

Министерство общего и профессионального образования  
Российской Федерации  
Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Магистерский диплом

**Фермионная четность и аномальный  
эффект Джозефсона в SNS-контакте на  
топологическом изоляторе**

студент 428 гр. Иоселевич П.А.

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. Фейгельман М.В.

Москва, 2010г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>SNS-система и ее спектр</b>	<b>4</b>
2.1	Электрон-дырочная симметрия и пфафффиан . . . . .	5
2.2	Связь с $k_x + ik_y$ -сверхпроводником . . . . .	6
2.3	Состояния в коре вихря . . . . .	7
2.4	Волновые функции в трубке . . . . .	8
2.5	Сшивка волновых функций при $\nu \ll p_f R$ . . . . .	9
2.6	Негибридизованные уровни . . . . .	13
2.7	Роль возмущений, защищенные уровни и эффект четности . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Джозефсоновский ток</b>	<b>14</b>
3.1	Ток и эффект четности . . . . .	14
3.2	Вычисление аномального тока . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Обсуждение результатов</b>	<b>20</b>
4.1	Зависимость аномального тока от температуры . . . . .	20
4.2	Зависимость от параметров: $R, L, \xi, \lambda_f$ . . . . .	21
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>22</b>
A.1	Нахождение в.ф. на сверхпроводящей поверхности при $\nu \ll p_f r$	22
A.2	Нахождение в.ф. на сверхпроводящей поверхности при $\nu \sim p_f r$	26
A.3	Уравнения сшивки при $\nu \ll p_f R$ . . . . .	27
A.4	Уравнения сшивки при $\nu \sim p_f R$ . . . . .	28
A.5	Список обозначений . . . . .	29

## 1 Введение

Топологический изолятор (ТИ) – фаза кристалла, в которой в толще вещества имеется щель в электронном спектре, однако на его поверхности всегда имеются бесщелевые моды. Обычно фазы вещества удается различать по существующим в нем симметриям и их нарушению. Изучение квантового эффекта Холла привело к понятию топологического порядка, позволяющего иначе классифицировать фазы вещества. Состояние квантового эффекта Холла не нарушает никаких симметрий, однако в нем определенные величины, такие, как Холловская проводимость или число краевых мод, нечувствительны к непрерывному изменению параметров. Эти величины могут измениться только в результате фазового перехода и в этом смысле топологически защищены. Похожим образом устроен топологический изолятор: его гамильтониан, как в обычном изоляторе, имеет щель в толще, но на его границе (поверхности) имеются топологически защищенные бесщелевые моды : непрерывное изменение параметров гамильтониана не способно изменить числа краевых мод, если только это изменение не захлопнет в какой-то момент щели в толще ТИ. Трехмерные топологические изоляторы делятся на сильные и слабые. В

слабых ТИ, в отличие от сильных, поверхностные моды не защищены от возмущений.

Нас будет интересовать движение электронов на поверхности сильного ТИ, покрытого сверхпроводящей пленкой. Эффект близости приводит к появлению щели, равной сверхпроводящей  $\Delta$ , в поверхностном спектре – бесщелевые моды остаются только на границах сверхпроводящих областей. В качестве такой границы сверхпроводящей области можно рассматривать кор вихря, пронизывающего поверхность покрытого сверхпроводником ТИ. Фу и Кане показали, что в коре вихря всегда существует связанное майорановское состояние (MBS)[2]. Операторы рождения и уничтожения майорановского фермиона совпадают, а его энергия равна нулю. Отдельный майорановский фермион топологически защищен – его энергия не меняется при возмущениях, сохраняющих электрон-дырочную симметрию, например, в присутствии примесей или в магнитном поле. Однако, два перекрывающихся майорановских фермиона комбинируются в пару состояний, энергия которых уже не равна нулю. Вихрь пересекает поверхность конечного образца ТИ дважды, поэтому на ней обязательно имеется два MBS. Если они расположены далеко друг от друга и взаимодействие между ними туннельное, то приближенно можно считать их изолированными. MBS интересны с точки зрения построения квантового компьютера – пара изолированных MBS является перспективным кандидатом на роль кубита. Информация в таком кубите хранится нелокально, а состояния имеют нулевую энергию [6].

Интересными свойствами обладает система из  $2n$  вихрей, несущих майорановские моды. В такой системе основное состояние  $2n$  - кратно вырождено. Как было показано Ивановым [13], вихри подчиняются неабелевой статистике. При адиабатическом переплетении вихрей – обводу вихрей друг вокруг друга, возвращающему их в новом порядке на прежние позиции – основное состояние преобразуется, причем унитарный оператор этого преобразования существенно зависит от порядка обводов вихрей – элементарные перестановки соседних вихрей не коммутируют друг с другом. Вывод в [13] производился для вихрей в полкванта  $\frac{h}{4e}$ , существующих в некоторых сверхпроводниках с триплетным спариванием, однако необходимыми для неабелевой статистики являются только квантование вихрей и смена знака MBS вихря при его обводе вокруг другого вихря.

Нас будет интересовать случай одного вихря, причем с существенным перекрытием двух MBS.

Рассмотрим слой сильного ТИ, например,  $Bi_2Se_3$ , покрытый с обеих сверхпроводящей пленкой, например, индием. Соединим поверхность полый трубкой радиуса, меньшего размеров кора вихря  $R < \xi$ , но много большего фермиевской длины волны ТИ:  $p_f R \gg 1$ . Поместим коаксиально трубке вихрь  $\frac{h}{2e}$ , создав де Женевские уровни на обеих поверхностях. При большом  $E_f = v_f p_f$  в трубке будет открыто большое количество  $\sim 2p_f R$  каналов, различающихся угловым моментом. Электроны, бегающие по этим каналам, гибридизуют де Женевские уровни, лежащие на разных поверхностях, причем новые энергии существенно зависят от  $\varphi$  – фазы между сверхпроводящими поверхностями. Эту фазу мы можем регулировать, замкнув сверхпроводящие

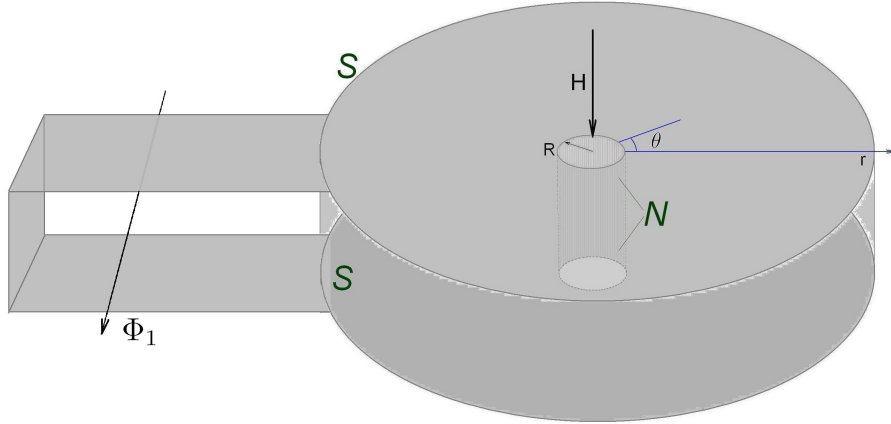


Рис. 1: SNS - система: в слое ТИ, покрытом с обеих сторон сверхпроводником, проделано узкое цилиндрическое отверстие. На нем сидит вихрь  $\frac{h}{2e}$ . Вдалеке от трубки сверхпроводящие поверхности замкнуты, образуя вместе с нашей трубкой SNS-контур. Поток  $\Phi_1$  через контур задает разность фаз  $\varphi$  на краях трубки.

поверхности вдалеке от трубки, и пропустив между ними магнитный поток  $\Phi_1$  (Рис. (1))

Китаевым было показано [6], что  $SNS$ -контакт, на концах которого существуют MBS, должен обладать током, периодическим с периодом  $4\pi$ . Это связано с тем, что при обороте фазы  $\varphi$  на  $2\pi$  меняется четность числа электронов в основном состоянии  $SNS$ -контакта. Лишний электрон меняет свойства контакта, приводя к  $I(\varphi) \neq I(\varphi + 2\pi)$ . При изменении  $\varphi$  еще на  $2\pi$  четность возвращается к начальному значению, так что  $I(\varphi) = I(\varphi + 4\pi)$

Исследование, которое мы проведем, показывает, что наша система подходит под описание Китаева и обнаруживает аномальный, периодический с периодом  $4\pi$ , ток. В системе имеется два низащих состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , четное и нечетное. Энергии этих состояний зависят от  $\varphi$  с периодом  $4\pi$ , причем  $E_0(\varphi + 2\pi) = E_1(\varphi)$ , так что  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  по очереди оказываются основными состояниями. При сохранении четности в системе переход между  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  невозможен, поэтому ток, вычисляемый, как производная от свободной энергии  $2e \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ , будет периодичен с периодом  $4\pi$ . Поскольку в системе, не содержащей MBS, ток имеет период  $2\pi$ , то обнаружение аномального тока служит признаком присутствия майорановских состояний. Однако, чтобы этот эффект был наблюдаем, необходимо, чтобы, во-первых, температура системы была достаточно низкой, и, во-вторых, четность числа электронов в районе  $SNS$ -контакта сохранялась.

В недавней работе Vishwanath et al [10] четность основного состояния связывалась с топологическим индексом Хопфа, определенным для топологического изолятора, полностью покрытого сверхпроводником. Предлагался эксперимент (Рис. 2), концептуально похожий на нашу систему: полый цилиндр ТИ,

покрыт со стороны торцов сверхпроводником (красный на рисунке), за исключением узких полосок на торцах (выбеленные на рисунке) – по одному сверху и снизу. Разность фаз между торцами определяется потоком  $\Phi_1$ , а сквозь цилиндрическое отверстие в центре пропущен регулируемый поток  $\Phi_2$ . Рассматривается джозефсоновский ток через несверхпроводящие полоски на торцах. Предсказывается, что при  $\Phi_1 \sim 0$  ток будет иметь нормальный период, а при  $\Phi_1 \sim \frac{h}{2e}$  – удвоенный  $4\pi$  в единицах  $\frac{h}{2\pi \cdot 2e}$ . Объясняется это тем, что при  $\Phi_2 = 0$  и  $\Phi_2 = \frac{h}{2e}$  система имеет различный индекс Хопфа, а потому различную четность. Схожие рассуждения можно произвести и в нашем эксперименте, если покрыть сверхпроводником трубку и определенным образом замкнуть поверхности ТИ.

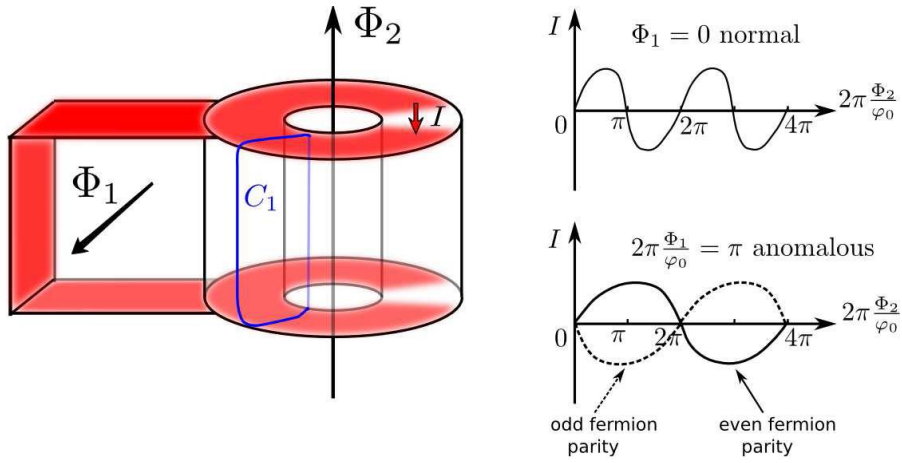


Рис. 2: Иллюстрация из работы [10]. Красные области - сверхпроводящие, белые - нормальные. Измеряется джозефсоновский ток, текущий в торцах цилиндра через нормальные области.

