

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

Кафедра Проблем теоретической физики

Дипломный проект на тему:

**СОЗДАНИЕ ЗАПУТАНЫХ СОСТОЯНИЙ В СИСТЕМАХ  
ЭЛЕКТРОННЫХ ИНТЕРФЕРОМЕТРОВ МАХА-ЗЕНДЕРА С КУЛОНОВСКИМ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

Студент \_\_\_\_\_ Вышневым А.А.

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., в.н.с. ИТФ им. Ландау \_\_\_\_\_ Лесовик Г.Б.

Рецензент  
к.ф.-м.н., н.с. ЕТН Zurich \_\_\_\_\_ Лебедев А.В.

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н, профессор \_\_\_\_\_ Фейгельман М.В.

Москва 2010

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Основные сведения о неравенствах Белла . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Создание 2-частичных запутанных состояний</b>	<b>5</b>
2.1	Предлагаемая установка . . . . .	5
2.2	Параметризация делителя . . . . .	5
2.3	Степень запутанности получаемых в установке состояний. . . . .	6
2.3.1	Линейная энтропия чистого состояния двух кубитов. . . . .	6
2.3.2	Линейная энтропия состояний в установке. . . . .	7
2.4	Нарушение неравенств Белла . . . . .	8
2.5	Допустимые отклонения параметров измерений от оптимальных значений . . . . .	9
2.6	Использование неидеальных делителей . . . . .	12
2.6.1	Несимметричный делитель. . . . .	12
2.6.2	Отражение в делителях. . . . .	13
2.6.3	Переход через границу Цирельсона . . . . .	16
2.7	Учет конечной длины волновых пакетов . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Создание трехчастичных запутанных состояний</b>	<b>18</b>
3.1	Установка. . . . .	18
3.2	Получение GHZ состояния . . . . .	19
3.3	Нарушение неравенства Белла для трех частиц. . . . .	20
3.3.1	Дополнительные сведения о неравенстве Белла для трех частиц . . . . .	20
3.3.2	Нарушение неравенства в установке. . . . .	21
<b>4</b>	<b>Выводы.</b>	<b>22</b>

# 1 Введение

Интерес к феномену квантово-механической запутанности в данный момент снова находится на высоком уровне. Первоначально он служил парадоксальной иллюстрацией отсутствия локальности в квантовой механике в споре между Эйнштейном и ее создателями. Предложенный Эйнштейном, Подольским и Розеном мысленный эксперимент, называемый по имени создателей ЭПР [1] доказывал, по их мнению, нелокальность квантовой механики (дальнодействие). Также в квантовой теории вызывало недоверие фундаментальное вероятностное поведение наблюдаемых величин. Такое поведение противоречит принятой в классической физике концепции реализма, согласно которой все физические тела обладают заранее заданными значениями физических величин, которые мы с той или иной точностью измеряем при помощи приборов. Концепцию реализма в квантовой механике удастся возродить, если предположить, что предсказываемое квантовой механикой вероятностное поведение на самом деле объясняется нашим недостатком информации о системе (которая может быть выражена в неизвестных "скрытых" переменных). Такая интерпретация получила название локальной теории скрытых переменных (англ. LHVТ). В 1964 году Беллом [2] было показано, что никакая локальная теория скрытых переменных не позволяет объяснить спин-спиновые корреляции для синглетного запутанного состояния двух частиц. Идея была развита Клаузером, Хорном и Шимони [3], где было предложено неравенство выполняющееся для LHVТ, но нарушающееся любым чистым запутанным состоянием 2-частиц. Нарушение неравенства было экспериментально зарегистрировано для 2 фотонов У и Манделем [4].

Квантовые корреляции, нарушающие неравенства Белла, возможны лишь для запутанных состояний, что позволяет смотреть на нарушение неравенства Белла как на достаточный критерий запутанности между двумя частицами. Эффективность квантовых алгоритмов также связана с феноменом запутанности. Одной из важных экспериментальных задач, связанной с потребностями квантовой информатики и квантовой криптографии, является контролируемое создание требуемых запутанных состояний. В этой дипломной работе теоретически исследуется возможность создания двухчастичных и трехчастичных запутанных состояний в системах, состоящих из интерферометров Маха-Зендера. Источником запутанности является Кулоновское взаимодействие между отдельными путями разных интерферометров, приводящее к появлению добавочной фазы у компоненты волновой функции электронов, связанной с движением по этим путям. Далее во введении будут указаны свойства неравенств Белла используемые в работе. Во второй главе будет обсуждено создание двухчастичных запутанных состояний. Одним из важных результатов является возможность перехода границы Цирельсона при использовании неидеальных делителей и постселекции при сохранении ненарушения неравенства для факторизованных состояний. В последней главе будет сказано про возможность создания GHZ-состояния трех электронов.

## 1.1 Основные сведения о неравенствах Белла

Рассмотрим неравенства Белла для двух частиц А и В, запутанных по спину. Оператор  $\sigma_a$  считаем нормированным таким образом, что его собственные значения равны  $+1, -1$ . Согласно теореме о декомпозиции Шмидта любое чистое состояние таких двух частиц представимо в виде

$$\Psi = \alpha\psi_0\phi_0 + \beta\psi_1\phi_1, \quad (1)$$

Где  $\psi_i, \phi_i$  - специальным образом выбранные базисные вектора Гильбертовых пространств каждой частицы. Неравенство Белла основано на классическом неравенстве

$$|xy + x'y + xy' - x'y'| \leq 2, \quad (2)$$

выполненном для любых переменных  $x, x', y, y'$  не превосходящих по модулю 1. Таким переменным можно поставить в соответствие значение наблюдаемых  $\sigma_a, \sigma_{a'}, \sigma_b, \sigma_{b'}$ , первые две из которых

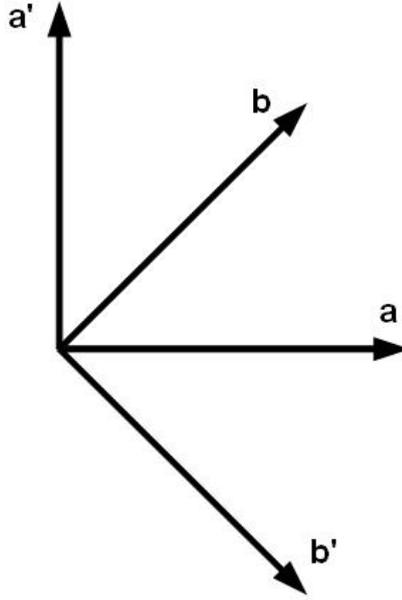


Рис. 1: Конфигурация векторов, дающая  $B = \sqrt{2}$

определены для частицы А, последние - для В. Локальные теории скрытых переменных утверждают, что значение

$$|B| = \frac{1}{2} |\sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} + \sigma_{\mathbf{a}'} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} + \sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}'} - \sigma_{\mathbf{a}'} \otimes \sigma_{\mathbf{b}'}| \leq 1 \quad (3)$$

В квантовой механике это неверно и

$$|B| = \frac{1}{2} |E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b')|, \quad (4)$$

где  $E(a, b) = \langle \sigma_{\mathbf{a}} \otimes \sigma_{\mathbf{b}} \rangle$ , может принимать значения, большие величины 1.

В частности, оператор В обладает следующими свойствами:

1. Для любого факторизованного состояния  $|B| \leq 1$
2. Для любого запутанного чистого состояния двух частиц найдется такой набор  $a, a', b, b'$ , что  $|B| > 1$
3. Максимальное возможное в квантовой механике значение  $|B|$  равно  $\sqrt{2}$  (его называют границей Цирельсона)
4. Граница Цирельсона достигается для синглетного состояния  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0\phi_1 - \psi_1\phi_0)$

На последнем пункте остановимся подробнее. Для состояния в виде спинового синглета

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (5)$$

Для того, чтобы получить  $B = \sqrt{2}$  необходимо, чтобы все вектора лежали в одной плоскости, причем  $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}'$ , и  $\mathbf{b} \perp \mathbf{b}'$ . Угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяется из условия

$$\left| \frac{1}{2} \left( \cos \phi + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) - \cos (\pi - \phi) \right) \right| = \sqrt{2}, \quad (6)$$

откуда  $\phi = \frac{\pi}{4}$  или  $\phi = \frac{5\pi}{4}$ . Конфигурация с  $\phi = \pi/4$  изображена на рис. 1.

Выбор плоскости в которой находятся векторы произволен, также векторы можно вращать в этой плоскости. Пусть нормальный вектор плоскости равен  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta_v \cos \phi_v \\ \sin \theta_v \sin \phi_v \\ \cos \theta_v \end{pmatrix}$ , а угловая

координата вектора  $\mathbf{a}$  в плоскости равна  $\phi_a$ . Тогда сам вектор  $\mathbf{a}$  в таком случае равен  $\begin{pmatrix} \cos \phi_a \cos \theta_v \cos \phi_v - \sin \phi_a \sin \phi_v \\ \cos \phi_a \cos \theta_v \sin \phi_v + \sin \phi_a \cos \phi_v \\ -\cos \phi_a \sin \theta_v \end{pmatrix}$ . Задание параметра  $\phi_a$  полностью определяет положение

всех остальных векторов в плоскости. Таким образом, множество конфигураций, дающих  $B = \sqrt{2}$  можно параметризовать при помощи трех свободных параметров.

