Федеральное агенство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Московский физико технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень магистра

”Динамика инерционных частиц в случайном потоке с сильной средней постоянной сдвиговой компонентой.”

Студент 528 гр. Сизов Г.А.

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Колоколов И.В.

Черноголовка 2011 г.

Содержание

1 Введение

В этой работе мы рассматриваем динамику маленьких инерционных частиц, погруженных двумерный случайный поток жидкости. Поток состоит из флуктуаций скорости, наложенных на сильное относительно них сдвиговое течение. Модель такого типа может описывать поведение колоний микроскопических организмов в океане [1] или поведение капель жидкости в теплых облаках [2, 3] (и использоваться, например, для оценки времени до начала выпадения дождя). В обоих случая частицы (капли или планктон), имеющие плотность, существенно отличную от плотности жидкости, собираются турбулентным течением в кластеры.

Интуитивно, случайное поле скорости должно размешивать погруженные в него частицы и делать плотность их распределения более однородной. Однако, как показывают эксперименты [4] и численный счет [5], на самом деле наблюдается обратный эффект кластеризации частиц. Такое "антиразмешивание"[6] объяснялось в [7] выбрасыванием частиц из областей с высокой кривизной линий течения, из-за которого частицы собираются в областях с меньшей кривизной. Феноменологическая модель этого явления предложена в [8]. При этом существенно, что частицы обладают конечной инерцией: в пренебрежении инерцией частицы бы пассивно переносились жидкостью и в несжимаемом потоке их концентрация оставалась бы постоянной.

Другой механизм для объяснения кластеризации был предложен в [9]. Он работает и тогда, когда поле скорости можно считать гладким и эффект нельзя объяснить только выталкиванием из областей с высокой искривленностью линий течения. Частицы в нашей модели соответствуют каплям в облаке размерами до нескольких десятков микрон. Мы рассматриваем случай, когда типичные расстояния между частицами много больше их размера, но много меньше Колмогоровского масштаба в атмосфере. Поэтому мы будем считать поле скорости гладким в пространстве и коротко-коррелированым во времени, используя так называемую модель Крайчана [10].

Поскольку при наличии инерции скорость частицы больше не определяется локально скоростью жидкости, то даже при несжимаемом поле скорости жидкости поле скоростей частиц может быть сжимаемым. В терминах Ляпуновских экспонент это означает, что их сумма больше не равна 0. Эта сумма определяет меру производства энтропии на единицу объема с обратным знаком, и поэтому всегда неположительна [11, 12, 13].

Существует ряд работ, в которых аналитически изучалось поведение инерционных частиц в изотропном случайном потоке. Из-за сжимаемости поля скорости изначально однородное распределение частиц может стать сильно неоднородным, образовав кластеры и пустоты. Статистика концентрации частиц была изучена в [13]. В [14] изучалось мультифрактальное множество, которое частицы занимали в фазовом пространстве. При этом удобным языком является теория диссипативных динамических систем (тогда как пассивная примесь, переносимая жидкостью, отвечает консервативной динамике). В [15], [16] и [17] была рассмотрена кластеризация частиц при малых числах Стокса в одномерном, двумерном и трехмерном случаях соответственно. Поток состоит из случайных потенциальной и соленоидальной части. Показано, что в этих условиях можно наблюдать фазовый переход. А именно, если сделать инерцию частиц достаточно большой, то первая Ляпуновская экспонента обратится в ноль. Первая Ляпуновская экспонента определяет экспоненциальный рост расстояния между двумя частицами. Положительная экспонента означает разбегание частиц, а отрицательная, наблюдающаяся при достаточно большой инерции означает, что все частицы собираются в одну точку. Изучался также случай тяжелых частиц, движущихся почти баллистически [18, 19].

Часто в экспериментальных и природных системах (например в атмосфере) флуктуирующие потоки существуют на фоне сильного постоянного сдвигового потока ("шира"). Сам по себе сдвиговый поток, естественно, не вызывает экспоненциального роста расстояния между двумя погруженными в него частицами (расстояние растет линейно). Однако, при наличии даже маленьких флуктуаций, поведение частиц качественно изменяется и расстояние начинает экспоненциально расти, причем коэффициент сдвига входит в инкремент роста (первая Ляпуновская экспонента) $\lambda \sim (Ds^2)^{1/3}$, где D — сила флуктуаций, а s — коэффициент сдвига. Угловая динамика также становится нетривиальной, приобретая характерные перевороты, создающие степенной хвост функции распределения. Этот комбинированный эффект шира и малых флуктуаций изучен в [20, 21].