## 2 SNS-система и ее спектр

Движение электронов на плоской поверхности трехмерного ТИ описывается дираковским гамильтонианом

$$H_D = v_f \sigma \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

Оператор  $\sigma$  действует на спин электрона, так что состояния (1) не имеют дополнительного вырождения по спину, какое существует в обычном металле. Похожий гамильтониан возникает в графене [14], но в нем  $\sigma$  действует на пространство подрешеток. Вдобавок в графене имеется так называемое долинное вырождение – существует две различных дираковских точки  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$ , вблизи которых спектр описывается двумерным дираковским гамильтонианом.

То, что на поверхности ТИ гамильтониан не имеет таких дополнительных степеней вырождения, приводит к топологической защищенности определенных свойств спектра от непрерывных преобразований гамильтониана.

Если покрыть поверхность ТИ сверхпроводником, электроны сверхпроводника будут проникать на поверхность ТИ и обратно. Это приведет к возникновению аномального среднего  $\psi\psi$  на поверхности ТИ, которое в приближении среднего поля можно описать с помощью гамильтониана Боголюбова-де Жена

$$H = H_{BdG} = v_f \sigma \cdot (\tau_z \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) - E_f \tau_z + \tau_x \Re(\Delta(\mathbf{r})) - \tau_y \Im(\Delta(\mathbf{r})) \quad (2)$$

Матрица  $\tau$  действует в пространстве Намбу. Если между сверхпроводником и ТИ нет зазора и контакт хороший, то можно считать, что  $\Delta$  в гамильтониане (2) примерно такое же, как в самом сверхпроводнике.

## 2.1 Электрон-дырочная симметрия и пфаффиан

Гамильтониан (2) антикоммутирует с оператором электрон-дырочного сопряжения  $\Xi = \sigma_y \tau_y \hat{K}$ , где  $\hat{K}$  – комплексное сопряжение:

$$\Xi H = -H \Xi \quad (3)$$

Если  $H\psi = E\psi$ , то  $H\Xi\psi = -E\hat{\Xi}\psi$ . Вместе с равенством  $\Xi^2 = 1$  это свойство позволяет разбить все собственные состояния  $\hat{H}$  на пары  $\Xi$ -сопряженных состояний  $\psi_E, \psi_{-E}$  с энергиями  $E, -E$  и некоторое количество самосопряженных состояний с нулевой энергией  $\psi_0, \psi'_0, \dots$ . Поскольку состояния с ненулевой энергией разбиты на пары, так что их четное число, то при непрерывном изменении  $H$ , не нарушающим (3), количество нулевых состояний  $\psi_0, \psi'_0, \dots$  также может изменяться только на четное число. Следовательно, если изначально нулевых состояний было нечетное число, то в системе всегда будет существовать нулевой уровень. Будучи самосопряженным, такой уровень описывает майорановский фермион.

Рассмотрим систему, в которой нулевых уровней четное количество. Разбив состояния на пары  $\psi_1 = \Xi\psi_2$ , построим базис самосопряженных функций:

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2) \quad (4)$$

$$\chi_2 = i \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2) \quad (5)$$

$\chi_{1,2}$  не являются собственными функциями  $H$  (кроме случая  $E = 0$ ), зато  $\Xi\chi = \chi$ . Гамильтониан в базисе  $\chi$  антисимметричный с мнимыми элементами:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & iE_1 & 0 & 0 & \dots \\ -iE_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & iE_2 & \dots \\ 0 & 0 & -iE_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (6)$$

$H$  – „блочко-диагональная“ матрица – ее диагональ состоит из матриц  $\begin{pmatrix} 0 & iE_j \\ -iE_j & 0 \end{pmatrix}$ . Рассмотрим возмущение  $V$  такое, что  $\{V, \Xi\} = 0$ . Матричные элементы  $V$  удовлетворяют условию

$$\langle \chi | V | \chi' \rangle = \langle \chi | -\Xi V \Xi | \chi' \rangle = -\hat{K} \langle \Xi \chi | V | \Xi \chi' \rangle = -\langle \chi | V | \chi' \rangle^* \quad (7)$$

Следовательно, все матричные элементы  $V$  чисто мнимые. Если  $V$  при этом еще и эрмитова, то  $V$  оказывается антисимметрической. Для антисимметрической матрицы четного порядка определен пфаффиан – многочлен, составленный из элементов матрицы, квадрат которого равен детерминанту матрицы. Для матрицы  $M$  порядка  $N$  пфаффиан явно определяется так:

$$\text{Pf}M = \frac{1}{2^N N!} \sum_{t \in S_{2N}} (t) M_{t(1), t(2)} \cdots M_{t(2N-1), t(2N)} \quad (8)$$

Поскольку  $\text{Pf}^2 M = \det M$ , то нули пфаффиана соответствуют нулям спектра  $M$ , причем вырожденным: если  $\text{Pf}M = 0$ , то у  $M$  два нулевых собственных значения (возможно больше, если пфаффиан имеет в своем нуле нулевую производную – это имеет место в обычном джозефсоновском контакте вследствие спинового вырождения, об этом будет сказано подробнее в 2.7). Если при непрерывном изменении  $M$  функция  $\text{Pf}M$  меняет знак, то спектр в этот момент имеет вырожденный нулевой уровень. Это соображение пригодится позднее – оно объясняет, почему такие возмущения, как магнитное поле или примеси, не расщепляют вырожденные нулевые уровни.

## 2.2 Связь с $k_x + ik_y$ -сверхпроводником

Вернемся к гамильтониану БДЖ и изучим его подробнее. Гамильтониан (2) похож на гамильтониан бесспинового  $k_x + ik_y$  сверхпроводника [2]. Перепишем (2) при однородном  $\Delta$  через операторы  $c_k = (\psi_{k\uparrow} + e^{i\theta_k} \psi_{k\downarrow})/\sqrt{2}$  и  $d_k = (\psi_{k\uparrow} - e^{i\theta_k} \psi_{k\downarrow})/\sqrt{2}$  с  $k = k(\cos \theta_k, \sin \theta_k)$  (это операторы плоских волн на несверхпроводящей поверхности ТИ с энергиями  $v|k|$  и  $v|k|$  соответственно):

$$H_{BdG} = \sum_k c_k^\dagger c_k (v|k| - E_f) + d_k^\dagger d_k (-v|k| - E_f) - \frac{1}{2} (\Delta e^{-i\theta_k} (c_k^\dagger c_{-k}^+ - d_k^+ d_{-k}^+) + h.c.) \quad (9)$$

Нас интересует область  $E_f \gg \Delta$ , где содержащие  $d$  части гамильтониана мы можем не учитывать, так как они соответствуют очень низко лежащим уровням. Оставшийся  $H_c = \sum_k c_k^\dagger c_k (v|k| - E_f) - \frac{1}{2} (\Delta e^{-i\theta_k} c_k^\dagger c_{-k}^+ + h.c.)$  того же вида, что и гамильтониан бесспинового  $k_x + ik_y$ -сверхпроводника с одним важным отличием. Оператор обращения времени  $\Theta = i\sigma_y \hat{K}$  переводит  $c_k$  в  $e^{-i\theta_k} c_{-k}$ , так что  $H_c$  оказывается  $T$ -симметричен, в отличие от гамильтониана бесспинового  $p_x + ip_y$ -сверхпроводника, .

### 2.3 Состояния в коре вихря

Так же, как в  $k_x + ik_y$ -сверхпроводнике, в коре вихря  $h/2e$  на сверхпроводящей поверхности ТИ имеется майорановское связанное состояние (MBS) – локализованный самоспряженный фермион. Остановимся подробнее на локализованных в коре вихря состояниях. Оператор  $\Xi$  содержит комплексное сопряжение и меняет угловой момент  $\nu$  всякого состояния на противоположный, поэтому пары  $\Xi$ -сопряженных состояний содержат состояния с противоположными моментами  $\nu$ , а самоспряженное состояние должно иметь  $\nu = 0$ . В классической задаче де Жена, относящейся к  $s$ -сверхпроводнику с полужелым  $\nu$ , нулевых уровней нет. В  $p_x + ip_y$ -сверхпроводнике момент целый, состояние с  $\nu = 0$  единственно и имеет нулевую энергию [4]. Так же дело обстоит и на поверхности ТИ. При  $\nu = 0$  уравнение БдЖ допускает точное решение :

$$\Psi_0(r, \theta) = \exp \left[ i\varphi \frac{\tau_z}{2} - i\theta \frac{\tau_z}{2} - i\theta \frac{\sigma_z}{2} \right] \begin{pmatrix} -J_1(p_f r) \\ iJ_0(p_f r) \\ J_0(p_f r) \\ iJ_1(p_f r) \end{pmatrix} e^{-K(r)} \quad (10)$$

За  $\varphi$  обозначена фаза  $\Delta$  вдоль луча  $\theta = 0$ , а  $K(r) = \int_0^r |\Delta(\rho)| d\rho$ . Поскольку (10) – единственное решение с  $E = 0$ , то оно защищено  $\Xi$ -симметрией: при включении возмущений, не нарушающих (3) энергия состояния останется равной нулю, хотя его волновая функция может существенно измениться.

Решение (10) с  $E = 0$  – единственное с нулевой энергией для данной поверхности. Поскольку вихрь магнитного поля пересекает поверхность конечного образца ТИ два раза, он порождает два MBS. Если они удалены друг от друга и их волновые функции мало перекрываются, то их можно считать изолированными друг от друга и по-прежнему защищенными. Мы будем изучать противоположный случай, когда перекрытие существенно. Этого мы достигнем, соединив полую трубкой, расположенной коаксиально вихрю, поверхности ТИ. При достаточно большом радиусе трубки и энергии Ферми низколежащие уровни кора гибридизуются благодаря электронам, бегающим без затухания по трубке.

Прежде, чем заниматься трубкой, мы найдем волновые функции на сверхпроводящей поверхности. Аналогично де Жену [12] в полярных координатах построим волновые функции с  $E \ll \Delta_\infty$  на расстояниях  $r \gg \nu p_f^{-1}$ , чтобы потом сшить их с волновыми функциями электронов, находящихся в трубке.

Поворотом  $\Psi = e^{i\varphi\tau_z/2} e^{-\theta\tau_z/2} \Psi'$  перейдем от гамильтониана (2) с  $\Delta(r)e^{-i\theta+i\varphi}$  к выражению с однородным  $\Delta$ :

$$\hat{H} = \sigma \cdot (p\tau_z - \frac{e}{c}A - \nabla\theta/2) - E_F\tau_z + \Delta\tau_x \quad (11)$$

Здесь и далее мы положили  $v_f = 1$ . В тонкой сверхпроводящей пленке длина когерентности  $\xi$  много меньше магнитной длины  $\lambda_m$ . Поэтому мы можем пренебречь вектор-потенциалом  $A$  – он мал в коре вихря, где локализованы наши волновые функции.