Неравенство Белла показанное здесь может быть написано не только для запутанных по спину частиц. В частности, если в качестве аналогов величин  $x$  из неравенства выбрать величину, равную  $+1$ , если частица прошла по одному пути и  $-1$ , если по другому. Тогда "спин-спиновый" коррелятор  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  записывается через двухчастичные орбитальные вероятности в виде

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{R;R} + P_{L;L} - P_{R;L} - P_{L;R}. \quad (7)$$

Теперь разберем трехчастичный случай. Классическое неравенство, лежащее в основе нер-ва Белла имеет вид

$$\frac{1}{2}|x'yz + xy'z + xyz' - x'y'z'| \leq 2; \quad (8)$$

Соответствующее неравенство Белла для трех частиц в спиновой форме имеет вид

$$\frac{1}{2}|\sigma_{a'}\sigma_b\sigma_c + \sigma_a\sigma_{b'}\sigma_c + \sigma_a\sigma_b\sigma_{c'} - \sigma_{a'}\sigma_{b'}\sigma_{c'}| \leq 2; \quad (9)$$

Квантовомеханическая наблюдаемая Белла

$$B = \frac{1}{2}(E(a', b, c) + E(a, b', c) + E(a, b, c') - E(a', b', c')), \quad (10)$$

где

$$E(a, b, c) = \langle \sigma_a \otimes \sigma_b \otimes \sigma_c \rangle \quad (11)$$

Неравенство не может быть нарушено если состояние частиц факторизуется, но GHZ-состояние  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$  максимизирует значение наблюдаемой Белла. Это максимальное значение (граница Цирельсона) равно 2. Обратим внимание на то, что с увеличением количества частиц неравенство Белла начинает нарушаться сильнее.

При исследовании орбитальной запутанности коррелятор  $E(a, b, c)$  принимает форму

$$E(a, b, c) = P_{R;R;R} + P_{R;L;L} + P_{L;R;L} + P_{L;L;R} - P_{R;R;L} - P_{R;L;R} - P_{L;R;R} - P_{L;L;L}; \quad (12)$$

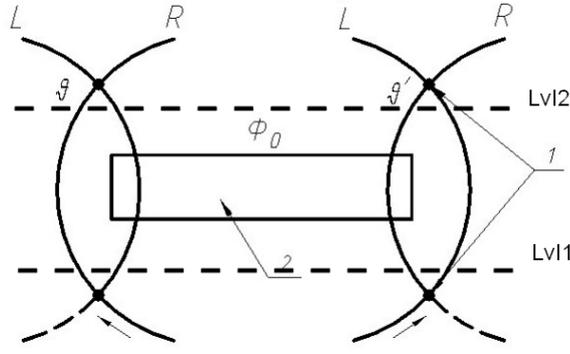


Рис. 2: Схема установки. 1-делители, 2-область кулоновского взаимодействия

## 2 Создание 2-частичных запутанных состояний

### 2.1 Предлагаемая установка

На рис. 2 изображена предлагаемая экспериментальная установка, состоящая из двух интерферометров Маха-Зендера с Кулоновским взаимодействием между ними (показано прямоугольником). Одновременное прохождение электронов через правое плечо левого интерферометра и левое плечо правого интерферометра приводит к набору кулоновской фазы  $\Phi_0$ . Можно сказать, что левое плечо второго интерферометра является определителем пути (англ. Which Path Detector) для первого интерферометра. Информация о пути электрона в первом интерферометре изменяет интерференционную картину в нем, а затем используется при интерференции во втором интерферометре. Порождаемые в этой системе двухчастичные вероятности а также соответствующие корреляционные функции изучаются в этой главе. Рассмотрение ведется в основном для интерферометров, где интерферируют краевые состояния целочисленного квантового эффекта Холла, однако также рассмотрен случай, когда интерференция идет между квантовыми проводниками. Интерферометры представляют из себя в некотором смысле двухуровневые системы, что делает систему по поведению аналогичной запутанной по спину паре частиц.

### 2.2 Параметризация делителя

На результаты влияет матрица рассеяния делителя, который понимается как квазиодномерный

четырехканальный рассеиватель (рис. 3). Матрица рассеяния в общем виде  $S = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{21} & t_{31} & t_{41} \\ t_{12} & r_{22} & t_{32} & t_{42} \\ t_{13} & t_{23} & r_{33} & t_{43} \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} & r_{44} \end{pmatrix}$ ,

где  $t_{ij}$  - амплитуда перехода из  $j$  в  $i$ ,  $r_{ii}$  - отражение в  $i$  канале. На матрицу накладывается естественное условие унитарности  $S^\dagger S = 1$ . При условии рассеяния инвариантного по отношению к обращению времени  $t_{ij} = t_{ji}$ . В режиме целочисленного квантового эффекта Холла отражение назад а также переходы в некоторые из каналов топологически запрещены. Это приводит к тому, что матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_{31} & t_{41} \\ 0 & 0 & t_{32} & t_{42} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

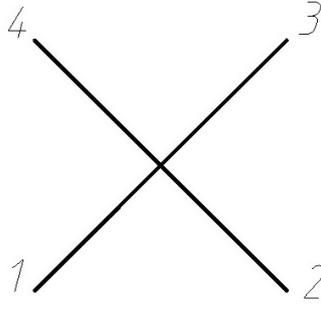


Рис. 3: Делитель = 4-канальный рассеиватель

Условия унитарности

$$\begin{aligned}
 T_{31} + T_{41} &= 1, \\
 T_{31} + T_{32} &= 1, \\
 T_{32} + T_{42} &= 1, \\
 t_{31}t_{32}^* + t_{41}t_{42}^* &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $T_{ij} = t_{ij}t_{ij}^*$ . Решения такой системы уравнений параметризуются как  $t_{31} = \cos \theta e^{i\phi_{31}}$ ,  $t_{41} = \sin \theta e^{i\phi_{41}}$ ,  $t_{32} = \sin \theta e^{i\phi_{32}}$ ,  $t_{42} = \cos \theta e^{i\phi_{42}}$ . Подстановка в последнее уравнение дает:

$$\cos \theta \sin \theta e^{i\phi_{31}-i\phi_{32}} + \sin \theta \cos \theta e^{i\phi_{41}-i\phi_{42}} = 0. \tag{15}$$

Это равносильно

$$\phi_{31} - \phi_{32} - \phi_{41} + \phi_{42} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

В работе используем симметричные делители (вообще говоря, на практике это не всегда выполнено, но как мы увидим позже, на результаты симметричность ключевым образом не влияет)

$$t_{31} = t_{42}, \quad t_{32} = t_{41}. \tag{17}$$

Фазы  $\phi_{31} = \phi_{42}$ ,  $\phi_{32} = \phi_{41}$  и уравнение (16) принимает более простую форму:

$$\phi_{31} - \phi_{32} = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

Одно из возможных решений этого уравнения будет использовано для расчетов в работе

$$\phi_{31} = 0, \quad t_{31} = t_{42} = \cos \theta, \tag{19}$$

$$\phi_{32} = \pi/2, \quad t_{32} = t_{41} = i \sin \theta. \tag{20}$$

Также считается, что в пределах характерных ширин волновых пакетов по энергии, величины  $\theta$  для делителей изменяются слабо.

## 2.3 Степень запутанности получаемых в установке состояний.

### 2.3.1 Линейная энтропия чистого состояния двух кубитов.

Рассмотрим двухчастичное состояние в общей форме  $|\Psi\rangle = \alpha_{11}|u_1\rangle|v_1\rangle + \alpha_{12}|u_1\rangle|v_2\rangle + \alpha_{21}|u_2\rangle|v_1\rangle + \alpha_{22}|u_2\rangle|v_2\rangle$ . Его линейная энтропия по определению равна:

$$En = Tr(\hat{\rho} - \hat{\rho}^2). \tag{21}$$

, где  $\hat{\rho}$  матрица плотности одной из частиц (в случае чистого состояния результат не будет зависеть от выбора частицы) Матрица плотности первой частицы

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= |\Psi\rangle\langle\Psi| = (\alpha_{11}|u_1\rangle + \alpha_{21}|u_2\rangle)(\alpha_{11}^*\langle u_1| + \alpha_{21}^*\langle u_2|) + (\alpha_{12}|u_1\rangle + \alpha_{22}|u_2\rangle)(\alpha_{12}^*\langle u_1| + \alpha_{22}^*\langle u_2|) = \\
 &= (\alpha_{11}\alpha_{11}^* + \alpha_{12}\alpha_{12}^*)|u_1\rangle\langle u_1| + (\alpha_{11}\alpha_{21}^* + \alpha_{12}\alpha_{22}^*)|u_1\rangle\langle u_2| + (\alpha_{21}\alpha_{11}^* + \alpha_{22}\alpha_{12}^*)|u_2\rangle\langle u_1| + (\alpha_{21}\alpha_{21}^* + \alpha_{22}\alpha_{22}^*)|u_2\rangle\langle u_2|.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Обозначив собственные числа этой матрицы  $\rho_1$  and  $\rho_2$ , находим следующее выражение для линейной энтропии

$$En = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2. \quad (23)$$

Так как  $\rho_1 + \rho_2 = 1$ , выражение может быть упрощено

$$En = 2\rho_1\rho_2. \quad (24)$$

Произведение  $\rho_1\rho_2$  находим по теореме Виета для уравнения на собственные значения:

$$\rho_1\rho_2 = (\alpha_{11}\alpha_{11}^* + \alpha_{12}\alpha_{12}^*)(\alpha_{21}\alpha_{21}^* + \alpha_{22}\alpha_{22}^*) - (\alpha_{11}\alpha_{21}^* + \alpha_{12}\alpha_{22}^*)(\alpha_{21}\alpha_{11}^* + \alpha_{22}\alpha_{12}^*) = |\det A|^2, \quad (25)$$

где матрица  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$  - матрица из координат системы в прямом произведении Гильбертовых пространств каждого кубита. Итак,

$$En = 2|\det A|^2. \quad (26)$$

Отметим, что в этой форме записи ответа явно проявляется независимость от выбора частицы. Максимальное возможное значение наблюдаемой Белла равно

$$M(A) = \sqrt{1 + 2En} = \sqrt{1 + 4|\det A|^2}. \quad (27)$$

*Полученная формула позволяет считать линейную энтропию состояния не находя матрицу плотности одной из частиц.*

### 2.3.2 Линейная энтропия состояний в установке.

Теперь считаем максимальную запутанность состояний в нашей установке.

