.

- [19] Percy Deift, in *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Madrid 2006.
- [20] J. Baik et al, *J. Amer. Math. Soc.* 12 (1999), no. 4, 1119–1178.
- [21] М.Э. Райх, И.М. Рузин. *ЖЭТФ* 65, 1273, 1987.