Выделим явно зависимость в.ф. от угла:

$$\Psi'(\theta, r) = e^{i\theta(\nu - \sigma_z/2)} \begin{pmatrix} u'(r) & v'(r) \end{pmatrix}^T \quad (12)$$

Благодаря показателю  $-i\theta\sigma_z/2$ , отвечающему за вращение спина, момент  $\nu$  – целый. Уравнения на радиальные волновые функции:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_{\nu-1/2} - E_f - E & \Delta \\ \Delta & -\hat{H}_{\nu+1/2} + E_f - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

Здесь за  $\hat{H}_m$  обозначена  $2 \times 2$  матрица  $-i\sigma_x(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r}) + \sigma_y \frac{m}{r}$ . Ее собственные функции с положительными собственными значениями  $p$ :

$$w_{m,p_f}^{(1,2)} = e^{\pm i\pi \frac{m}{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1/2}^{(1,2)}(p_f r) \\ iH_{m+1/2}^{(1,2)}(p_f r) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Здесь  $H_k^{(1,2)}$  – функция Ганкеля первого, второго рода  $k$ -ого порядка. Фазовый множитель в (14) подобран так, чтобы при  $pr \gg m^2$  асимптотика имела вид  $w = \sqrt{\frac{2}{\pi pr}} e^{\pm i\pi r} (1 \pm 1)^T$

Чтобы решить (13), аналогично де Жену [12], будем искать решение в виде

$$u' = a(r)w_{\nu-1/2,p_f}^{(1)}(r) \quad (15)$$

$$v' = b(r)w_{\nu+1/2,p_f}^{(1)}(r) \quad (16)$$

. Быстро осциллирующие  $w$  отвечают решению при  $E = \Delta = 0$ , а огибающие  $a, b$  учитывают ненулевые  $\Delta, E$ . Решение с  $w^{(2)}$  получается из решения для  $w^{(1)}$  действием на него оператора  $\sigma_z \hat{K}$ . При  $p_f r \gg \nu$  решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \left[ c_1 e^{-i\tau_z \phi} \begin{pmatrix} w_{\nu-1/2,p_f}^{(1)} \\ -i w_{\nu+1/2,p_f}^{(1)} \end{pmatrix} + c_2 e^{i\tau_z \phi} \begin{pmatrix} -i w_{\nu-1/2,p_f}^{(2)} \\ w_{\nu+1/2,p_f}^{(2)} \end{pmatrix} \right] e^{-K} \quad (17)$$

$$K(r) = v_f^{-1} \int_0^r \Delta(\rho) d\rho \quad \phi(r) = v_f^{-1} e^{2K(r)} \int_r^\infty \left( E + \frac{\nu \Delta}{p_f \rho} \right) e^{-2K(\rho)} d\rho \quad (18)$$

Малые величины  $\frac{E}{\Delta_\infty}$  и  $\frac{\nu}{p_f r}$  учтены здесь в первом приближении. Когда оба малых параметра равны нулю, то есть при  $E = 0, \nu = 0$ , решение (17) становится точным. Вывод решения довольно длинный и находится в приложении.

## 2.4 Волновые функции в трубке

Найдем далее состояния электронов в трубке. Длину трубки мы обозначим за  $L$ . Трубка коаксиальна вихрю и перпендикулярна поверхностям ТИ. Положим без потери общности сверхпроводящую фазу на нижней поверхности  $\varphi_{bottom}(\theta) = -\theta$ , а на верхней  $\varphi_{top}(\theta) = \varphi - \theta$ .

На поверхности ТИ, обладающей кривизной, электронный гамильтониан имеет вид [1]

$$H_{curved} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \frac{i}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \sigma) - E_f \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  – локальный ортонормированный базис поверхности,  $\sigma_{1,2}, p_{1,2}$  – проекции спина и импульса на этот базис,  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  – гауссова кривизна поверхности. В случае цилиндра радиуса  $R$  гамильтониан (19) имеет вид

$$\sigma_z p_z + \sigma_\theta p_\theta + \frac{i}{2R} \sigma_R \quad (20)$$

Его решения с положительными  $E_f + E$  [1]:

$$\psi = e^{ip_z z + im\theta - i\sigma_z \theta/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ i \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$E + E_f = \sqrt{p_z^2 + \frac{m^2}{R^2}} \quad \alpha = \arctan \frac{m}{p_z R} \quad (22)$$

Угловой момент  $m$  принимает полуцелые значения. Если включить аксиально-симметричное магнитное поле вдоль цилиндра, то новое решение получится сдвигом  $m$  в выражениях (22) на величину  $\Phi_R/2$  – половину потока через цилиндр, выраженного в квантах  $\frac{hc}{2e}$ .

$$\alpha = \arctan \frac{m - \Phi_R/2}{p_z R} \quad (23)$$

$$E + E_f = \sqrt{p_z^2 + \frac{(m - \Phi_R/2)^2}{R^2}} \quad (24)$$

При  $\Phi_R = \pm 1$  спектр (24) имеет нулевой уровень при  $m = \pm \frac{1}{2}$  [8], с этим связан так называемый „wormhole effect“ [9]: в топологическом изоляторе электроны могут без затухания двигаться вдоль вихревых нитей. Для нас, правда, этот эффект не существен: во-первых, мы возьмем  $R \ll \lambda_m$ , так что  $\Phi_R \ll 1$ , во-вторых положим  $R \gg \lambda_f$  ( $\lambda_f = p_f^{-1}$ ), так что будет открыто большое число каналов  $2m_{max} \simeq 2p_f R$ . Так что присутствие вихря несущественно для движения в трубке – вихрь необходим на поверхности: он создает низколежащие уровни с в коре, и прежде всего ключевой для нас майорановский уровень.

## 2.5 Сшивка волновых функций при $\nu \ll p_f R$

Мы хотим сшить волновую функцию (17) на поверхности с волновой функцией (21) в трубке на концах трубки. Поскольку в наш гамильтониан дифференцирование входит в первой степени, нам нужно сшивать только значения в.ф. (а не производные). Если бы мы сшивали в.ф. на границе, проходящей по поверхности вне ее особенностей, то есть там, где ее можно считать локально плоской,

мы бы просто приравнивали значения в.ф. по обе стороны границы. Но мы хотим сшивать на угле и просто приравнять в.ф. неправильно: на изломе поверхности последнее слагаемое в(19) обращается в бесконечность. Выясним, как правильно сшивать в.ф. с поверхностями, которые смыкаются на прямой. Для этого заменим резкую границу на сектор цилиндра малого радиуса (область II на Рис. 3)– граница станет гладкой и гамильтониан будет везде конечен. Поэтому мы можем приравнять в.ф. с поверхностями  $\psi_I, \psi_{III}$  к значениям промежуточной в.ф., взятым на противоположных границах  $I-II$  и  $II-III$ . Пусть на границе  $I-II$  волновая функция равна  $\psi_I$ . Проследим, как она меняется при переходе к другой границе.  $\psi_I$  раскладывается по функциям (21). При переходе к  $II-III$  каждая из функций этого разложения домножается на  $e^{im\delta\theta - i\sigma_z\delta\theta/2}$ , где  $\delta\theta$  – угол между граничащими поверхностями, а  $z$ –направление прямой, вдоль которой они смыкаются. Для разных в.ф. (21) момент  $m$  разный, однако для всех их при фиксированном  $\psi_I$  он пропорционален радиусу кривизны  $\rho$ , поэтому в пределе малого  $\rho$  остается только общий множитель  $e^{-\sigma_z\theta/2}$ .

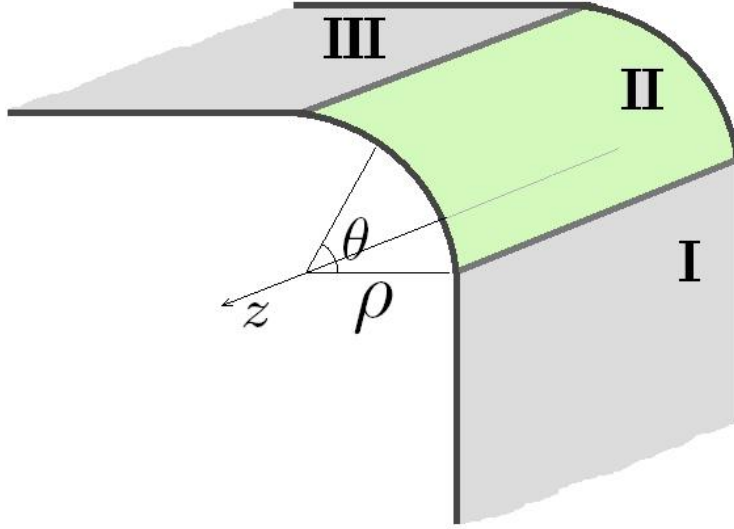


Рис. 3: Иллюстрация к правилу сшивки

Окончательно правило сшивки можно сформулировать так: Если две поверхности 1 и 2 смыкаются на прямой, направленной вдоль  $\mathbf{n}$ , под углом  $\delta\theta$  (причем  $\delta\theta$  и  $\mathbf{n}$  согласованы правилом винта), то

$$\psi_2 = e^{-i\delta\theta(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})/2}\psi_1 \quad (25)$$

Перейдем теперь к сшивке (17) с (21) на концах трубки. В качестве  $\psi_1$  правила (25) мы возьмем функции со сверхпроводящих поверхностей. При  $\theta = 0$  множитель из (25) имеет вид  $e^{\pm i\pi\sigma_y/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i\sigma_y)$ , верхний знак соответствует верхней поверхности.

Сначала мы сошьем волновые функции в нулевом порядке по  $\frac{\nu}{pR}$ . В этом порядке волновые функции в трубке выглядят просто. Мы немного изменим функции (21), учтя Зеемановское взаимодействие  $g\mu_B\sigma_z H_0$  – оно приведет к сдвигу импульса вдоль оси  $z$  на величину  $\zeta = \frac{g\mu_B H_0}{v_f}$ . Опуская угловые зависимости, выпишем в.ф. в трубке.

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_{\uparrow}u_{\uparrow} + A_{\downarrow}u_{\downarrow} \\ B_{\uparrow}v_{\uparrow} + B_{\downarrow}v_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$u_{\uparrow} = e^{i(p_f+q-\zeta)z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow} = e^{-i(p_f+q+\zeta)z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$v_{\downarrow} = e^{i(p_f-q-\zeta)z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{\uparrow} = e^{-i(p_f-q+\zeta)z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Стрелочки указывают на направление движения (то есть импульса для электронов ( $u$ ) и минус импульса для дырок ( $v$ )).  $q = E/v_f$ .

Наша в.ф. на верхней поверхности при  $r = R$  есть

$$\Psi = C_1 \begin{pmatrix} e^{-i\phi + \frac{i\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -ie^{i\phi - \frac{i\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{i\phi + \frac{i\varphi}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -ie^{-i\phi - \frac{i\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (29)$$

На нижней поверхности такая же в.ф. с амплитудой  $Q$  вместо  $C$ , и равной нулю фазой. Действуя на в.ф. с верхней и нижней поверхности операторами  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sigma_y)$  и  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sigma_y)$  соответственно, приравниваем их к в.ф. в трубке, взятой в соответствующих концах трубки. Получим восемь уравнений:

$$A_{\uparrow}e^{i(p+q-\zeta)L} = e^{-i\phi + \frac{i\varphi}{2}} C_1 \quad A_{\downarrow}e^{-i(p+q+\zeta)L} = e^{i\phi + \frac{i\varphi}{2}} C_2 \quad (30)$$

$$B_{\downarrow}e^{i(p-q+\zeta)L} = -ie^{i\phi - \frac{i\varphi}{2}} C_1 \quad B_{\uparrow}e^{-i(p-q-\zeta)L} = ie^{-i\phi - \frac{i\varphi}{2}} C_2 \quad (31)$$

$$A_{\uparrow} = e^{i\phi} Q_2 \quad A_{\downarrow} = e^{-i\phi} Q_1 \quad (32)$$

$$B_{\downarrow} = ie^{-i\phi} Q_2 \quad B_{\uparrow} = -ie^{i\phi} Q_1 \quad (33)$$

Видно, что уравнения распадаются на две независимых системы (левые четыре уравнения и правые четыре). Друг из друга они получаются комплексным сопряжением и заменой знака перед  $\varphi$  и  $\zeta$ . Из правой системы получаем:

$$\begin{cases} \frac{A_{\uparrow}}{B_{\downarrow}} = ie^{-2i\phi + i\varphi - 2i(q-\zeta)L} \\ \frac{A_{\downarrow}}{B_{\uparrow}} = -ie^{2i\phi} \end{cases} \quad (34)$$

$$4\phi + 2qL = \varphi - \pi + 2\zeta L \quad (35)$$

Для правой подсистемы получается то же самое уравнение с другим знаком перед  $4\phi + 2qL$ . Таким образом, спектр локализованных состояний дается формулой:

$$E = \pm A(\varphi - \pi + 2\pi k + 2\zeta L) \quad (36)$$

$$A = \left[ 4v_f^{-1} \int_R^{\infty} e^{(2K(r) - 2K(\rho))} d\rho + \frac{2L}{v_f} \right]^{-1} \quad (37)$$

При  $L < \xi$  порядку величины  $A$  равна  $\Delta_\infty$ . Верхний знак в (36) соответствует решениям левой системы (33). Левая система описывает андреевские состояния, в которых электрический ток течет вверх, правая система – состояния с током, текущим вниз. Состояния с  $\nu, E$  из одной системы  $\Xi$ -сопряжены с состояниями с  $-\nu, -E$  другой системы.