Пусть нижние делители интерферометров обладают параметрами  $\theta_{in}$  для левого и  $\theta'_{in}$  для правого интерферометра. Электроны, проходя через область Кулоновского взаимодействия набирают  $\Phi_0$ . Исходное состояние системы  $\Psi_{in} = \psi_R\phi_R$ . (На самом деле в любой момент времени состояние двух фермионов будет антисимметрично по отношению к перестановке частиц, но здесь, из-за того, что волновые функции электронов, находящиеся в левом и правом интерферометрах, не перекрываются, обменными эффектами можно пренебрегать)

На lvl1 (уровни показаны штриховкой на рис. ??) состояние системы

$$\begin{aligned} \Psi &= (i \sin \theta_{in} \psi_R + \cos \theta_{in} \psi_L)(i \sin \theta'_{in} \phi_R + \cos \theta'_{in} \phi_L) = \\ &= -\sin \theta_{in} \sin \theta'_{in} \psi_R \phi_R + i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} \psi_R \phi_L + i \cos \theta_{in} \sin \theta'_{in} \psi_L \phi_R + \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} \psi_L \phi_L, \end{aligned} \quad (28)$$

все еще факторизованное A на lvl2

$$\Psi = -e^{i\Phi_0} \sin \theta_{in} \sin \theta'_{in} \psi_R \phi_R + i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} \psi_R \phi_L + i \cos \theta_{in} \sin \theta'_{in} \psi_L \phi_R + \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} \psi_L \phi_L. \quad (29)$$

уже нет. Считаем линейную энтропию полученного двухэлектронного состояния Матрица A

$$A = \begin{pmatrix} -e^{i\Phi_0} \sin \theta_{in} \sin \theta'_{in} & i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} \\ i \cos \theta_{in} \sin \theta'_{in} & \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Линейная энтропия состояния  $En = 2|\det A|^2$ . Так как

$$\begin{aligned} |\det A| &= | -\sin \theta_{in} \cos \theta_{in} \sin \theta'_{in} \cos \theta'_{in} e^{i\Phi_0} + \sin \theta_{in} \cos \theta_{in} \sin \theta'_{in} \cos \theta'_{in} | \\ &= \frac{\sin 2\theta_{in} \sin 2\theta'_{in} |1 - e^{i\Phi_0}|}{4} = \frac{\sin 2\theta_{in} \sin 2\theta'_{in} \sin \frac{\Phi_0}{2}}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

Линейная энтропия равна

$$En = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{in} \sin^2 2\theta'_{in} \sin^2 \frac{\Phi_0}{2}; \quad (32)$$

Максимум  $En = \frac{1}{2}$  достигается при

$$\begin{aligned} \theta_{in} &= \pi/4, \\ \theta'_{in} &= \pi/4, \\ \Phi_0 &= \pi. \end{aligned} \quad (33)$$

Эта энтропия совпадает с энтропией спинового синглета  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$  который является самым запутанным двухчастичным состоянием. Из (32) следует, что в предлагаемой установке в идеальном случае можно получать двухчастичные состояния любой степени запутанности. Более того, при условии того, что через кольца интерферометров можно пропускать заданный магнитный поток, оказывается, что на выходе из интерферометра может быть получено любое чистое двухкубитное состояние. Добавим, что когда речь идет об интерферометре, как о кубите, имеется ввиду, что при измерении двухчастичных вероятностей они ведут себя так как пара кубитов. В рамках задачи не важно в каком состоянии электрон движется по проводу - главное, чтоб слева и справа оно было одно и то же, чтоб интерференция состоялась.

## 2.4 Нарушение неравенств Белла

Положим, что значения  $\theta_{in}, \theta'_{in}$  и кулоновской фазы  $\Phi_0$  определены по (33). Результаты измерений двухчастичных вероятностей определяются параметрами  $\theta, \theta'$  и магнитными потоками через каждый интерферометр  $F, F'$ . Определим конфигурации экспериментов, при которых нарушаются неравенства Белла.

Будут определены параметры делителей и Ааронов-Бомовские фазы в каждом интерферометре.  $\theta, \Phi$  - параметры для левого, а  $\theta', \Phi'$  - параметры правого интерферометра.  $\theta$ - параметр определяет пропускную способность делителя, а  $\Phi$  разность фаз между  $L$  и  $R$  путями интерферометра

$$\Phi = eF/c, \quad (34)$$

$$\Phi' = eF'/c, \quad (35)$$

Наборы параметров  $(\theta, \Phi$  or  $\theta', \Phi')$  сопоставляется определенный вектор. для левого интерферометра вектор назовем  $\mathbf{a}$ , для правого -  $\mathbf{b}$ . При этом для определения наблюдаемой Белла требует знания векторов  $\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}$ :  $B = \frac{1}{2}(E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{b}}) - E(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}))$ , где  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{R;R} + P_{L;L} - P_{R;L} - P_{L;R}$ .

Для пары  $\theta, \Phi$  соответствующий вектор

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\sin(2\theta) \sin \Phi \\ -\sin 2\theta \cos \Phi \\ \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (36)$$

, для правого интерферометра определение аналогично. Опуская расчеты, приведем конечный результат.

Возможно наблюдение максимального значения параметра Белла  $B = \sqrt{2}$  при помощи лишь изменений магнитного потока, причем соответствующие экспериментальным конфигурациям

вектора равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \phi_v}{\sin \phi_v} \\ \pm \sqrt{-\frac{\cos 2\phi_v}{\sin^2 \phi_v}} \\ -\cos \phi_v \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -\sin \phi_v \\ 0 \\ -\cos \phi_v \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} \cos 2\phi_v}{2 \sin \phi_v} \\ \sqrt{2} \cos \phi_v \\ \mp \sqrt{-\frac{\cos 2\phi_v}{2 \sin^2 \phi_v}} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sin \phi_v} \\ 0 \\ \mp \sqrt{-\frac{\cos 2\phi_v}{2 \sin^2 \phi_v}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\phi_v$ -свободный параметр, принимающий значения, при которых выражения имеют смысл.

## 2.5 Допустимые отклонения параметров измерений от оптимальных значений

Состояние на уровне 2 (см. рис. 2)

$$\Psi = \frac{1}{2}(-e^{i\Phi_0} \psi_R \phi_R + i \psi_R \phi_L + i \psi_L \phi_R + \psi_L \phi_L); \quad (38)$$

Взяв измерительные параметры в виде  $(\theta, \theta', \Phi_a, \Phi'_a, \Phi_b, \Phi'_b)$  считаем коррелятор  $E(a, b) = P_{R;R} + P_{L;L} - P_{R;L} - P_{L;R}$ .

Состояние на выходе из установки

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2}(-e^{i\Phi_0}(i \sin \theta \psi_R + \cos \theta \psi_L)(i \sin \theta' \phi_R + \cos \theta' \phi_L) + i(i \sin \theta \psi_R + \cos \theta \psi_L)(i \sin \theta' \phi_L + \cos \theta' \phi_R)e^{i\Phi_b} + \\ & i(i \sin \theta \psi_L + \cos \theta \psi_R)(i \sin \theta' \phi_R + \cos \theta' \phi_L)e^{i\Phi_a} + (i \sin \theta \psi_R + \cos \theta \psi_L)(i \sin \theta' \phi_R + \cos \theta' \phi_L)e^{i(\Phi_a + \Phi_b)}) = \\ & \frac{1}{2} \psi_R \phi_R (\sin \theta \sin \theta' e^{i\Phi_0} - \sin \theta \cos \theta' e^{i\Phi_b} - \cos \theta \sin \theta' e^{i\Phi_a} + \cos \theta \cos \theta' e^{i(\Phi_a + \Phi_b)}) + \\ & \frac{i}{2} \psi_R \phi_L (-\sin \theta \cos \theta' e^{i\Phi_0} - \sin \theta \sin \theta' e^{i\Phi_b} + \cos \theta \cos \theta' e^{i\Phi_a} + \cos \theta \sin \theta' e^{i(\Phi_a + \Phi_b)}) + \\ & \frac{i}{2} \psi_L \phi_R (-\cos \theta \sin \theta' e^{i\Phi_0} + \cos \theta \cos \theta' e^{i\Phi_b} - \sin \theta \sin \theta' e^{i\Phi_a} + \sin \theta \cos \theta' e^{i(\Phi_a + \Phi_b)}) + \\ & \frac{1}{2} \psi_L \phi_L (-\cos \theta \cos \theta' e^{i\Phi_0} - \cos \theta \sin \theta' e^{i\Phi_b} - \sin \theta \cos \theta' e^{i\Phi_a} - \sin \theta \sin \theta' e^{i(\Phi_a + \Phi_b)}); \end{aligned} \quad (39)$$