В этой работе мы изучим систему, в которой присутствуют оба эффекта: частицы имеют маленькую инерцию, и двумерный поток, который их переносит состоит из флуктуаций на фоне сильного постоянного шира. В модели есть четыре параметра размерности времени: обратная сила флуктуаций D^{-1}, обратный коэффициент сдвига s^{-1}, мера инерции частицы τ (она же характерное время отклика) и время корреляции скорости. Этим последним временным масштабом мы полностью пренебрегаем, а про остальные параметры предполагаем, что

$$D\tau \ll s\tau \ll 1 \tag{1}$$

В разделах 2 и 3 мы кратко напоминаем, к чем сводится влияние шира и инерции на динамику частиц по отдельности. В разделе 4 мы изучаем диффузию частиц в сдвиговом потоке под действием аддитивного теплового шума. В разделе 5 мы вычисляем поправку к первой Ляпуновской экспоненте, связанную с инерцией. Для этого мы выражаем Ляпуновскую экспоненту как среднее от переменной некоторой стохастической системы. Далее, написав уравнение Фоккера-Планка на функцию распределения вероятности для этой системы, мы преобразуем его к уравнению Шредингера двумерного гармонического осциллятора с неэрмитовым возмущением. Решая это уравнение по теории возмущений и вычисляя среднее, мы получаем ответ, пропорциональный $-\tau\lambda^2$, где $\lambda \sim (Ds^2)^{1/3}$ — Ляпуновская экспонента потока. В разделе 6 мы вычисляем старшие моменты роста расстояния между частицами, используя седловое приближение в функциональном пространстве (метод оптимальной флуктуации) [23]. Как показано в [21], инкременты старших моментов (обобщенные Ляпуновские экспоненты) пропорциональны $(n^4Ds^2)^{1/3}$. Мы показываем, что первая поправка к ним из-за наличия инерции равна $-2n\tau(nDs^2)^{2/3}$.

2 Безынерционная динамика в сдвиговом потоке

Частицы, погруженные в поток жидкости, увлекаются ею за счет силы Стокса. Если плотность каждой частицы близка к плотности жидкости, то движение эффективно безинерционное - скорость частицы в каждый момент времени равна локальной скорости жидкости. В таком приближении мы и будем работать в этом разделе.

Уравнение движения на радиус-вектор частицы имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что несжимаемый поток не создает неоднородностей плотности, поэтому изначально однородное пространственное распределение частиц остается однородным. Действительно, уравнение непрерывности на плотность имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{3}$$

Поскольку поле скорости несжимаемо, то скорость можно вынести из-под дивергенции. Тогда видно, что однородное распределение частиц ($\nabla\rho = 0$) является стационарным. Если еще предположить, что примеси не оказывают никакого влияния на скорость жидкости (отсутствие обратной реакции), и добавить диффузию, то получим модель "пассивного скаляра", которая изучалась в работах [24, 25, 26, 27] :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\theta = \kappa\Delta\theta. \tag{4}$$

Альтернативой изучению динамики поля плотности является изучение статистики вектора расстояния между двумя частицами $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r_1}(t) - \mathbf{r_2}(t)$. Ниже мы опишем эту статистику в безынерционном пределе, используя результаты работ [20],[21].

В [20] статистика $\mathbf{R}(t)$ изучалась как часть более общей задачи о динамике полимера в случайном потоке. Полимер моделируется одним вектором $\mathbf{R}(t)$, содержащим информацию об его ориентации и степени растяжения. Он подчиняется следующему уравнению

$$\dot{\mathbf{R}} = \sigma\mathbf{R} - \gamma(R)\mathbf{R}, \tag{5}$$

где $\gamma(R)$ - упругая сила. Угловая динамика точно отображается на угловую динамику вектора между двумя Лагранжевыми частицами, а радиальная — если положить упругую силу равной нулю. В [21] "полимерная" задача была решена аналитически для случая, когда поле скорости коротко-коррелировано во времени.