Следующий шаг – найти зависимость энергии от  $\nu$ . Необходимо проделать шивку еще раз, с точностью до членов порядка  $\frac{\nu}{p_f R}$ . Вычисления громоздки и мы поместили их в приложение. Результат таков:

$$E = -\nu B \pm A(\varphi - \pi + 2\zeta L) \quad (38)$$

$$B = A \left( \frac{2}{p_f R} + \int_R^\infty \frac{\Delta(\rho)}{E_f \rho} e^{(2K(R) - 2K(\rho))} d\rho \right) \sim \frac{\Delta_\infty}{p_f R} \quad (39)$$

Зависимость (38) работает только при  $E \ll \Delta_\infty$ , поскольку именно в этом предположении были построены де Женевские функции на поверхности.

Пары пересекающихся уровней с одинаковым  $\nu$  сдвигаются на величину  $-\nu B$ , так что точка их пересечения  $\varphi = \pi - 2\zeta L$  с  $E = -\nu B$ , однако уже не равны нулю. Зато теперь уровни  $|\nu, +\rangle, |\nu, -\rangle$  (знак соответствует знаку перед  $A$  в (38)) пересекаются в точке  $\varphi = \pi - 2\zeta L + \nu \frac{B}{A}$  с энергией  $E = 0$ .

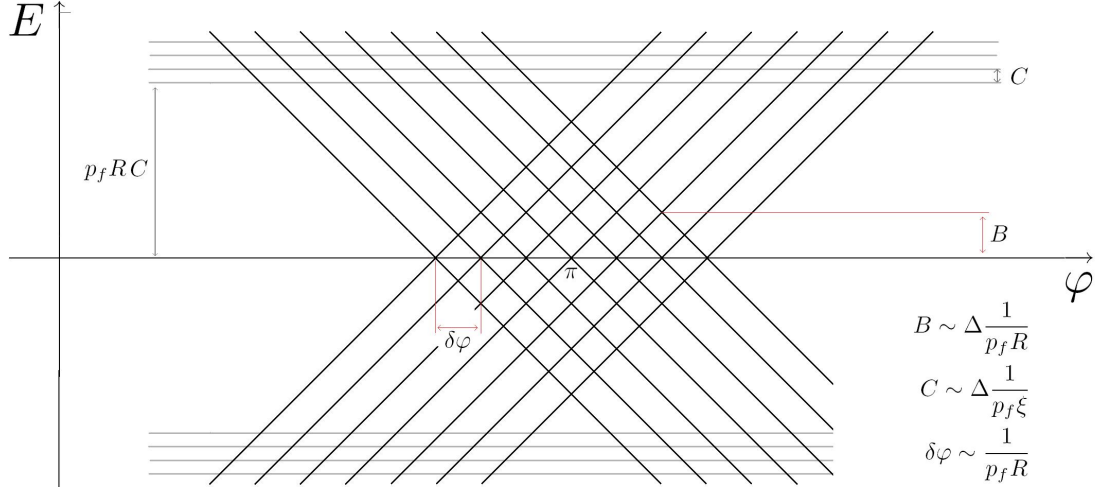


Рис. 4: Низколежащие уровни при  $R > \sqrt{\xi p_f^{-1}}$ . Изображена область  $|\varphi - \pi| \ll 1$  и  $E \ll \Delta_\infty$ . Изображена часть уровней: нижние негибридизованные (серые) и гибридизованные с моментами  $|\nu| \leq 3$  (черные). При  $R < \sqrt{\xi p_f^{-1}}$  серые уровни начинались бы ниже красной линии, то есть было бы  $p_f RC < B$

Далее мы будем считать, что  $R \ll \xi$  – это позволит увеличить энергетический масштаб  $B$ , что в итоге позволит работать при более высоких температурах. Кроме того, это означает, что в нашей системе будут жить и негибридизованные уровни, не проникающие в трубку.

## 2.6 Негибридизованные уровни

Спектр негибридизованных уровней описывается обычной формулой де Жена.

$$E(\nu > p_f R) \simeq \nu \frac{\Delta_\infty}{p_f \xi} \quad (40)$$

Нижний негибридизованный уровень имеет энергию  $\Delta_\infty \frac{R}{\xi}$ . Таким образом, чтобы негибридизованные уровни существовали, требуется, чтобы  $R < \xi$ . Поправки к спектру (40) определяются туннелированием сквозь трубку. Оценим, при каком моменте  $\nu = p_f R + \delta\nu$  эти поправки становятся малыми. мнимый продольный импульс  $i\kappa$  частицы в трубке найдем из (22):

$$\Delta_\infty \frac{R}{\xi} \simeq \frac{\delta\nu}{R} + \frac{1}{2p_f} \kappa^2 \quad (41)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{2p_f \delta\nu}{R}} \quad (42)$$

Уровень можно считать негибридизованным, когда  $\kappa L$  становится большим. Значит,

$$\delta\nu = \frac{R}{p_f L^2} \quad (43)$$

Уже при малой длине  $L_0 = \sqrt{R\lambda_f}$  переход от гибридных уровней к негибридизованным происходит резко. Мы будем считать, что в нашей системе  $\xi \gg L > L_0$ .

## 2.7 Роль возмущений, защищенные уровни и эффект четности

Обсудим здесь, как возмущения могут изменить наш спектр. Если возмущение не нарушает  $\Xi$ -симметрии (3), то, как уже говорилось в 2.1, можно ввести пфаффиан  $\text{Pf}H(\varphi, V)$ . Буквой  $V$  мы обозначили совокупность параметров гамильтониана, которые мы можем менять. Мы можем включать в гамильтониан магнитное поле, деформировать поверхности, изменять  $\Delta(r)$  и т.п. – все это не нарушит (3). Пфаффиан, будучи многочленом матричных элементов  $H$ , является, как и  $H$ , непрерывной функцией  $V$ . Отсюда следует, что двукратно вырожденные нули гамильтониана защищены – они могут двигаться по оси  $\varphi$ , но не могут быть расщеплены. В самом деле, пусть в точке  $\varphi_0$  – двойной ноль гамильтониана. Тогда  $\text{Pf}H$ , как функция  $\varphi$ , меняет в этой точке знак. При малых возмущениях ноль  $\text{Pf}H$  может сдвинуться, но не пропасть. Следовательно, и ноль гамильтониана не может расщепиться, а только сдвинуться. Именно это произошло, когда мы учли зеemanовское поле, действующее в трубке – все нули сдвинулись на величину  $2\zeta L$ .

Условие двукратной вырожденности нуля гамильтониана существенно для его защищенности. В джозефсоновском контакте на обычном металле с

электронным гамильтонианом вида  $v_f p_f$  включение нормального (не андреевского) отражения, хотя и не нарушает электрон-дырочной симметрии, расщепляет уровни. Это связано с дополнительным вырождением по спину – нуль в точке  $\varphi = \pi$  оказывается четырехкратно вырожденным, так что пфаффиан не меняет знак, а касается оси абсцисс. Поэтому малые возмущения способны этот ноль убрать и расщепить андреевские уровни.

При более сильных возмущениях (например, при закрытии трубки), конечно, можно существенно изменить кривую  $\text{Pf}H$ , уменьшив общее количество нулей на четное количество. Возмущение должно быть порядка  $\frac{\Delta_\infty}{p_f R}$ , то есть порядка межуровневого расстояния, чтобы изменить количество нулей. В нашей задаче на один период фазы  $4\pi$  у нас имеется нечетное количество нулей: для ничем не возмущенного гамильтониана один ноль при  $\varphi = \pi$  и пары нулей, симметрично расположенные относительно  $\varphi = \pi$ .

В работе [6] предсказано, что в джозефсоновском контакте, имеющим в качестве нормального контакта провод с MBS на концах, четность основного состояния меняется при обороте фазы на  $2\pi$ . Это происходит и в нашей системе: четность меняется каждый раз, когда пара сопряженных уровней пересекает  $E = 0$ . Действительно, рассмотрим вслед за [10], упрощенную модель из двух сопряженных уровней. Ее гамильтониан  $H = E(c^+ c - c c^+)$ . Переписывая его через число заполнения  $H = E(2\hat{n} - 1)$ , мы видим, что  $n$  меняется на единицу при смене знака  $E$ . Поскольку у нас на период  $2\pi$  таких смен приходится нечетное количество, то четность основного состояния имеет период  $4\pi$ . Если в нашей системе сохраняется четность числа частиц, то энергия системы также оказывается  $4\pi$ -периодичной. В самом деле, если при  $\varphi_1$  мы находимся в основном состоянии, то при  $\varphi_1 + 2\pi$  у нас имеется одна лишняя квазичастица.  $4\pi$ -периодическая энергия должна привести к  $4\pi$ -периодическому слагаемому в джозефсоновском токе. Вычислением этого тока мы и займемся.

## 3 Джозефсоновский ток

### 3.1 Ток и эффект четности

Сверхток в джозефсоновском контакте связан с его свободной энергией  $F$  и фазой фундаментальным соотношением

$$I = 2e \frac{\partial F}{\partial \varphi} \quad (44)$$

Используя это соотношение, можно записать ток в виде [7]

$$I = -2e \sum_{E>0} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \frac{\partial E}{\partial \varphi} - \quad (45)$$

$$-4eT \int_{\Delta_\infty}^{\infty} d\epsilon \ln \left[ 2 \cosh\left(\frac{E}{2T}\right) \right] \frac{\partial \rho(\epsilon)}{\partial \varphi} + \quad (46)$$

$$+2e \frac{\partial}{\partial \varphi} \int d\mathbf{r} \frac{|\Delta|^2}{g} \quad (47)$$

Здесь вклад свободных электронов разбит на сумму по дискретному спектру (первое слагаемое) и интеграл по непрерывному спектру с плотностью состояний  $\rho(\epsilon)$  (второе слагаемое). Третье слагаемое отвечает за взаимодействие,  $g$  – константа взаимодействия теории БКШ. При малой длине нормального контакта  $L$  вклады второго и третьего слагаемого малы как  $Ne\Delta\frac{L}{\xi}$ , где  $N$  – количество поперечных мод в контакте. При  $L \ll \xi$  ими можно пренебречь.

$$I = -2e \sum_{E>0} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \frac{\partial E}{\partial \varphi} \quad (48)$$

$$(49)$$

Учитывая симметрию нашего спектра, мы можем заключить, что

$$I(\pi + \delta\varphi) = -I(\pi - \delta\varphi) \quad (50)$$

$$I(\varphi + 2\pi) = I(\varphi) \quad (51)$$

Первое свойство может нарушиться благодаря возмущениям, например, магнитному полю, но свойство периодичности (51) строгое – оно следует из периодичности спектра  $E_\nu$ . Хотя спектр и периодичен, четность основного состояния, как уже говорилось, имеет двойной период. Чтобы учесть эффект четности, необходимо в термодинамических величинах учитывать только состояния с определенной четностью. Так мы получим  $I_{even}$  и  $I_{odd}$  – джозефсоновские токи при четном и нечетном количестве электронов в системе. Аномальная, отвечающая за эффект четности, составляющая тока  $I_a$  пропорциональна  $I_{even} - I_{odd}$ , в то время как нормальная, имеющая период  $2\pi$  часть тока  $I_n$  пропорциональна  $I_{even} + I_{odd}$ .

Не зная, как устроена зависимость  $E_\nu(\varphi)$  при энергиях  $E \sim \Delta_\infty$ , мы не можем вычислить полный ток (48). Мы можем оценить его как число уровней  $2p_f R$ , умноженное на вклад одного уровня  $2e\Delta_\infty$ :  $I \sim 4ep_f R \Delta_\infty$ .