Следовательно двухчастичные вероятности равны

$$\begin{aligned} P_{R;R} &= \frac{1}{4} \left( 1 - \sin^2 \theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_b - \Phi_0) - \cos^2 \theta \sin 2\theta' \cos \Phi_b - \sin 2\theta \sin^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) - \sin 2\theta \cos^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b - \Phi_0) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b) \right); \\ P_{R;L} &= \frac{1}{4} \left( 1 + \sin^2 \theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_b - \Phi_0) + \cos^2 \theta \sin 2\theta' \cos \Phi_b - \sin 2\theta \cos^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) - \sin 2\theta \sin^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b - \Phi_0) - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b) \right); \\ P_{L;R} &= \frac{1}{4} \left( 1 - \cos^2 \theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_b - \Phi_0) - \sin^2 \theta \sin 2\theta' \cos \Phi_b + \sin 2\theta \sin^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) + \sin 2\theta \cos^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b - \Phi_0) - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b) \right); \\ P_{L;L} &= \frac{1}{4} \left( 1 + \cos^2 \theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_b - \Phi_0) + \sin^2 \theta \sin 2\theta' \cos \Phi_b + \sin 2\theta \cos^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) + \sin 2\theta \sin^2 \theta' \cos(\Phi_a - \Phi_0) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b - \Phi_0) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\theta' \cos(\Phi_a + \Phi_b) \right); \end{aligned} \quad (40)$$

Следовательно, искомый коррелятор равен:

$$E(a, b) = \frac{1}{4} \left( \cos 2\theta \sin 2\theta (\cos(\Phi_b - \Phi_0) - \cos \Phi_b) + \sin 2\theta \cos 2\theta' (\cos(\Phi_a - \Phi_0) - \cos \Phi_a) + \sin 2\theta \sin 2\theta' (\cos(\Phi_a + \Phi_b - \Phi_0) + \cos(\Phi_a - \Phi_b)) \right) \quad (41)$$

1) Положим, что параметр  $\theta$  отличается от своего оптимального значения, в то время как все остальные параметры точно с ними совпадают. Тогда (41) имеет вид

$$E = -\cos 2\theta \cos \Phi_b + \sin 2\theta \sin \Phi_a \sin \Phi_b; \quad (42)$$

Тогда результаты белловских измерений равны

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \cos 2\theta, \\ E(a', b) &= \cos 2\theta, \\ E(a, b') &= \sin 2\theta, \\ E(a', b') &= -\sin 2\theta; \end{aligned} \quad (43)$$

наблюдаемая Белла равна

$$B = \cos 2\theta + \sin 2\theta = \sqrt{2} \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{8} \right); \quad (44)$$

2) Аналогично  $\theta'$ . Белловский коррелятор

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta (\sin \Phi_a \sin \Phi_b - \cos \Phi_b) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\theta \cos \Phi_a. \quad (45)$$

Результаты белловских измерений

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta', \\ E(a', b) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta', \\ E(a, b') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta', \\ E(a', b') &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta', \end{aligned} \quad (46)$$

Белловская наблюдаемая

$$B = \sqrt{2} \sin 2\theta = \sqrt{2} \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right); \quad (47)$$

3)  $\Phi_a$ . Коррелятор

$$E = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \Phi_b - \sin \Phi_a \sin \Phi_b); \quad (48)$$

Результаты измерений

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a', b) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a, b') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Phi_a, \\ E(a', b') &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (49)$$

Наблюдаемая Белла

$$B = \frac{3 + \sin \Phi_a}{2\sqrt{2}} = \frac{3 + \cos \left( \Phi_a - \frac{\pi}{2} \right)}{2\sqrt{2}}; \quad (50)$$

4)  $\Phi'_a$ . Коррелятор

$$E = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \Phi_b - \sin \Phi_a \sin \Phi_b); \quad (51)$$

Результаты измерений

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a', b) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a, b') &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a', b') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Phi'_a, \end{aligned} \quad (52)$$

Белловская наблюдаемая:

$$B = \frac{3 - \sin \Phi'_a}{2\sqrt{2}} = \frac{3 + \cos \left( \Phi'_a + \frac{\pi}{2} \right)}{2\sqrt{2}}; \quad (53)$$

5)  $\Phi_b$ . Коррелятор

$$E = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \Phi_b - \sin \Phi_a \sin \Phi_b); \quad (54)$$

Результаты измерений

$$\begin{aligned} E(a, b) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \Phi_b - \sin \Phi_b), \\ E(a', b) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\Phi_b) + \sin \Phi_b), \\ E(a, b') &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a', b') &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (55)$$

Белловская наблюдаемая

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos(\Phi_b - \pi)); \quad (56)$$

6)  $\Phi'_b$ . Коррелятор

$$E = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \Phi_b - \sin \Phi_a \sin \Phi_b); \quad (57)$$

Результаты измерений

$$\begin{aligned} E(a, b) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a', b) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ E(a, b') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Phi'_b - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \Phi'_b, \\ E(a', b') &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \Phi'_b - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \Phi'_b, \end{aligned} \quad (58)$$

Белловская наблюдаемая

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \cos \left( \Phi'_b - \frac{\pi}{2} \right) \right); \quad (59)$$

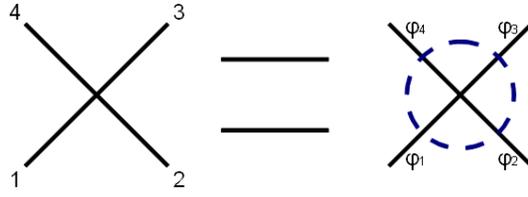


Рис. 4: Несимметричный делитель = симметричный делитель + добавочные фазы

7)  $\Phi_0$ . Коррелятор

$$E = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos(\Phi_b - \Phi_0) - \cos \Phi_b + \cos(\Phi_a + \Phi_b - \Phi_0) + \cos(\Phi_a - \Phi_b)); \quad (60)$$

Результаты измерений

$$\begin{aligned} E(a, b) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\cos \Phi_0 + 1 + \sin \Phi_0), \\ E(a', b) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\cos \Phi_0 + 1 + \sin \Phi_0), \\ E(a, b') &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin \Phi_0 - \cos \Phi_0 + 1), \\ E(a', b') &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin \Phi_0 + \cos \Phi_0 - 1), \end{aligned} \quad (61)$$

Наблюдаемая Белла

$$B = \frac{1 - \cos \Phi_0}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \cos(\Phi_0 - \pi)}{\sqrt{2}}; \quad (62)$$

Для произвольного параметра  $p$ :

$$\Delta B = c_1(\cos c_2 \Delta p - 1); \quad (63)$$

где  $\Delta p$  разница между оптимальным и реальным значением параметра,  $c_1 \leq \sqrt{2}$ ,  $c_2 \leq 2$ . Допуская, что отклонение каждого из параметров может уменьшить  $B$  на 0.03, получим что точность в 0, 1 достаточна для выполнения таких требований.

*Вывод: для любого параметра  $p$  из набора  $\theta, \theta', \Phi_a, \Phi_b, \Phi'_a, \Phi'_b, \Phi_0$  достаточно чтобы  $\Delta p \leq 0.1$  для нарушения неравенства Белла.*

## 2.6 Использование неидеальных делителей

Рассмотрим случай, когда описываемые явления происходят не в режиме ЦКЭХ. Тогда исчезает топологический запрет на рассеяние назад и матрица рассеяния будет примет общий вид (2.2). Планируется свести результаты двухчастичных измерений в неидеальном случае к результатам в идеальном случае. Сначала рассмотрим случай идеального несимметричного делителя, затем перейдем к рассмотрению неидеального делителя.

### 2.6.1 Несимметричный делитель.

**Теорема 1:** *Несимметричный делитель эквивалентен симметричному с добавочными фазами (см. рис. 4).*

**Proof:** Начнем с условий унитарности для безотражательного делителя (64).

$$\begin{aligned} T_{31} + T_{41} &= 1, \\ T_{31} + T_{32} &= 1, \\ T_{32} + T_{42} &= 1, \\ t_{31}t_{32}^* + t_{41}t_{42}^* &= 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Оттуда получаем  $T_{31} = T_{42}, T_{32} = T_{41}$ , что дает возможность выполнить замену

$$\begin{aligned} T_{31} &= T_{42} = \cos^2 \theta, \\ T_{32} &= t_{41} = \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (65)$$

и следовательно

$$\begin{aligned} t_{31} &= \cos \theta e^{i\phi_{31}}, \\ t_{42} &= \cos \theta e^{i\phi_{42}}, \\ t_{32} &= \sin \theta e^{i\phi_{32}}, \\ t_{41} &= \sin \theta e^{i\phi_{41}}, \end{aligned} \quad (66)$$

поскольку  $t_{31}t_{32}^* + t_{41}t_{42}^* = \cos \theta \sin \theta (e^{i(\phi_{31}-\phi_{32})} + e^{i(\phi_{41}-\phi_{42})}) = 0$

$$\phi_{31} - \phi_{32} - \phi_{41} + \phi_{42} = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (67)$$

$\phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{41}, k$  параметры, однозначно определяющие  $\phi_{42} = \pi + 2\pi k - \phi_{31} + \phi_{32} + \phi_{41}$ . При изменении  $k$  свойства делителя не изменяются, поэтому положим  $k = -1$

$$\phi_{42} = -\pi - \phi_{31} + \phi_{32} + \phi_{41}, \quad (68)$$

Произведем замену:

$$\begin{aligned} \phi_{31} &= \phi_1 + \phi_3, \\ \phi_{32} &= \frac{\pi}{2} + \phi_2 + \phi_3, \\ \phi_{41} &= \frac{\pi}{2} + \phi_1 + \phi_4; \end{aligned} \quad (69)$$

Из (68) получим

$$\phi_{42} = \phi_4 + \phi_2; \quad (70)$$

Таким образом мы всегда можем от набора параметров  $\phi_{31}, \phi_{32}, \phi_{41}$  перейти к набору  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  поскольку система линейных уравнений (69) всегда имеет решение

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{31}, \\ \phi_2 &= \phi_{32}, \\ \phi_3 &= 0, \\ \phi_4 &= \phi_{41} - \phi_{31}, \end{aligned} \quad (71)$$

Если  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  равны 0, то получаемый делитель будет симметричным. Физический смысл фаз пояснен на рис.4. Теорема доказана.