На масштабах, меньших вязкого, поле скорости можно аппроксимировать линейным профилем, соответственно его градиенты — постоянная в пространстве матрица $\Sigma_{ij} \equiv \partial_j v_i$ (заметим, что равенству нулю ее следа эквивалентно несжимаемости потока, которую мы везде предполагаем). В этом приближении вектор расстояния между двумя лагранжевыми частицами подчиняется уравнению

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \Sigma(t)\mathbf{R}(t) \tag{6}$$

Нас будет интересовать случай, когда течение состоит из сильного сдвигового течения и флуктуаций на его фоне. Эти последние предполагаются малыми по сравнению со сдвигом, но, несмотря на это, они качественно изменяют динамику системы. Это происходит из-за того, что чисто сдвиговое течение является пограничным в объясняемом ниже смысле.

В зависимости от знака детерминанта Σ течение локально может быть либо растягивающим (гиперболическим), если $\det\Sigma < 0$, либо вращающим (эллиптическим), если $\det\Sigma > 0$, либо сдвиговым, если $\det\Sigma = 0$.

На больших временах динамика $\mathbf{R}(t)$ определяется свойствами произведения большого количества случайных матриц. Формально это можно увидеть, записав решение (6) в виде

$$\mathbf{R}(t) = \mathrm{Texp}\left(\int_0^t dt'\Sigma(t')\right)\mathbf{R}(0) \equiv W(t)\mathbf{R}(0), \tag{7}$$

где Texp — хронолочески упорядоченная экспонента. Асимптотические свойства матрицы $W(t)$ удобно характеризовать Ляпуновскими экспонентами λ_i. Рассмотрим базис из собственных векторов f_i симметричной матрицы $W^T(t)W(t)$. Тогда

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln|W(t)\mathbf{f_i}| \tag{8}$$

Пронумеруем λ_i в порядке убывания. Сумма первых n Ляпуновских экспонент равна инкременту роста n-мерного объема n-мерных объектов. В частности, первая Ляпуновская экспонента отвечает за рост расстояния между двумя частицами, а сумма всех равна нулю в несжимаемом потоке.

Итак, в растягивающем потоке вектор $\mathbf{R}$ разворачивается вдоль положительного собственного направления, а его длина растет со временем как $e^{\lambda_1 t}$. Во вращающем потоке траекторией $\mathbf{R}$ является эллипс. Сдвиговый поток, который можно представлять себе как пограничный случай между растягивающим и вращающим течением, сам по себе не растягивет $\mathbf{R}$ экспоненциально (а лишь линейно), но если на него наложить даже слабую флуктуационную компоненту скорости, вектор $\mathbf{R}$ начинает экспоненциально расти и приобретает нетривиальную угловую динамику.

Итак, пусть несжимаемое поле скорости жидкости состоит из сдвигового течения вдоль оси x

$$v_x = sy \tag{9}$$

и флуктуационной части $v_i = \sigma_{ij}R_j$, так что тензор градиентов скорости имеет вид

$$\Sigma_{ji}(t) = s\delta_{jx}\delta_{iy} + \sigma_{ji}(t). \tag{10}$$

Коррелятор градиентов скорости коротко-коррелирован по времени имеет следующую тензорную структуру, удовлетворяющую условию несжимаемости ($\mathrm{Tr}\,\Sigma = 0$)

$$\langle\sigma_{ik}(t_1)\sigma_{jn}(t_2)\rangle = D(3\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jk})\delta(t_1 - t_2). \tag{11}$$

Для удобства мы выбрали изотропную тензорную структуру коррелятора, но вклад в конечный ответ дает только одна компонента σ, а именно σ_{xy}. Как следует из (11), ее коррелятор имеет вид

$$\langle\sigma_{xy}\sigma_{xy}\rangle = 3D\delta(t_1 - t_2) \tag{12}$$

Условие малости флуктуаций по сравнению с широм теперь записывается как $D \ll s$. Обозначив за ϕ угол в плоскости сдвига, а $\rho = \ln R$, можно записать (6) в виде