### 3.2 Вычисление аномального тока

Разделим полный ток на нормальный и аномальный:

$$I = I_n(\varphi) + I_a(\varphi) \quad (52)$$

$$I_a(\varphi + 2\pi) = -I_a(\varphi) \quad (53)$$



Введем термодинамические потенциалы, учитывающие четность  $\Omega_{odd/even}$  и соответствующие токи  $I_{odd/even} = 2e \frac{\partial \Omega_{odd/even}}{\partial \varphi}$ . Потенциалы  $\Omega_{odd/even}$  описывают состояния с нечетным/четным количеством квазичастиц. (Можно было бы также определить их, как описывающие состояния с нечетным/четным полным числом электронов, но нам удобнее первый способ) Аномальный и нормальный токи связаны с четным и нечетным токами формулами

$$I_a = (-1)^{(F_g+F)} \frac{1}{2} (I_{even} - I_{odd}) = (-1)^{(F_g+F)} e \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Omega_{even} - \Omega_{odd}) \quad (54)$$

$$I_n = \frac{1}{2} (I_{even} + I_{odd}) \quad (55)$$

$$(56)$$

$F_g + F$  – четность основного состояния системы плюс четность системы. Знак в соотношении (54) меняется всякий раз, когда меняется четность основного состояния системы.

Вычислять величину  $\delta\Omega = \Omega_{even} - \Omega_{odd}$  мы будем при помощи формулы из книги [15]:

$$\delta\Omega = -T \ln \frac{1 - f(T)}{1 + f(T)} \quad (57)$$

$$f(T) = \prod_j \tanh \frac{E_j}{2T} \quad (58)$$

$E_j$  – спектр возбуждений/квазичастиц системы. Сначала качественно рассмотрим, как ведет себя  $\delta\Omega$  в разных ситуациях. Если температура мала, меньше всех  $E_j$ , то произведение тангенсов в (58) близко к единице с экспоненциальной точностью,  $\delta\Omega \simeq -T \ln N_{eff} e^{-E_1/T} = E_1 - T \ln N_{eff}$ . Здесь  $N_{eff}$  – эффективная кратность вырождения нижнего уровня. Если теперь температура выше, чем энергии большого количества возбуждений, то  $f \sim \left(\frac{E}{2T}\right)^{N_{eff}}$ , и  $\delta\Omega \simeq 2T f(T)$ . Здесь  $E$  – эффективная энергия, а  $N_{eff}$  – эффективное количество уровней, лежащих ниже  $T$ . Таким образом, при низких температурах  $\delta\Omega$  порядка наименьшей энергии возбуждения, а при температурах больше этой энергии  $\delta\Omega$  быстро спадает.

Перейдем теперь к более конкретным вычислениям. разделим спектр возбуждений на гибридизованные уровни, описываемые формулой (38), и негибридизованные уровни, спектр которых

$$E_j = \frac{\Delta_\infty R}{\xi} + j \frac{\Delta_\infty}{p_f} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (59)$$

Напишем  $f$ , разделив вклад от гибридных и негибридных уровней.

$$f(T) = f_1(T)f_2(T) \quad (60)$$

$$f_1(T) = \prod_{\nu=-p_f R}^{p_f R} \frac{|A(\varphi - \pi) + \nu B|}{2T} \quad (61)$$

$$f_2(T) = \prod_{n=0} (p_f R + n) \frac{\Delta_\infty}{2T p_f \xi} \quad (62)$$

$f_1$  отвечает за гибридные уровни,  $f_2$  за негибридные уровни. Верхним пределом в произведении  $f_2$  можно взять бесконечность, поскольку мы предполагаем  $T \ll \Delta_\infty$ , так что вклад уровней с энергией порядка  $\Delta_\infty$  будет экспоненциально мал.

Ток выражается через  $f_1, f_2$  так:

$$\delta I = 4eT \frac{f_2}{1 - (f_1 f_2)^2} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \quad (63)$$

Вычислим аномальный ток при  $|\varphi - \pi| \sim \frac{1}{p_f R}$ . Сосчитаем сперва  $f_2$ . Будем считать, что  $T \gg \Delta_\infty / (p_f \xi)$ . Это позволит нам перейти от произведения к интегралу:

$$f_2 = \exp \int_0^\infty \ln \tanh \left[ \frac{(p_f R + n) \Delta_\infty}{2T p_f \xi} \right] dn = \exp \left[ \frac{2T p_f \xi}{\Delta_\infty} \left( \frac{1}{4} Li_2 \left( e^{-4 \frac{\Delta_\infty}{2T} \frac{R}{\xi}} \right) - Li_2 \left( e^{-2 \frac{\Delta_\infty}{2T} \frac{R}{\xi}} \right) \right) \right] = \quad (64)$$

$$= \exp \left[ \frac{2T p_f \xi}{\Delta_\infty} \left( -e^{-\frac{\Delta_\infty}{T} \frac{R}{\xi}} + O \left( e^{-3 \frac{\Delta_\infty}{T} \frac{R}{\xi}} \right) \right) \right] = 1 - \frac{2T p_f \xi}{\Delta_\infty} e^{-\frac{\Delta_\infty}{T} \frac{R}{\xi}} + \dots \quad (65)$$

Входящая в (64) функция  $Li_2$  – полилогарифмическая функция. Многоточием в выражении (65) обозначены величины, малые при  $\frac{2T p_f \xi}{\Delta_\infty} e^{-\frac{\Delta_\infty}{T} \frac{R}{\xi}} \ll 1$ . Если, полагая на время, что  $f_1 = 1$ , подставить  $f_2$  в формулу для потенциала (57), то мы получим выражение

$$\delta \Omega' = p_f R \delta - T \ln N_{eff} \quad (66)$$

$$N_{eff} = \frac{2T p_f \xi}{\Delta_\infty} \quad (67)$$

Формула вида (66) получается для эффекта четности в обычном сверхпроводнике [15]. Она означает, что при нулевой температуре разность нечетного и четного потенциалов равна энергии нижнего возбуждения – лишний фермион сидит именно на нем. При этом эффект четности становится мал уже при температурах много меньше энергии нижнего уровня, если  $N_{eff}$  велико. Так, при  $T \sim \frac{\Delta_\infty \frac{R}{\xi}}{\ln(p_f R)}$  показатель экспоненты в (64) становится велик, а  $f_2$  – мало. С ростом  $T$  функция  $f_2$  будет спадать экспоненциально и при температурах  $T \gg \Delta_\infty \frac{R}{\xi}$  будет вести себя как  $e^{-\frac{\pi^2}{4} \frac{T p_f \xi}{\Delta_\infty}}$ .

Рассмотрим теперь  $f_1$ . Гибридные уровни можно разбить на наклонные в одну и в другую сторону. Положительные энергии равны  $|\pm(A(\varphi - \pi)) + \nu B|$

для уровней с наклоном  $\pm A$ . Пусть  $T \ll B$ . Пренебрежем всеми уровнями, кроме нижних двух и напишем ток в области  $\varphi \in (\pi, \pi + B/A)$ .

$$f_1 = \tanh \left[ \frac{B/2 - b(\varphi)}{2T} \right] \tanh \left[ \frac{B/2 + b(\varphi)}{2T} \right] \quad (68)$$

$$b = B/2 - A(\varphi - \pi) \quad (69)$$

При  $b = 0$  функция  $f_1$  имеет пик, так что ток в этой точке равен нулю.

При больших температурах, когда  $T \gg B$

$$f_1 \sim \prod_{j=1}^{2T/B} \left[ \frac{jB}{2T} \right]^2 \sim \exp \left[ -\frac{2T}{B} \right] \quad (70)$$

$$\delta I \sim f_1 \sum_j \left[ \frac{1}{\sinh\left(\frac{B/2-b+jB}{T}\right)} - \frac{1}{\sinh\left(\frac{B/2+b+jB}{T}\right)} \right] \quad (71)$$

Сумма в последнем выражении оценивается по первому члену и оказывается меньше или порядка  $T \left( \frac{1}{B/2-b} - \frac{1}{B/2+b} \right)$ . Это значит, что ток экспоненциально мал с тем же показателем, что и  $f_1$ . Этот показатель был бы тем же даже, если бы в квадратных скобках стояла сумма вместо разности, то есть если бы все уровни имели наклон одного знака. Экспоненциальная малость обусловлена большим общим числом  $\frac{2T}{B}$  задействованных уровней, а не сокращением вкладов от уровней с противоположным наклоном.

Когда  $\varphi$  проходит точки нулей гамильтониана (в районе  $\pi$  это периодически расположенные точки  $\pi \pm \frac{B}{A}\nu$ ), четность основного состояния  $F_g$  системы меняет знак. Если на участке  $(\pi, \pi + \frac{B}{A})$  аномальный ток равнялся  $\delta I/2$ , то на соседнем участке  $(\pi + \frac{B}{A}, \pi + 2\frac{B}{A})$ , согласно (54), аномальный ток будет равен  $-\delta I/2$ . Поскольку всего нулей на период  $2\pi$  приходится нечетное количество, то  $I_a(\varphi)$  оказывается  $4\pi$ -периодической функцией. Аномальный ток при разных значениях параметров  $p_f \xi, p_f R, T/A$  изображен на рис. (5).

Помимо уровней на поверхности ТИ, низколежащие состояния могут также существовать в сверхпроводящей пленке. Спектр состояний в коре вихря в сверхпроводнике с вырезанным в центре кругом был найден Мельниковым et al в работе [5]. В такой системе уровни с  $\nu \gg p_s R_s$  (за  $p_s$  обозначен импульс Ферми в СП,  $R_s$  – радиус выреза) имеют те же энергии, что и при отсутствии выреза в центре:  $E \sim \frac{\nu \Delta_\infty}{p_s \xi}$ . Состояния с  $\nu \ll p_f R$  имеют энергию, близкую к щели  $\Delta_\infty$ . Таким образом, низшее состояние в СП имеет энергию  $E \sim \Delta_\infty \frac{R_s}{\xi}$ , а межуровневое расстояние порядка  $\frac{\Delta_\infty}{p_s \xi}$ . Если  $R_s$  совпадает с радиусом  $R$  нашей трубки, то уровни СП должны гибридизоваться с уровнями в ТИ. Кроме того, всего уровней с энергиями выше  $\Delta_\infty \frac{R}{\xi}$  оказывается в  $p_s/p_f$  раз больше, чем таких уровней в ТИ. Это может привести к заметному снижению критической температуры, при которой мы можем наблюдать эффект четности, за счет увеличения  $N_{eff}$  в (66) в  $p_s/p_f$  раз. Мы можем избавиться от уровней в СП, положив  $R_s \simeq \xi$  – тогда в сверхпроводящей

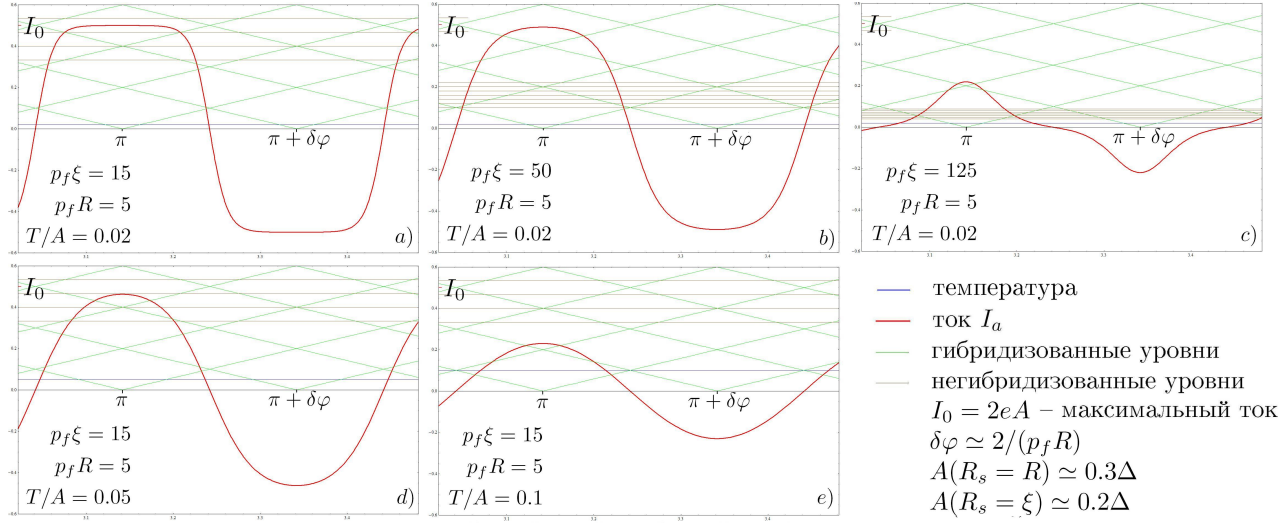


Рис. 5: Зависимость anomального тока от фазы. По оси абсцисс отложена фаза  $\varphi$ . По оси ординат – энергия в единицах  $A$ , а также ток в единицах  $2eA$ .