конечный результат интерференции электронов в делителях определяется разности фаз  $\Phi_a, \Phi_b$  между двумя возможными траекториями. При использовании несимметричных делителей эти разности фаз должны быть переопределены по формулам

$$\Phi_{a-eff} = \Phi_a + \phi_{4-bottom} - \phi_{3-bottom} + \phi_{1-top} - \phi_{2-top}, \quad \Phi_{b-eff} = \Phi_b - \phi_{4-bottom} + \phi_{3-bottom} - \phi_{1-top} + \phi_{2-top}, \quad (72)$$

где  $\phi_{4-bottom}$  означает параметр  $\phi_4$  нижнего делителя соответствующего интерферометра. Это значит, что

*Несимметричность делителей исправляется путем переопределения фаз  $\Phi_a$  и  $\Phi_b$ .*

## 2.6.2 Отражение в делителях.

В случае, когда в делителях возможно отражение, возможны события когда в одном или двух интерферометрах электрон не доходит до детектора, отразившись назад на одном из делителей или области кулоновского взаимодействия. В таких случаях принято выполнять процедуру постселекции экспериментальных данных, когда отбрасываются данные, где задетектированы

менее двух электронов. В квантовомеханическом смысле процедура постселекции эквивалентна следующему действию. На выходе из установки состояние электронов описывается волновой функцией

$$\Psi = \alpha_{R;R}\psi_R\phi_R + \alpha_{R;L}\psi_R\phi_L + \alpha_{L;R}\psi_L\phi_R + \alpha_{L;L}\psi_L\phi_L + \dots \quad (73)$$

"..." содержит в себе компоненты волновой функции, которые соответствуют отражению одного или двух электронов назад. Наблюдаемые после постселекции двухчастичные вероятности равны

$$\begin{aligned} P_{R;R} &= \frac{|\alpha_{R;R}|^2}{|\alpha_{R;R}|^2 + |\alpha_{R;L}|^2 + |\alpha_{L;R}|^2 + |\alpha_{L;L}|^2}, \\ P_{R;L} &= \frac{|\alpha_{R;L}|^2}{|\alpha_{R;R}|^2 + |\alpha_{R;L}|^2 + |\alpha_{L;R}|^2 + |\alpha_{L;L}|^2}, \\ P_{L;R} &= \frac{|\alpha_{L;R}|^2}{|\alpha_{R;R}|^2 + |\alpha_{R;L}|^2 + |\alpha_{L;R}|^2 + |\alpha_{L;L}|^2}, \\ P_{L;L} &= \frac{|\alpha_{L;L}|^2}{|\alpha_{R;R}|^2 + |\alpha_{R;L}|^2 + |\alpha_{L;R}|^2 + |\alpha_{L;L}|^2}. \end{aligned} \quad (74)$$

В безотражательном случае знаменатель в этих выражениях равен 1. Сие, в частности, означает, что если мы поделим все коэффициенты в конечном состоянии на одно и то же число, то двухчастичные вероятности, вычисленные по новым коэффициентам, останутся неизменными.

Сначала определим конечное состояние. Начальное состояние  $\psi_R\phi_L$ .

$$\begin{aligned} \psi_R\phi_R &: t_{32in}t'_{31in} & \psi_R\phi_R &: t_{32in}t'_{31in}t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} & \psi_R\phi_R &: t_{32in}t'_{31in}t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} \\ \psi_R\phi_L &: t_{32in}t'_{41in} & \psi_R\phi_L &: t_{32in}t'_{41in}t_2e^{i\Phi_2} & \psi_R\phi_L &: t_{32in}t'_{41in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} \\ \psi_L\phi_R &: t_{42in}t'_{31in} & \psi_L\phi_R &: t_{42in}t'_{31in} & \psi_L\phi_R &: t_{42in}t'_{31in}e^{i\Phi} \\ \psi_L\phi_L &: t_{42in}t'_{41in} & \psi_L\phi_L &: t_{42in}t'_{41in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}} & \psi_L\phi_L &: t_{42in}t'_{41in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \end{aligned} \quad (75)$$

Параметры, используемые в этом и последующих уравнениях следует читать следующим образом. Штрихованные величины относятся к правому, а нештрихованные - к левому интерферометру. Если у величины  $t$  два числовых индекса, это один из элементов матрицы рассеяния делителя. Нижний делитель к самой величине  $t$  получает дополнительный индекс  $in$ , верхние пишутся без дополнительных индексов. Нумерация каналов делителя изображена на рис. 3. Величины  $t_{1L}, t_{1R}, t_2, \Phi_2, \Phi_{1L}, \Phi_{1R}$  определяют пропускные способности области кулоновского взаимодействия, причем  $t$  - модули пропускных амплитуд, а  $\Phi$  - фазы рассеяния. Индекс 2 относится к ситуации, когда через область кулоновского взаимодействия проходят 2 электрона, 1L - когда один электрон проходит слева, 1R - когда один справа.

В конце получаем:

$$\begin{aligned} \psi_R\phi_R &: t_{32}t'_{32}t_{32in}t'_{31in}t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + t_{32}t'_{31}t_{32in}t'_{41in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + t_{31}t'_{32}t_{42in}t'_{31in}e^{i\Phi} + t_{31}t'_{31}t_{42in}t'_{41in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \\ \psi_R\phi_L &: t_{32}t'_{42}t_{32in}t'_{31in}t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + t_{32}t'_{41}t_{32in}t'_{41in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + t_{31}t'_{42}t_{42in}t'_{31in}e^{i\Phi} + t_{31}t'_{41}t_{42in}t'_{41in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \\ \psi_L\phi_R &: t_{42}t'_{32}t_{32in}t'_{31in}t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + t_{42}t'_{31}t_{32in}t'_{41in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + t_{41}t'_{32}t_{42in}t'_{31in}e^{i\Phi} + t_{41}t'_{31}t_{42in}t'_{41in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \\ \psi_L\phi_L &: t_{42}t'_{42}t_{32in}t'_{31in}t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + t_{42}t'_{41}t_{32in}t'_{41in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + t_{41}t'_{42}t_{42in}t'_{31in}e^{i\Phi} + t_{41}t'_{41}t_{42in}t'_{41in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \end{aligned} \quad (76)$$

Теперь мы будем выполнять перепараметризацию системы с целью установить параметры, через которые вероятности выражаются наиболее простым образом. Сначала выполним следующую замену.

$$\begin{aligned} t_{31} &\rightarrow t_{31}; & t'_{31} &\rightarrow t'_{31}; & t_{32in} &\rightarrow t_{32in} \\ t_{41} &\rightarrow a_1t_{31}; & t'_{41} &\rightarrow a'_1t'_{31}; & t_{42in} &\rightarrow a_{in}t_{32in} \\ t_{32} &\rightarrow kt_{31}; & t'_{32} &\rightarrow k't'_{31}; & t'_{31in} &\rightarrow t'_{31in} \\ t_{42} &\rightarrow ka_2t_{31}; & t'_{42} &\rightarrow k'a'_2t'_{31}; & t'_{41in} &\rightarrow a'_{in}t'_{31in} \end{aligned} \quad (77)$$

Выражение для конечного состояния примет вид

$$\begin{aligned}
\psi_R\phi_R &: t_{31}t'_{31}t_{32in}t'_{31in}(kk't_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')}) \\
\psi_R\phi_L &: t_{31}t'_{31}t_{32in}t'_{31in}(kk'a'_2t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}a'_1t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'a'_2e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a'_1t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')}) \\
\psi_L\phi_R &: t_{31}t'_{31}t_{32in}t'_{31in}(kk'a_2t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}a_2t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'a_1e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a_1t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')}) \\
\psi_L\phi_L &: t_{31}t'_{31}t_{32in}t'_{31in}(kk'a_2a'_2t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}a_2a'_1t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'a_1a'_2e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a_1a'_1t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')})
\end{aligned} \tag{78}$$

Разделим все коэффициенты на  $t_{31}t'_{31}t_{32in}t'_{31in}$ :

$$\begin{aligned}
\psi_R\phi_R &: kk't_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \\
\psi_R\phi_L &: kk'a'_2t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}a'_1t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'a'_2e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a'_1t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \\
\psi_L\phi_R &: kk'a_2t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}a_2t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'a_1e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a_1t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')} \\
\psi_L\phi_L &: kk'a_2a'_2t_{1L}e^{i\Phi_{1L}} + ka'_{in}a_2a'_1t_2e^{i\Phi_2}e^{i\Phi'} + a_{in}k'a_1a'_2e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a_1a'_1t_{1R}e^{i\Phi_{1R}}e^{i(\Phi+\Phi')}
\end{aligned} \tag{79}$$

Далее выполним замену

$$\begin{aligned}
\Phi &\leftarrow \Phi - \Phi_{1L} & a_{in} &\leftarrow a_{in}/k \\
\Phi' &\leftarrow \Phi' + \Phi_{1R} & a'_{in} &\leftarrow a'_{in}/k' \\
\Phi_0 &\leftarrow \Phi_2 - \Phi_{1L} - \Phi_{1R}
\end{aligned} \tag{80}$$

Поделив все коэффициенты на  $kk'$ , находим

$$\begin{aligned}
\psi_R\phi_R &: t_{1L} + a'_{in}t_2e^{i\Phi_0}e^{i\Phi'} + a_{in}e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}t_{1R}e^{i(\Phi+\Phi')} \\
\psi_R\phi_L &: a'_2t_{1L} + a'_{in}a'_1t_2e^{i\Phi_0}e^{i\Phi'} + a_{in}a'_2e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a'_1t_{1R}e^{i(\Phi+\Phi')} \\
\psi_L\phi_R &: a_2t_{1L} + a'_{in}a_2t_2e^{i\Phi_0}e^{i\Phi'} + a_{in}a_1e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a_1t_{1R}e^{i(\Phi+\Phi')} \\
\psi_L\phi_L &: t_{1L}a_2a'_2 + a'_{in}a_2a'_1t_2e^{i\Phi_0}e^{i\Phi'} + a_{in}a_1a'_2e^{i\Phi} + a_{in}a'_{in}a_1a'_1t_{1R}e^{i(\Phi+\Phi')}
\end{aligned} \tag{81}$$

Тем самым фазы рассеяния на области кулоновского взаимодействия были частично приведены путем переопределения Ааронов-Бомовских фаз. Неприводимый эффект кулоновского взаимодействия - фаза  $\Phi_0$ .

Теперь выполним следующую замену параметров:

$$\begin{aligned}
a'_1 &\rightarrow i\xi' \operatorname{ctg} \theta' e^{i\phi'_1} \\
a'_2 &\rightarrow -i\xi' \operatorname{tg} \theta' e^{i\phi'_2} \\
a_1 &\rightarrow i\xi \operatorname{ctg} \theta e^{i\phi_1} \\
a_2 &\rightarrow i\xi \operatorname{tg} \theta e^{i\phi_2} \\
a_{in} &= -\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \theta_{in} \\
a'_{in} &= \operatorname{ctg} \theta' \operatorname{tg} \theta'_{in}
\end{aligned} \tag{82}$$

Домножив все коэффициенты на  $i \sin \theta i \sin \theta' i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in}$  получаем

$$\begin{aligned}
\psi_R\phi_R &: i \sin \theta i \sin \theta' i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} t_{1L} + i \sin \theta \cos \theta' i \sin \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_2 e^{i\Phi_0} e^{i\Phi'_1} + \\
&\quad \cos \theta i \sin \theta' \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} e^{i\Phi_1} + \cos \theta \cos \theta' \cos \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_{1R} e^{i(\Phi_1+\Phi'_1)}; \\
\psi_R\phi_L &: \xi' (i \sin \theta \cos \theta' i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} t_{1L} + i \sin \theta i \sin \theta' i \sin \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_2 e^{i\Phi_0} e^{i\Phi'_2} + \\
&\quad \cos \theta \cos \theta' \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} e^{i\Phi_1} + \cos \theta i \sin \theta' \cos \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_{1R} e^{i(\Phi_1+\Phi'_2)}); \\
\psi_L\phi_R &: \xi (\cos \theta i \sin \theta' i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} t_{1L} + \cos \theta \cos \theta' i \sin \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_2 e^{i\Phi_0} e^{i\Phi'_1} + \\
&\quad i \sin \theta i \sin \theta' \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} e^{i\Phi_2} + i \sin \theta \cos \theta' \cos \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_{1R} e^{i(\Phi_2+\Phi'_1)}); \\
\psi_L\phi_L &: \xi \xi' (\cos \theta \cos \theta' i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} t_{1L} + \cos \theta i \sin \theta' i \sin \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_2 e^{i\Phi_0} e^{i\Phi'_2} + \\
&\quad i \sin \theta \cos \theta' \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} e^{i\Phi_2} + i \sin \theta i \sin \theta' \cos \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_{1R} e^{i(\Phi_2+\Phi'_2)}),
\end{aligned} \tag{83}$$

где  $\Phi_1 = \Phi$ ,  $\Phi_2 = \Phi + \phi_1 - \phi_2$ ,  $\Phi'_1 = \Phi'_1$ ,  $\Phi'_2 = \Phi' + \phi'_1 - \phi'_2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{R;R} &= \tilde{P}_{R;R}(\Phi_1, \Phi'_1, \Psi)/C; \\ P_{R;L} &= \xi'^2 \tilde{P}_{R;L}(\Phi_1, \Phi'_2, \Psi)/C; \\ P_{L;R} &= \xi^2 \tilde{P}_{L;R}(\Phi_2, \Phi'_1, \Psi)/C; \\ P_{L;L} &= \xi'^2 \xi^2 \tilde{P}_{L;L}(\Phi_2, \Phi'_2, \Psi)/C, \end{aligned} \quad (84)$$

где  $C$  - нормировочная константа,  $\tilde{P}_{I;J}(\Phi, \Phi', \Psi)$  - двухчастичная вероятность в модели с симметричными безотражательными делителями, где Ааронов-Бомовские фазы интерферометров равны  $\Phi, \Phi'$ , а состояние на lvl2 (рис. 2)

$$\Psi = \psi_R \phi_R i \sin \theta_{in} \cos \theta'_{in} t_{1L} + \psi_R \phi_L i \sin \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_2 e^{i\Phi_0} + \psi_L \phi_R \cos \theta_{in} \cos \theta'_{in} + \psi_L \phi_L \cos \theta_{in} i \sin \theta'_{in} t_{1R}, \quad (85)$$

### 2.6.3 Переход через границу Цирельсона

В случае, когда эксперимент сопровождается некоторыми неидеальностями и погрешностями естественно ожидать ухудшения конечных результатов (как получается, например, в "Допустимых отклонениях параметров"). Однако в случае, когда делители теряют безотражательность возможен совершенно обратный эффект. Получаемая после постселекции наблюдаемая Белла может превышать  $\sqrt{2}$ . Пусть  $\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $\Phi'_1 = \Phi'_2$ . Состояние  $\Psi$  берем равным

$$\Psi = \frac{1}{2}(i\psi_R \phi_R - \psi_R \phi_L + \psi_L \phi_R + i\psi_L \phi_L) \quad (86)$$

В этом случае

$$\tilde{P}_{R;R} = \tilde{P}_{L;L}, \tilde{P}_{L;R} = \tilde{P}_{L;R} \quad (87)$$

Тогда орбитальный коррелятор равен:

$$E(a, b) = -1 + \frac{2}{1 + \alpha}, \quad (88)$$

где  $\alpha = \frac{P_{R;L} + P_{L;R}}{P_{L;L} + P_{R;R}}$  причем

$$\alpha = \gamma \tilde{\alpha}; \quad \gamma = \frac{\xi^2 + \xi'^2}{1 + \xi^2 \xi'^2} \quad (89)$$

Обратим внимание на то, что при  $\gamma = 1$  коррелятор совпадает со своим значением для идеальной модели  $E(a, b) = \tilde{E}(a, b)$ , а вот при  $\gamma \rightarrow 0$   $E(a, b) \rightarrow 1$  вне зависимости от своего идеального значения.

При 4-х белловских измерениях определяются значения четырех корреляторов  $E(a, b)$ ,  $E(a', b)$ ,  $E(a, b')$ ,  $E(a', b')$ . При этом

$$\begin{aligned} \gamma_{a,b} &= \frac{\xi_1^2 + \xi_1'^2}{1 + \xi_1^2 \xi_1'^2}; \\ \gamma_{a',b} &= \frac{\xi_2^2 + \xi_1'^2}{1 + \xi_2^2 \xi_1'^2}; \\ \gamma_{a,b'} &= \frac{\xi_1^2 + \xi_2'^2}{1 + \xi_1^2 \xi_2'^2}; \\ \gamma_{a',b'} &= \frac{\xi_2^2 + \xi_2'^2}{1 + \xi_2^2 \xi_2'^2}; \end{aligned} \quad (90)$$

Можно проверить, что эти величины связаны между собой соотношением:

$$\frac{1 + \gamma_{a,b}}{1 - \gamma_{a,b}} \frac{1 + \gamma_{a',b'}}{1 - \gamma_{a',b'}} = \frac{1 + \gamma_{a',b}}{1 - \gamma_{a',b}} \frac{1 + \gamma_{a,b'}}{1 - \gamma_{a,b'}} \quad (91)$$

Таким образом, возможно взять  $\gamma_{a',b'} = 1, \gamma_{a',b} = 1, \gamma_{a,b'} \rightarrow 0, \gamma_{a,b} \rightarrow 0$ . Для этого достаточно добиться  $\xi'_1 = 1, \xi_1 \rightarrow 0, \xi_2 \rightarrow 0, \xi'_2 \rightarrow 0$ .

Если указанные выше условия выполнены, то подобрав остальные параметры так, чтобы  $\tilde{E}(a', b') = -\tilde{E}(a', b) = -1$  (а это возможно), получим  $B \rightarrow 2$ .