пленке не останется низколежащих уровней. Отметим, что при увеличении  $R_s$  параметр  $\Delta(r)$  в области  $r < \xi$  станет меньше, что приведет к уменьшению энергетического масштаба  $A$ . Для грубой оценки  $A$  мы можем воспользоваться простым модельным  $\Delta(r)$  в ТИ:

$$\Delta_{R_s=R \ll \xi}(r) = \begin{cases} \Delta_\infty \frac{r}{\xi} & r \leq \xi \\ \Delta_\infty & r > \xi \end{cases} \quad (72)$$

$$\Delta_{R_s=\xi}(r) = \theta(r - \xi)\Delta_\infty \quad (73)$$

За  $\theta(r - \xi)$  обозначена  $\theta$ -функция Хевисайда. При таком  $\Delta$  для величины  $A$  получается

$$A_{R_s=R} \simeq 0.27\Delta_\infty \quad (74)$$

$$A_{R_s=\xi} \simeq 0.17\Delta_\infty \quad (75)$$

Дальнейшее увеличение  $R_s$  приведет к спаду  $A$  по закону  $A \sim \frac{\Delta_\infty}{R_s}$ , поэтому оптимальным  $R_s$  следует считать величину порядка  $\xi$ .

Можно условно разделить причины подавления anomального тока на две: первая причина – уменьшение  $\delta\Omega$  из-за уменьшения всех  $\tanh$  в  $f$ . Вторая причина – низколежащие уровни не несут ток ( $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$ ). При этом  $\delta\Omega$  может быть по-прежнему большим, но anomальный будет ток мал, как  $\exp\left[\frac{E(\varphi) - E_0}{T}\right]$ , где  $E_0$  – нижний, не зависящий от  $\varphi$  горизонтальный уровень, а  $E(\varphi)$  – уровень, дающий вклад в ток. Этот механизм подавления тока

можно увидеть на рисунке (5) с). Ток заметно меньше в тех областях, где негибридизованные уровни лежат ниже гибридных.

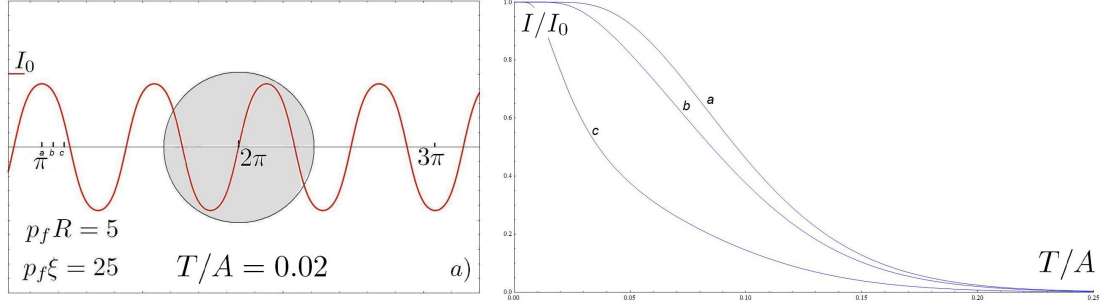


Рис. 6: **а)** Схематическое изображение anomального тока  $I_a(\varphi)$ . При изменении  $\varphi$  на  $2\pi$  anomальный ток меняет знак. В серой области, близкой к  $2\pi$ , зависимость  $I_a(\varphi)$  может заметно отличаться от изображенного, однако общее количество смен знака  $I_a$  в интервале длины  $2\pi$  обязательно нечетно. **б)** Подавление anomального тока с ростом температуры. Кривые a,b,c изображают ток при фазах, равных  $\pi, \pi+0.2\frac{B}{A}, \pi+0.4\frac{B}{A}$  (см. левый рисунок)

## 4 Обсуждение результатов

Как мы установили, существование MBS в вихрях на поверхности ТИ приводит к  $4\pi$  периодичности четности основного состояния системы, которое, в свою очередь, создает anomальный ток  $I_a$ . Этот ток обладает свойством

$$I_a(\varphi) = -I_a(\varphi + 2\pi) \quad (76)$$

В рассмотренной конфигурации системы

$$\lambda_f \ll R \ll \xi \quad (77)$$

$$L \ll \xi \quad (78)$$

этот ток определяется низколежащими уровнями спектра, которые найдены нами при  $\varphi$ , удаленных от точек  $2\pi k$  более, чем на  $\left(\frac{1}{p_f R}\right)^{1/3}$ . В этой области  $\varphi$  картинка уровней напоминает периодическую: уровни при  $\varphi + \frac{1}{p_f R |\sin \frac{\varphi}{2}|}$  выглядят так же, как при  $\varphi$ . Поэтому anomальный ток выглядит как периодическая функция и меняет знак на длине  $\frac{1}{p_f R |\sin \frac{\varphi}{2}|}$ .

### 4.1 Зависимость anomального тока от температуры

Ток  $I_a$  экспоненциально подавляется при высоких температурах (Рис. (6) б)). Существует три критических температуры. Когда температура системы превышает любую из них, anomальный ток становится мал.

$$T_1 = \frac{A}{p_f R} \quad (79)$$

$$T_2 = A \frac{R}{\xi} \frac{1}{\ln(p_f R)} \quad (80)$$

$$T^* = \min\{T_1, T_2\} \quad (81)$$

$$T_3 = \frac{\Delta_\infty}{\ln N_{eff}}, \quad (82)$$

где  $A \simeq 0.2\Delta_\infty$ . Температура  $T_1$  есть межуровневое расстояние для гибридизованных уровней. Если температура больше  $T_1$ , то квазичастица сидит на большом числе уровней, что сильно уменьшает ток.

Температура  $T_2$  с логарифмической точностью есть энергия нижнего негибридизованного уровня. При  $T > T_2$  квазичастица с большой вероятностью сидит на негибридизованных уровнях, которые не дают вклада в ток.

Температуры  $T_1$  и  $T_2$  оказываются одного порядка при  $R \sim \sqrt{\frac{\xi}{p_f}}$ . В этом случае  $T^* \simeq T_1 \simeq T_2 \simeq A\sqrt{\frac{\Delta_\infty}{E_f}}$ . В качестве примера возьмем индий с  $\Delta_\infty \simeq 5.5K$ . При  $E_f \sim 25\Delta_\infty$ , получим

$$T^* \sim 0.04\Delta_\infty \sim 0.2K \quad (83)$$

Температура  $T_3$  – это температура, при которой число квазичастиц с энергией  $E \geq \Delta_\infty$  в сверхпроводящей системе становится порядка единицы.  $N_{eff} \sim \sqrt{\Delta_\infty T} N_0$ , где  $N_0$  – плотность состояний на уровне Ферми в сверхпроводнике. Для больших размеров системы  $N_{eff}$  может быть велико, а температура  $T_3$  мала.  $T_3 \sim 0.04\Delta_\infty$  достигается при площади сверхпроводящей пленки порядка  $0.01cm^2$  (в предположении, что пленка достаточно тонкая, так что в ней имеется всего один поперечный канал. Для числа каналов  $n$  площадь надо разделить на  $n$ ).

## 4.2 Зависимость от параметров: $R, L, \xi, \lambda_f$

Аномальный ток возникает благодаря нечетному количеству двукратных нулей в спектре. Это количество остается нечетными при непрерывном изменении гамильтониана, поэтому аномальный ток будет существовать при любых соотношениях параметров в системе. Изменение длин  $R, L, \xi, \lambda_f$  сказывается на энергии  $A$ , определяющей максимальный ток  $I_0 = 2eA$ , и на критических температурах  $T_1, T_2$ .

Влияние длины трубки  $L$  на ток и критическую температуру самое простое и исчерпывается зависимостью  $A(L)$  (формула (37)). При  $L < \xi$  зависимость  $A(\xi)$  слабая, при  $L > \xi$  аномальный ток и критические температуры начинают спадать как  $\sim \frac{1}{L}$ .

Следующим рассмотрим влияние безразмерного параметра  $p_f R$ . Зафиксируем  $R, \xi$  и будем менять только  $p_f$ . Основной эффект уменьшения (увеличения)

$p_f R$  – уменьшение (увеличение) межуровневых расстояний (как в гибризированной, так и в негибризированной части спектра). С ростом  $p_f R$  температура  $T^*$  уменьшается как  $\frac{1}{p_f R}$ . При малых  $p_f R$ , таких что  $p_f R \sim 1$ , гибризированных уровней становится мало. При  $p_f R < 1$  их не остается совсем и аномальный ток становится экспоненциально мал как  $\exp\left[-p_f L \sqrt{(p_f R)^{-2} - 1}\right]$  за счет того, что в трубке больше не остается открытых каналов.

Дальше посмотрим, что будет происходить при изменении  $\xi$  при фиксированных остальных параметрах. Величина  $A$  пропорциональна  $\Delta \sim \frac{1}{\xi}$ , так что увеличение  $\xi$  соответствует уменьшению щели. Оно приводит к уменьшению  $T_1, T_3$  и  $I_0$ , как  $1/\xi$  и более значительному уменьшению  $T_2 \sim 1/\xi^2$ .

Наконец, зафиксируем все, кроме  $R$ , и будем менять его. Из выражений (79), (80) следует, что наибольшая критическая температура достигается при  $R \sim \sqrt{\lambda_f \xi}$ . При таком радиусе нижний негибризированный уровень имеет энергию  $A \frac{R}{\xi}$  порядка межуровневого расстояния  $B = A \frac{1}{p_f R}$  гибризированных уровней.

Собирая вместе эти соображения, найдем, что наибольший ток  $I_a$  и наибольшая критическая температура  $T^*$  при заданных  $\lambda_f \ll \xi$  получаются при  $L \ll \xi$  и  $R \sim \sqrt{\lambda_f \xi}$ , то есть при выполнении соотношений (77), (78) между длинами, которые мы предполагали при вычислениях.

Если вдобавок мы можем менять отношение  $\frac{\lambda_f}{\xi} = \frac{\Delta}{E_f}$  (например, за счет допирования ТИ), то, согласно изложенным выше соображениям, наибольшего тока и критической температуры следует ожидать при  $\lambda_f$  порядка  $\xi$ . Однако в таком режиме перестает работать наша теория низкоэнергетических уровней, построенная в предположении  $E \ll \Delta_\infty$ , так что мы не можем сказать, что на самом деле будет происходить, когда три длины  $\lambda_f, R, \xi$  оказываются одного порядка.

## А Приложение

### А.1 Нахождение в.ф. на сверхпроводящей поверхности при $\nu \ll p_f r$

Итак, мы ищем решение уравнения (13) в первом приближении по  $\frac{E}{\Delta_\infty}, \frac{\nu}{p_f r}$ . Всего решения два – одно соответствует волне, бегущей к центру, второе – волне, бегущей от центра. Будем искать решение в виде, соответствующем волне, бегущей от центра.

$$u = a_e w_-^{(1)} \qquad v = a_h w_+^{(1)} \qquad (84)$$

Мы обозначили здесь  $w_\mp = w_{\nu \mp 1/2}$ . Также мы будем пользоваться краткой записью  $\nu_\mp = \nu \mp 1/2$ . Огибающие  $a_{e,h}$  предполагаются медленно (на длине порядка  $\xi$ ) меняющимися функциями  $r$ . Мы начнем с того, что подставим

(84) в (13)

$$-i\sigma_x a'_e w_-^{(1)} - E a_e^* w_-^{(1)} + \Delta a_h^* w_+^{(1)} = 0 \quad (85)$$

$$i\sigma_x a'_h w_+^{(1)} - E a_h^* w_+^{(1)} + \Delta a_e^* w_-^{(1)} = 0 \quad (86)$$

(Штрихи означают дифференцирование). Прежде, чем решать уравнение, рассмотрим действие на него оператора  $\sigma_z \hat{K}$ . Этот оператор меняет импульс плоской волны на противоположный:  $\sigma_z \hat{K} c_{\mathbf{k}} = e^{-i\theta_{\mathbf{k}}} c_{-\mathbf{k}}$ . Аналогично он действует и на цилиндрические волны  $w$ :  $\sigma_z \hat{K} w^{(1)} = w^{(2)}$ . Подействуем этим оператором на уравнения (85),(86):

$$-i\sigma_x a^{*'}_e w_-^{(2)} - E a_e^* w_-^{(2)} + \Delta a_h^* w_+^{(2)} = 0 \quad (87)$$

$$i\sigma_x a^{*'}_h w_+^{(2)} - E a_h^* w_+^{(2)} + \Delta a_e^* w_-^{(2)} = 0 \quad (88)$$

Ровно такие уравнения получились бы при использовании анзаца, соответствующего сходящейся к центру волне:

$$u = a_e^* w_-^{(2)} \quad v = a_h^* w_+^{(2)} \quad (89)$$

Значит, достаточно решить только уравнения для первого анзаца, чтобы построить оба решения (13). Сперва решим уравнение (85),(86) в пренебрежении  $\frac{\nu}{pfr}$ . В этом приближении  $w_- = w_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ , так что  $\sigma_x w = w$  и у нас остается два скалярных уравнения:

$$-ia'_e - E a_e + \Delta(r) a_h = 0 \quad (90)$$

$$ia'_h - E a_h + \Delta(r) a_e = 0 \quad (91)$$

В первом приближении по  $\frac{E}{\Delta_\infty}$  затухающее при  $r \rightarrow \infty$  решение этого уравнения:

$$a_{e0}(r) = e^{-i\phi_0(r)} e^{-K(r)} \quad (92)$$

$$a_{h0}(r) = -ie^{i\phi_0(r)} e^{-K(r)} \quad (93)$$

$$K(r) = \int_0^r \Delta(\rho) d\rho \quad (94)$$

$$\phi_0(r) = E \int_r^\infty e^{2K(r)-2K(\rho)} d\rho \quad (95)$$

Теперь решим (85),(86) учитывая зависимость от  $\nu$ , подставляя в них

$$a_e = a_{e0} + a_{e1} \quad a_h = a_{h0} + a_{h1} \quad (96)$$

Для этого нам понадобится асимптотики функции Ганкеля [16]:

$$H_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( 1 \pm i \frac{4n^2 - 1}{8z} \right) \exp \left[ \pm i \left( z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad z > n^2 \quad (97)$$



Если  $\sqrt{z} < n < z$  и при этом  $|z - n| > x^{-1/3}$ , то асимптотика чуть сложнее:

$$H_n^{(1)} = \frac{[ni(\tan \beta - \beta) - \frac{\pi}{4}i]}{\sqrt{\frac{\pi}{2}n \tan \beta}} \left( 1 - \frac{i}{n} \left( \frac{1}{8} \cot \beta + \frac{5}{24} \cot^3 \beta \right) + \dots \right) \quad (98)$$

$$\frac{n}{z} = \cos \beta \quad (99)$$

Условие  $|z - n| > x^{-1/3}$  означает, что  $\beta$  не слишком близко к нулю, так что ряд с котангенсами сходится благодаря большому  $n$ . Вычислим важное для нас отношение  $H_{n+1}/H_n$ , пренебрегая поправками порядка  $\frac{1}{n}$  и  $\frac{1}{z}$ . Будем считать, что  $\beta$  не слишком мало, то есть  $n$  не слишком близко к  $z$ . В этом случае искомое отношение определяется разностью показателей экспонент.

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [n(\tan \beta - \beta)] = n \left( \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 \right) + (\tan \beta - \beta) \frac{\partial}{\partial \beta} z \cos \beta = \quad (100)$$

$$= z \cos \beta \tan^2 \beta - (\tan \beta - \beta) z \sin \beta = z \beta \sin \beta \quad (101)$$

При увеличении  $n$  на единицу  $\beta$  изменяется на  $-\frac{1}{z \sin \beta}$ . Значит, отношение функций Ганкеля равно

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} = 1 + i(z\beta \sin \beta) \left( -\frac{1}{z \sin \beta} \right) = 1 - i\beta = 1 - i \arccos \frac{n}{z}. \quad (102)$$

При  $\nu < \sqrt{p_f R}$ , если использовать (97), та же величина равна

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} = 1 - i \frac{\pi}{2} + \frac{n + 1/2}{z} \quad (103)$$

Здесь  $n$  может быть порядка 1, поэтому  $1/2$  существенна. Мы можем собрать последние две формулы в одну. Для последующих вычислений удобно записать ее в виде

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} = -i \exp \left[ i \arcsin \frac{n + 1/2}{z} \right] \quad (104)$$

$$n < z \quad (105)$$

Используя полученное равенство, мы можем, опуская общие для всех  $w$  множители, написать

$$w_- = \begin{pmatrix} \exp \left[ -i \arcsin \frac{\nu_-}{p_f r} \right] \\ 1 \end{pmatrix} \quad (106)$$

$$w_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp \left[ i \arcsin \frac{\nu_+}{p_f r} \right] \end{pmatrix} \quad (107)$$

Решим уравнения (85),(86) при малых  $\frac{\nu}{pfr}$ . Функции  $a_{e1}, a_{h1}$  будут порядка  $\frac{\nu}{pr}$  и мы можем переписать (85),(86) в виде

$$(-ia'_{e1} - Ea_{e1} + \Delta a_{h1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-i\sigma_x a'_{e0} - Ea_{e0}) \begin{pmatrix} -i\frac{\nu_-}{pfr} \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta a_{h0} \begin{pmatrix} 0 \\ i\frac{\nu_+}{pfr} \end{pmatrix} \quad (108)$$

$$(ia'_{h1} - Ea_{h1} + \Delta a_{e1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (i\sigma_x a'_{h0} - Ea_{h0}) \begin{pmatrix} 0 \\ i\frac{\nu_+}{pfr} \end{pmatrix} + \Delta a_{e0} \begin{pmatrix} -i\frac{\nu_-}{pfr} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

Здесь и дальше мы можем пренебречь  $E$  – это приведет к потере в конечной в.ф. смешанных членов порядка  $\frac{E}{\Delta_\infty} \frac{\nu}{pfr}$ , которые нам не важны. Спроецируем уравнения (108),(109) на  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , получим:

$$-ia'_{e1} + \Delta a_{h1} + i\Delta \frac{\nu}{pfr} e^{-K} \quad (110)$$

$$ia'_{h1} + \Delta a_{e1} - i\Delta \frac{\nu}{pfr} e^{-K} \quad (111)$$

Здесь мы уже подставили известные нам  $a_{e0}, a_{h0}$ . Затухающее решение последней системы уравнений есть

$$a_{e1}(r) = i \int_r^\infty e^{2K(r)-2K(\rho)} \frac{\nu \Delta(\rho)}{pfr} d\rho \quad (112)$$

Рассматривая  $a = a_0 + a_1$ , мы видим, что учет  $\nu/pfr$  приводит к замене  $\phi_0$  на  $\phi$ , данное в (18). Общий вид решения дается (17).

В приведенном решении есть тонкое место, требующее пояснения: мы спроецировали (108) и (109) на  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и получили два скалярных уравнения с двумя неизвестными, однако на самом деле уравнений по-прежнему четыре, например, два дополнительных к (110),(111) уравнения можно получить, проецируя (108) и (109) на  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . В рамках нашей подстановки  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_e w_- \\ a_h w_+ \end{pmatrix}$  мы не можем решить четыре уравнения, поскольку имеем только две свободных функции. Необходимо использовать анзац с четырьмя неизвестными, например,

$$u = (a_e + \sigma_z b_e) w_-^{(1)} \quad v = (a_h + \sigma_z b_h) w_+^{(1)} \quad (113)$$

Чтобы уяснить смысл  $b$ , подставим (113) в (13), и напишем уравнения нулевого приближения на  $b$ :

$$ib'_e - 2b_e E_f - Eb_e + \Delta(r)b_h = 0 \quad (114)$$

$$-ib'_h + 2b_h E_f - Eb_h + \Delta(r)b_e = 0 \quad (115)$$

Его решения  $b_{e,h} = a_{e0,h0}^* e^{-2ipfr}$ . Это быстро осциллирующее решение описывает волну, бегущую к центру. Множитель  $e^{-2ipfr}$  вместе с оператором  $\sigma_z$ , входящим в (113) действуют на  $w^{(1)}$  точно так же, как оператор  $\sigma_z \hat{K}$ .

Нам, однако, нужно линейное по малым параметрам приближение. В этом случае, на  $b$  получатся уравнения

$$ib'_e - 2b_e E_f + \Delta(r)b_h - \Delta \frac{\nu}{p_f r} e^{-K} = 0 \quad (116)$$

$$-ib'_h + 2b_h E_f + \Delta(r)b_e - i\Delta \frac{\nu}{p_f r} e^{-K} = 0 \quad (117)$$

В левой части пренебрежем всем, кроме слагаемых с большим множителем  $E_f$  и получим

$$b_e(r) = -\frac{\Delta}{2E_f} \frac{\nu}{p_f r} e^{-K(r)} \quad (118)$$

$$b_h(r) = i \frac{\Delta}{2E_f} \frac{\nu}{p_f r} e^{-K(r)} \quad (119)$$

Таким образом, хотя введение  $b$  необходимо для аккуратного решения в линейном приближении, само  $b$  благодаря большому множителю  $E_f$  оказывается порядка  $\frac{\Delta}{E_f} \frac{\nu}{p_f r} \sim \frac{E}{\Delta_\infty} \frac{\nu}{p_f r}$ , и мы можем им пренебречь.

## А.2 Нахождение в.ф. на сверхпроводящей поверхности при $\nu \sim p_f r$

Посмотрим теперь, что получается, если решать уравнение (13) при  $\nu \sim p_f r$ . В этой ситуации согласно (104) отношение  $H_{n+1}/H_n$  не будет близко к единице, и попытка решить (85), (86) не удастся уже в главном приближении. Необходимо пользоваться анзацем (113), причем  $a$  и  $b$  окажутся одного порядка. Уравнения, аналогичные (85), (86) будут иметь вид

$$-i\sigma_x(a'_e + \sigma_z b'_e)w_- - 2\sigma_z b_e E_f w_- - E(a_e + \sigma_z b_e)w_- + \Delta(a_h + \sigma_z b_h)w_+ = 0 \quad (120)$$

$$i\sigma_x(a'_h + \sigma_z b'_h)w_+ + 2\sigma_z b_h E_f w_+ - E(a_e + \sigma_z b_e)w_+ + \Delta(a_e + \sigma_z b_e)w_- = 0 \quad (121)$$

Разложим

$$w_- = (1 - it) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - it \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_+ = (1 - it) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + it \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (122)$$

(при малых  $t$   $t = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\nu}{p_f r}$ ) и спроецируем (120),(121) на вектора  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Получим

$$-ia'_e - Ea_e + \Delta a_h - \frac{it}{1 - it} [-ib'_e - 2E_f b_e - Eb_e - \Delta b_h] = 0 \quad (123)$$

$$ib'_e - 2E_f b_e - Eb_e + \Delta b_h - \frac{it}{1 - it} [ia'_e - Ea_e - \Delta a_h] = 0 \quad (124)$$

$$ia'_h - Ea_h + \Delta a_e + \frac{it}{1 - it} [ib'_h + 2E_f b_h - Eb_h - \Delta b_e] = 0 \quad (125)$$

$$-ib'_h - 2E_f b_h - Eb_h + \Delta b_e + \frac{it}{1 - it} [-ia'_h - Ea_h - \Delta a_e] = 0 \quad (126)$$

Видно, что при  $E = 0$  система распадается на отдельные системы для  $a$  и  $b$ , дающие нам решения

$$a_{e,E=0} = {}_1e^{-K(r)} \quad (127)$$

$$a_{h,E=0} = -i {}_1e^{-K(r)} \quad (128)$$

$$b_{e,E=0} = -i {}_2e^{-2ip_f r} e^{-K(r)} \quad (129)$$

$$b_{h,E=0} = {}_2e^{-2ip_f r} e^{-K(r)} \quad (130)$$

При  $E \neq 0$  функции  $a$  и  $b$  уже завязаны и нужно решать все четыре уравнения вместе взятые. Однако решения при  $E = 0$  имеют свою ценность – они позволят нам найти нули спектра.