Возникает вопрос о природе механизма, позволившего перейти через границу Цирельсона. Здесь ответ видится в следующем ключе. В описанном выше примере мы фактически использовали только отражение в верхних делителях для перехода, значит именно оно принципиально делает переход возможным. Трансфер-матрица, выполняющая преобразование в гильбертовом пространстве одной частицы при переходе из lvl2 на уровень измерителей имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} t_{31} & t_{41} \\ t_{32} & t_{42} \end{pmatrix} \quad (92)$$

В случае безотражательных делителей на эту матрицу накладывается условие  $T^+T = 1$ , проистекающее из условия унитарности матрицы рассеяния  $S = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}$ , в то время как в случае отражающих делителей унитарность трансфер-матрицы не обязательна. Таким образом, обнаруженное явление перехода границы Цирельсона объясняется расширением класса преобразований волновой функции, происходящих при проходе через делители. Граница Цирельсона выставляется исходя из предположения об унитарности преобразований.

Далее отметим, что если  $\Phi_0 = 0$ , т е кулоновское взаимодействие отсутствует, то неравенство Белла остается в силе (проверено при  $\Phi_1 = \Phi_2, \Phi'_1 = \Phi'_2$ ). В этом смысле его нарушение все еще является индикатором запутанности получаемого двухчастичного состояния.

## 2.7 Учет конечной длины волновых пакетов

В случае, когда пакеты имеют конечную длину, а разность длин интерферирующих путей слева и справа  $l$  and  $l'$ , формулы для двучастичных вероятностей видоизменяются и принимают форму:

$$\begin{aligned} 4P_{R;R} &= \int |\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \cos \theta \cos \theta' e^{i\Phi_0} - \psi_1(x_1)\psi_2(x_2 - l') \cos \theta \sin \theta' e^{-i\frac{\epsilon}{c}F'} \\ &\quad - \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2) \sin \theta \cos \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}F} + \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2 - l') \sin \theta \sin \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}(F-F')}|^2 dx_1 dx_2, \\ 4P_{R;L} &= \int |\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \cos \theta \sin \theta' e^{i\Phi_0} + \psi_1(x_1)\psi_2(x_2 - l') \cos \theta \cos \theta' e^{-i\frac{\epsilon}{c}F'} \\ &\quad - \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2) \sin \theta \sin \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}F} - \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2 - l') \sin \theta \cos \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}(F-F')}|^2 dx_1 dx_2, \\ 4P_{L;R} &= \int |\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \sin \theta \cos \theta' e^{i\Phi_0} - \psi_1(x_1)\psi_2(x_2 - l') \sin \theta \sin \theta' e^{-i\frac{\epsilon}{c}F'} \\ &\quad + \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2) \cos \theta \cos \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}F} - \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2 - l') \cos \theta \sin \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}(F-F')}|^2 dx_1 dx_2, \\ 4P_{L;L} &= \int |\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \sin \theta \sin \theta' e^{i\Phi_0} + \psi_1(x_1)\psi_2(x_2 - l') \sin \theta \cos \theta' e^{-i\frac{\epsilon}{c}F'} \\ &\quad + \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2) \cos \theta \sin \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}F} + \psi_1(x_1 - l)\psi_2(x_2 - l') \cos \theta \cos \theta' e^{i\frac{\epsilon}{c}(F-F')}|^2 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (93)$$

. Обращаем внимание на то, что  $\Phi_0 = \Phi_0(x_1, x_2)$ , т е если ранее  $\Phi_0$  была константой взаимодействия, то теперь это переменная зависящая от координат (вид функции определяется формой потенциала взаимодействия). В случае  $l = l' = 0$  был рассчитан параметр Белла (для одной из конфигураций, дающих максимальное нарушение в идеальной модели)

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \int \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \cos \Phi_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (94)$$

Подставляя в последнее уравнение  $\Phi_0(x_1, x_2) = \pi \left(1 - \frac{|x_1 - x_2|}{L}\right)$ , где  $L$  - длина области взаимодействия, получаем:

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{|x_1 - x_2| < L} \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \left(1 + \cos \left(\pi \frac{x_1 - x_2}{L}\right)\right) dx_1 dx_2 \quad (95)$$

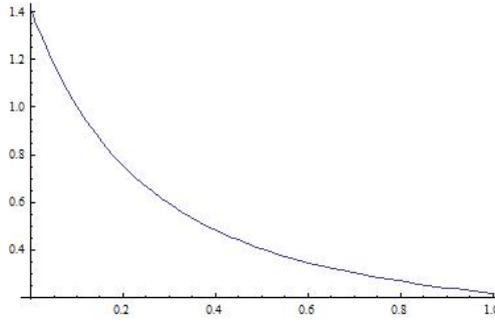


Рис. 5: Зависимость наблюдаемой Белла от ширины пакета, деленной на  $L$ . График пересекает прямую  $B = 1$  при  $a \approx 0,1$

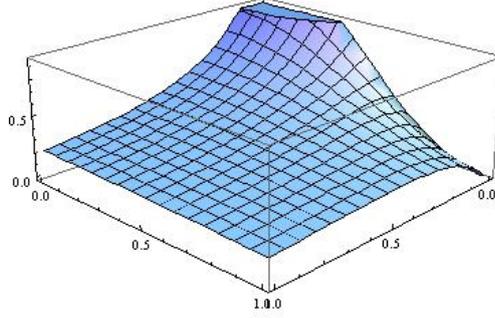


Рис. 6: Зависимость параметра Белла от ширины и запаздывания между лоренцевскими пакетами. Плато проведено на уровне  $B=1$ .

Выражение было сосчитано для пакетов Лоренцевской формы.

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{e^{ik_0x}}{x + ia}. \quad (96)$$

Временное запаздывание инжектирования пакетов учитывается заменой  $x \rightarrow x+b$  в выражении для  $\psi_2(x)$ .

$$\psi_1(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ik_0x}}{x + ia}, \quad \psi_2(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ik_0(x+b)}}{(x+b) + ia}. \quad (97)$$

Также расчет был проведен для пакетов формы:

$$\psi(x) = \begin{cases} C e^{x/a}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (98)$$

### 3 Создание трехчастичных запутанных состояний

В этом разделе будет рассмотрено получение трехчастичных запутанных состояний. В основном под словами "трехчастичное запутанное состояние" имеется ввиду GHZ-состояние  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle)$  и его модификации. GHZ-состояние было впервые изучено Гринбергом, Хорном и Цайлингером в [5]. Оно является самым запутанным трехчастичным состоянием и дает максимальное нарушение неравенства Белла, причем степень нарушения превосходит двухчастичную

#### 3.1 Установка.

Для производства трехчастичных запутанных состояний используем установку изображенную на рис. 9. Имеется три интерферометра Маха-Зендера с электростатическим взаимодействием

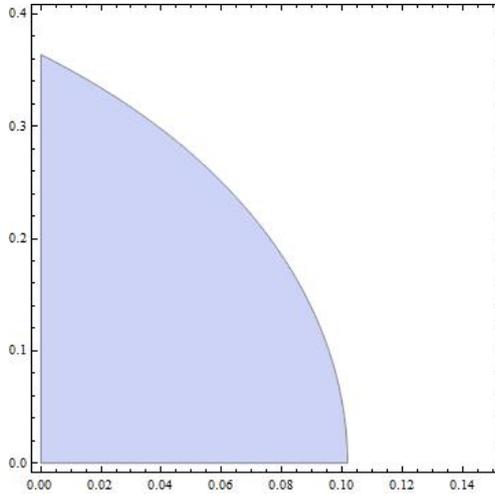


Рис. 7: Зона  $B > 1$  для лоренцевских пакетов. Запаздывание и ширина даны в долях от  $L$ .  $x, y$  соответственно ширина и запаздывание.

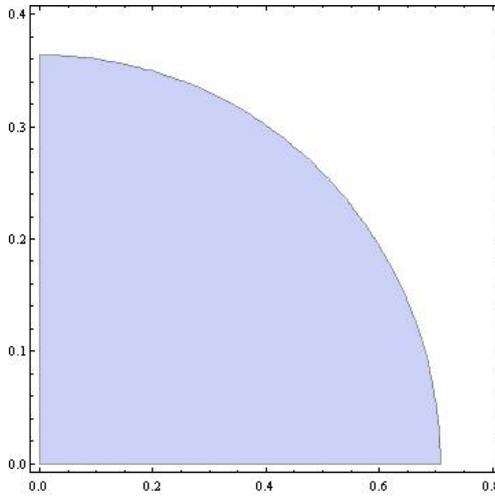


Рис. 8: Зона  $B > 1$  для экспоненциально затухающих пакетов. Величины даны по отношению к  $L$ .  $x, y$  соответственно ширина и запаздывание.

между некоторыми путями (помечено прямоугольниками). Утверждается, что если взять нижние делители полупропускающими, а фазу, набираемую при кулоновском взаимодействии сделать равной  $\pi$ , то получаемое состояние будет являться GHZ-состоянием.

### 3.2 Получение GHZ состояния

Нижние делители имеют  $\theta = \pi/4$ . Исходное трехчастичное состояние

$$\Psi = \psi_{1R}\psi_{2L}\psi_{3L}. \quad (99)$$

Аналогично двухчастичному случаю, из-за того, что волновые пакеты трех электронов не могут перекрываться обменные эффекты можно не учитывать. После замены:

$$\begin{aligned} \psi_{nR} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{nL} + i\psi_{nR}), \\ \psi_{nL} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{nR} + i\psi_{nL}), \end{aligned} \quad n = 1, 2, 3. \quad (100)$$

получаем состояние после прохода нижних делителей

$$\Psi = \frac{1}{2^{1.5}}(\psi_{1L} + i\psi_{1R})(\psi_{2R} + i\psi_{2L})(\psi_{3R} + i\psi_{3L}) \quad (101)$$

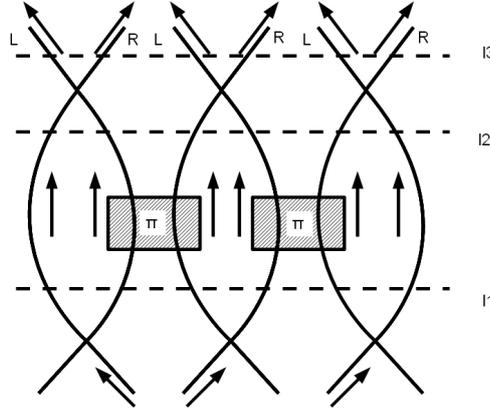


Рис. 9: Схема установки для получения трехчастичного запутанного состояния.

Набор кулоновской фазы учитывается следующим преобразованием

$$\begin{aligned}\psi_{1R}\psi_{2L} &\rightarrow -\psi_{1R}\psi_{2L} \\ \psi_{2R}\psi_{3L} &\rightarrow -\psi_{2R}\psi_{3L}\end{aligned}, \quad (102)$$

выполнив которое, получаем

$$\Psi = \frac{1}{2^{1.5}}(i(\psi_{1L}\psi_{3L} - \psi_{1R}\psi_{3R})(-\psi_{2R} + i\psi_{2L}) + (\psi_{1L}\psi_{3R} + \psi_{1R}\psi_{3L})(\psi_{2R} + i\psi_{2L})), \quad (103)$$

Это GHZ-состояние, которое записано не в естественном базисе. Для того, чтобы формально его получить, необходимо произвести замену базиса

$$\begin{aligned}\psi_{1R} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1L} + i\psi_{1R}) \\ \psi_{1L} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1R} + i\psi_{1L}) \\ \psi_{3R} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{3L} + i\psi_{3R}), \\ \psi_{3L} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{3R} + i\psi_{3L}) \\ \psi_{2R} &\rightarrow \psi_{2L} \\ \psi_{2L} &\rightarrow -i\psi_{2R}\end{aligned} \quad (104)$$

после которой получится GHZ-состояние

$$\Psi = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_{1R}\psi_{2R}\psi_{3R} + \psi_{1L}\psi_{2L}\psi_{3L}) \quad (105)$$

### 3.3 Нарушение неравенства Белла для трех частиц.

#### 3.3.1 Дополнительные сведения о неравенстве Белла для трех частиц

Укажем измерительную конфигурацию, дающую максимальное нарушение неравенства Белла для трех частиц со спином  $\frac{1}{2}$ . Как всегда, оператор  $\sigma_a$  нормирован так, чтоб его собственные значения были равны  $\pm 1$ . Оператор Белла тогда имеет вид:

$$B = \frac{1}{2}(\sigma_{a'_1} \times \sigma_{a_2} \times \sigma_{a_3} + \sigma_{a_1} \times \sigma_{a'_2} \times \sigma_{a_3} + \sigma_{a_1} \times \sigma_{a_2} \times \sigma_{a'_3} - \sigma_{a'_1} \times \sigma_{a'_2} \times \sigma_{a'_3}) \quad (106)$$

Параметризация набора векторов  $a_n, a'_n$ , дающего максимальное значение наблюдаемой, равное 2 имеет вид

$$a_n = \begin{pmatrix} \cos \phi_n \\ \sin \phi_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a'_n = \begin{pmatrix} -\sin \phi_n \\ \cos \phi_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (107)$$

где  $n = 1..3$  и  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\pi/2 + 2\pi * k$

### 3.3.2 Нарушение неравенства в установке.

В нашей установке наблюдаемыми являются трехчастичные вероятности. Пусть  $P_{RRL}$  означает вероятность первому электрону попасть в правый канал (в соответствующем интерферометре), второму также в правый, а третьему в левый. Из этих трехчастичных вероятностей конструируется коррелятор

$$E(a_1, a_2, a_3) = P_{RRR} + P_{RLL} + P_{LRL} + P_{LLR} - P_{LLL} - P_{LLR} - P_{LRL} - P_{RLL}. \quad (108)$$

В псевдоспиновом формализме он соответствует  $\sigma_z \times \sigma_z \times \sigma_z$  коррелятору, измеряемому на конечном состоянии, или  $\sigma_{a_1} \times \sigma_{a_2} \times \sigma_{a_3}$  -коррелятору для состояния перед верхними делителями, где  $a_i$  зависит от параметров  $i$ -того делителя как (??). Далее используем спиновую аналогию для нахождения измерительных конфигураций, дающих максимальное значение наблюдаемой Белла. Назовем гильбертово пространство, где находится состояние до делителей  $H_0$ , а пространство, где живет получающееся после делителей состояние  $H_f$ . Тогда  $E(a_1, a_2, a_3)$  это  $\sigma_z \times \sigma_z \times \sigma_z$  в  $H_f$  и  $\sigma_{a_1} \times \sigma_{a_2} \times \sigma_{a_3}$  в  $H_0$ .

Состояние, получаемое после перехода через область кулоновского взаимодействия (103) может быть при помощи унитарного преобразования превращено в GHZ состояние. Это преобразование (104) осуществляется делителями с параметрами  $\theta_1 = \theta_3 = \pi/4, \Phi_1 = \Phi_3 = 0, \theta_2 = 0, \Phi_2 = -\pi/2$ . Обозначим пространство, в котором наше состояние имеет фформально вид GHZ-состояния  $H_1$ . Параметры делителей определяют законы перехода от  $H_1$  к  $H_0$  по (??). Далее становится возможным узнать  $a_i, a'_i$  требуемые для  $B = 2$  в  $H_0$  (ведь в  $H_1$  они определяются (107)).

Матрицы перехода следующие:

$$T_1 = T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (109)$$

следовательно в  $H_0$

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 \\ 0 \\ -\sin \phi_1 \end{pmatrix}, a'_1 = \begin{pmatrix} -\sin \phi_1 \\ 0 \\ -\cos \phi_1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} \sin \phi_2 \\ \cos \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, a'_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi_2 \\ -\sin \phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 \\ 0 \\ -\sin \phi_3 \end{pmatrix}, a'_3 = \begin{pmatrix} -\sin \phi_3 \\ 0 \\ -\cos \phi_3 \end{pmatrix} \quad (110)$$

and  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\pi/2$ . Связь между этими векторами и параметрами делителей даетсь формулой:

$$a = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \sin \Phi \\ \sin 2\theta \cos \Phi \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (111)$$

Заметим, что  $\theta_2 = \pi/8$  не изменяется в процессе измерений при любой параметризации. Изменяется только магнитный поток.

Во-вторых, возможно максимальное нарушение неравенства, при котором не изменяются проицаемости также первого и третьего делителей. Для этого нужно  $\phi_1 = \phi_3 = \pi/4, \phi_2 = \pi$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
a_1 = a_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, & \theta_1 = \theta_3 &= \pi/4, & \Phi_1 = \Phi_3 &= \pi/2 \\
a'_1 = a'_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, & \theta'_1 = \theta'_3 &= \pi/4, & \Phi'_1 = \Phi'_3 &= -\pi/2 \\
a_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Phi_2 &= \pi, & \theta_2 &= \pi/8 \\
a'_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \Phi'_2 &= 3\pi/2, & \theta'_2 &= \pi/8
\end{aligned} \tag{112}$$

## 4 Выводы.

В работе изучены две установки с помощью которых в перспективе можно будет пронаблюдать нарушение неравенства Белла для электронов. Было показано, что как в двухчастичном, так и в трехчастичном случаях возможно получение максимально запутанных состояний (отметим, что в случае четырех частиц таким образом не удастся получить аналог GHZ-состояния). Описаны измерительные конфигурации, дающие это нарушение.

Одним из основных направлений, по которым возможно продолжение исследования, является разработка соответствующей современным представлениям модели кулоновского взаимодействия. Дело в том, что общепринятая ранее модель невзаимодействующих электронов в краевых состояниях не описывает имеющиеся данные об особенностях интерференционной картины даже в одном интерферометре [6]. Применяющаяся для описания этих особенностей теоретическая модель [7] указывает на то, что кулоновское взаимодействие между краевыми состояниями и даже между электронами в одном краевом состоянии играет важную роль при рассмотрении электронных интерферометров.

Обнаруженный в двухчастичном случае эффект перехода через границу Цирельсона позволяет по-новому взглянуть на явления, происходящие при постселекции экспериментальных результатов. Ранее уже сообщалось о в некотором смысле похожей возможности перехода через границу в случае детекторов с потерями [8], однако при этом появлялась возможность нарушать неравенства Белла при помощи незапутанных состояний, что девальвирует ценность таких неравенств как индикаторов запутанности. В нашем же случае сепарабельные состояния по-прежнему дают  $B < 1$ . Далее можно проверить это свойство в случае  $\Phi_1 \neq \Phi_2, \Phi'_1 \neq \Phi'_2$ . Также нужно узнать, можно ли таким образом нарушать неравенства Белла, если исходно имеется смешанное запутанное состояние.

## Список литературы

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] J. S. Bell, *Phys.* **1**, 195 (1964).
- [3] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969)
- [4] Z. Y. Ou and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50-53 (1988)
- [5] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger, *American Journal of Physics* **58**, 1131 (1990).
- [6] I. Neder, M. Heiblum, Y. Levinson, D. Mahalu and V. Umansky, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 016804(2006)
- [7] Eugene V. Sukhorukov and Vadim V. Cheianov, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 156801 (2007)
- [8] quant-phys 0712.2490