Вероятно, можно найти в.ф. при  $E \ll \Delta$  и  $\nu \sim p_f r$ , но пока что мы этого не сделали.

### А.3 Уравнения сшивки при $\nu \ll p_f R$

Чтобы вычислить зависимость спектра от  $\nu$ , нужно произвести сшивку, учитывая при этом линейные по  $\frac{1}{p_f R}$  члены.

Состояния в трубке в линейном приближении выглядят так (мы опускаем зависимость от угла  $\theta$ ):

$$u_{\uparrow} = e^{i(p+q-\zeta)z} \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha_-/2 \end{pmatrix} \quad (131)$$

$$u_{\downarrow} = e^{-i(p+q+\zeta)z} \begin{pmatrix} -i\alpha_-/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$v_{\downarrow} = e^{i(p-q+\zeta)z} \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha_+/2 \end{pmatrix} \quad (133)$$

$$v_{\uparrow} = e^{-i(p-q-\zeta)z} \begin{pmatrix} -i\alpha_+/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (134)$$

$$\nu_{\pm} = \nu \pm 1/2 \quad \alpha_{\pm} = \frac{\nu_{\pm}}{p_f R} \quad (135)$$

Используя (107), напомним поверхностное состояние (17) в линейном приближении по  $\frac{1}{p_f R}$ :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = c_1 e^{-i\tau_z(\phi-\varphi/2)} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - i\alpha_- \\ 1 \end{pmatrix} \\ -i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i\alpha_+ \end{pmatrix} \end{pmatrix} + c_2 e^{i\tau_z(\phi+\varphi/2)} \begin{pmatrix} -i \begin{pmatrix} 1 + i\alpha_- \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -(1 - i\alpha_+) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (136)$$

(136) поворачивающим оператором  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i\sigma_y)$ , получаем уравнение сшивки на верхней поверхности:

$$A_{\uparrow} e^{i(p+q-\zeta)L} \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha_-/2 \end{pmatrix} + A_{\downarrow} e^{-i(p+q+\zeta)L} \begin{pmatrix} -i\alpha_-/2 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 e^{-i\phi+i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\alpha_-}{2} \\ \frac{i\alpha_-}{2} \end{pmatrix} - iC_2 e^{i\phi+i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\alpha_-}{2} \\ -1 - \frac{i\alpha_-}{2} \end{pmatrix} \quad (137)$$

$$B_{\downarrow} e^{i(p-q+\zeta)L} \begin{pmatrix} 1 \\ i\alpha_+/2 \end{pmatrix} + B_{\uparrow} e^{i(-p+q+\zeta)L} \begin{pmatrix} -i\alpha_+/2 \\ 1 \end{pmatrix} = -iC_1 e^{i\phi-i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\alpha_+}{2} \\ \frac{i\alpha_+}{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{-i\phi-i\frac{\varphi}{2}} \begin{pmatrix} \frac{i\alpha_+}{2} \\ -1 + \frac{i\alpha_+}{2} \end{pmatrix} \quad (138)$$

и аналогичные уравнения для нижней поверхности

$$A_{\uparrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\alpha_-}{2} \end{pmatrix} + A_{\downarrow} \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha_-}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = Q_1 e^{-i\phi} \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha_-}{2} \\ 1 - \frac{i\alpha_-}{2} \end{pmatrix} - iQ_2 e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 + \frac{i\alpha_-}{2} \\ \frac{i\alpha_-}{2} \end{pmatrix} \quad (139)$$

$$B_{\downarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\alpha_+}{2} \end{pmatrix} + B_{\uparrow} \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha_+}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -iQ_1 e^{i\phi} \begin{pmatrix} -\frac{i\alpha_+}{2} \\ 1 + \frac{i\alpha_+}{2} \end{pmatrix} + Q_2 e^{-i\phi} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\alpha_+}{2} \\ \frac{i\alpha_+}{2} \end{pmatrix} \quad (140)$$

В линейном приближении система по-прежнему распадается на две подсистемы, дающие:

$$4\phi + 2qL = \varphi - \pi + 2\zeta L - 2\frac{\nu}{p_f R} \quad (141)$$

$$-4\phi - 2qL = \varphi - \pi + 2\zeta L + 2\frac{\nu}{p_f R} \quad (142)$$

Это можно переписать в виде

$$E = -\nu B \pm A(\varphi - \pi + 2\zeta L) \quad (143)$$

$$B = A \left( \frac{2}{p_f R} + \int_R^{\infty} \frac{\Delta(\rho)}{E_f \rho} e^{(2K(R) - 2K(\rho))} d\rho \right) \quad (144)$$

При  $R \leq \xi$  входящий в  $B$  интеграл по порядку величины равен  $\frac{1}{p_f \xi}$  (напомним, что  $\xi = \frac{\nu_f}{\Delta_{\infty}}$ ). Если же  $R > \xi$ , то интеграл порядка  $\frac{1}{p_f R}$ . Получается, что при  $R \ll \xi$  вторым слагаемым в  $B$  можно пренебречь, при остальных  $R$  оно того же порядка, что и первое. Тем самым,  $B \sim \frac{\Delta}{p_f R}$  при любых  $R$ , для которых выполнено  $p_f R \gg \nu$ .

#### А.4 Уравнения сшивки при $\nu \sim p_f R$

При  $\nu \sim p_f r$  мы умеем построить в.ф. на поверхности только при  $E = 0$  – они даются (127). Подставив эти решения в уравнения сшивки, мы определим практически все нули нашего спектра – за исключением тех немногих, которые соответствуют моментам, очень близким к  $p_f R$ . Состояния эти близки к негибридизованным и трудно сказать, при каком именно  $\nu$  нуль в зависимости  $E_{\nu}(\varphi)$  пропадает.

Итак, пусть  $\nu \sim p_f R$  и  $|\nu - p_f R| > (p_f R)^{1/3}$ . Выпишем уравнения для верхней поверхности

$$A_{\uparrow} e^{i(p+q)L} \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 \\ i \sin \alpha/2 \end{pmatrix} + A_{\downarrow} e^{-i(p+q)L} \begin{pmatrix} -i \sin \alpha/2 \\ \cos \alpha/2 \end{pmatrix} = C_1 e^{i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} \cos A/2 \\ i \sin A/2 \end{pmatrix} - iC_2 e^{i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} i \sin A/2 \\ -\cos A/2 \end{pmatrix} \quad (145)$$

$$B_{\downarrow} e^{i(p-q)L} \begin{pmatrix} \cos \alpha/2 \\ i \sin \alpha/2 \end{pmatrix} + B_{\uparrow} e^{i(-p+q)L} \begin{pmatrix} -i \sin \alpha/2 \\ \cos \alpha/2 \end{pmatrix} = -iC_1 e^{-i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} \cos A/2 \\ i \sin A/2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} +i \sin A/2 \\ -\cos A/2 \end{pmatrix} \quad (146)$$

Здесь  $A = \arcsin \frac{\nu}{p_f R}$ . Мы не стали писать  $\zeta$ , поскольку знаем заранее, как оно войдет в ответ.

Поскольку, согласно (22)  $\alpha = \arctan \frac{\nu}{p_z R} = \arcsin \frac{\nu}{p_f R}$ , распадаются на части точно так же, как это происходило при нулевом  $\nu$  с уравнениями (33).

То же самое происходит и с уравнениями сшивки на нижнем конце трубки. Все вместе это дает уравнение (его можно быстро получить, положив в (141) или (142)  $\phi = E = 0$  и заменив  $\frac{\nu}{p_f R} \rightarrow \arcsin \frac{\nu}{p_f R}$ ):

$$\varphi = \pi + 2 \arcsin \frac{\nu}{p_f R} \quad (147)$$

Таким образом, нули спектра практически равномерно распределены по оси  $\varphi$ , в областях вокруг  $\varphi = 2\pi k$  их меньше. В районе произвольного  $\varphi$  расстояние между нулями равно  $\frac{1}{p_f R} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|^{-1}$ .

## А.5 Список обозначений

$R$  – радиус трубки

$L$  – длина трубки

$E_f, v_f, p_f, \lambda_f$  – энергия, скорость, импульс и длина волны Ферми на поверхности ТИ

$\Delta$  – сверхпроводящий параметр порядка

$\xi = \frac{v_f}{\Delta}$  – сверхпроводящая длина когерентности

$\varphi$  – разность сверхпроводящих фаз между верхней и нижней поверхностями

$\lambda_m$  – магнитная длина в сверхпроводнике

$\nu$  – угловой момент состояния

$\sigma_i$  – матрицы Паули, действующие на спин

$\tau_i$  – матрицы Паули, действующие в пространстве Намбу

$\hat{K}$  – оператор комплексного сопряжения

$\Xi = \sigma_y \tau_y \hat{K}$  – оператор электрон-дырочного сопряжения  $\theta$  – угол в цилиндрических координатах

$R_s$  – радиус дырки, вырезанной в сверхпроводящей пленке

$p_s$  – импульс Ферми в сверхпроводнике

## Список литературы

- [1] *Topological insulators in three dimensions from spontaneous symmetry breaking*, by Yi Zhang et al, (arxiv: 0904.0690v2).
- [2] *Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator*, by Liang Fu and C.L. Kane, PRL **100**, 096407 (2008).
- [3] *Vortex Core States in Superconducting Graphene*, by I. M. Khaymovich, N. B. Kopnin et al (arxiv: 0812.3798v3)
- [4] *Mutual friction in superfluid  $^3\text{He}$ : Effects of bound states in the vortex core*, by N.B. Kopnin and M.M. Salomaa, PRB Vol.44, No.17 (1991).
- [5] *Electronic structure of vortices pinned by columnar defects*, by A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, and M. N. Zubarev. PhysRevB.79.134529 (arxiv: 0706.1391v3, 2007)

- [6] *Unpaired Majorana fermions in quantum wires*, by Alexei Yu. Kitaev, (arxiv: 0010440v2, 2000)
- [7] *Josephson Current through a Superconducting Quantum Point Contact Shorter than the Coherence Length*, by C. W. J. Beenakker and H. van Houten, PRL **V66**,N23, 1991
- [8] *Interaction-induced criticality in  $Z_2$  topological insulators* by P.M. Ostrovsky, I.V. Gornyi and A.D. Mirlin (arXiv:0910.1338v1, 2009)
- [9] *Wormhole Effect in a Strong Topological Insulator*, by G. Rosenberg, H.-M. Guo and M.Franz (arxiv: 1002.3155v1, 2010)
- [10] *Fermionic Hopf solitons and Berry's phase in topological surface superconductors* by Ying Ran, Pavan Hosur and Ashwin Vishwanath (arxiv: 1003.1964v2, 2010)
- [11] *Квантовая механика, нерелятивистская теория*, Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Москва 1963
- [12] *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, П. Де Жен, Москва 1968
- [13] *Non-abelian statistics of half-quantum vortices in p-wave superconductors* by D.A. Ivanov (arXiv:cond-mat/0005069v2, 2009)
- [14] *Graphene: carbon in two dimensions* by Mikhail I. Katsnelson (arXiv:cond-mat/0612534v1, 2007)
- [15] *Введение в теорию необычной сверхпроводимости*, В.П. Минеев, К.В. Самохин, Москва 1998
- [16] *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Москва 1963