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \Sigma_{21} \cos^2 \phi - \Sigma_{12} \sin^2 \phi + (\Sigma_{22} - \Sigma_{11}) \sin \phi \cos \phi, \\ \dot{\rho} = \Sigma_{11} \cos^2 \phi + \Sigma_{22} \sin^2 \phi + (\Sigma_{12} + \Sigma_{21}) \sin \phi \cos \phi. \end{cases} \tag{13}$$

Правые части этой системы содержат два вклада: один от постоянной сдвиговой части градиента скорости $\sigma_{shear} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а второй флуктуационный, который мы обозначим как $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Пользуясь коррелятором (11), несложно показать, что ξ_1, ξ_2 - независимые белые шумы. При этом ξ_1 имеет нулевое среднее, а $\langle \xi_2 \rangle = D$. В присутствии сильного сдвигового течения мы не будем учитывать эту среднюю силу.

Итак, (6) в новых переменных имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -s \sin^2 \phi + \xi_1 \\ \dot{\rho} = s \sin \phi \cos \phi + \xi_2 \end{cases} \tag{14}$$

Угловая динамика, определяемая первым уравнением, отцепилась от радиальной, что позволяет написать уравнение Фоккера-Планка на функцию распределения только от угла.

$$\partial_t \mathcal{P}(\phi, t) = \partial_\phi \left(s \sin^2 \phi + D \partial_\phi \right) \mathcal{P}(\phi, t) \tag{15}$$

Решая это уравнение, можно выявить основные черты угловой динамики. Большую часть времени ϕ проводит в области малых положительных углов порядка $\phi_0 = (D/s)^{1/3}$ (углы отсчитываются от направления шира), где s — коэффициент шира, а D — сила флуктуаций. Однако, время от времени, когда диффузное блуждание выводит его за границы области малых углов в отрицательную сторону, включается слагаемое $-s\phi^2$ и происходит переворот — практически детерминированное движение через область больших отрицательных углов, после чего угол долго блуждает около $\pi + \phi_0$. Получающаяся в результате этого функция распределения не симметрична относительно замены изменения знака ϕ, имеет максимум на углах порядка ϕ_0 и степенной хвост $\mathcal{P}(\phi) \propto \phi^{-2}$ на углах $\phi_0 \ll \phi \ll 1$. Эти результаты получены в [21, 20].

Из второго уравнения (14) видим, что ρ является экстенсивной величиной — интегралом от стационарного процесса Y_1. Функция распределения такой величины на больших временах асимптотически стремится к виду $\exp(-tH(\rho/t))$, где H — функция Крамера [22]. Покажем это, следуя [11].

Действительно, пусть Y_1 имеет конечное время корреляции τ. На временах, много больших τ, ρ фактически является суммой $N = t/\tau$ одинаково распределенных независимых случайных величин. Обозначим одну такую величину за $y = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} dt Y_1$. Введем для нее производящую функцию $\langle e^{zy} \rangle \equiv e^{S(z)}$. Тогда мы знаем и производящую функцию ρ: $\langle e^{z\rho} \rangle = e^{NS(z)}$. Теперь при помощи обратного преобразования Лапласа мы можем найти функцию распределения ρ.

$$\mathcal{P}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} dz e^{-z\rho + NS(z)} \tag{16}$$

Этот интеграл на больших временах, т.е. $N \gg 1$, можно взять методом перевала. Находим значение $z^\star$, стационарное для показателя, из условия

$$\rho/N = S'(z^\star) \tag{17}$$

и подставляем $z^\star$ в показатель. Вводя функцию Крамера как $H(z) = S(z) - zS'(z)$, получаем

$$\mathcal{P}(\rho, t) \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau} H\left(\rho \frac{\tau}{t} \right) \right). \tag{18}$$

Функция Крамера имеет минимум при ρ/t равном Ляпуновской экспоненте потока

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \ln R(t), \tag{19}$$

и квадратично раскладывается около этого значения. Ляпуновская экспонента определяется ростом моментов R с малым номером:

$$\lambda = \frac{d\lambda_n}{dn}|_{n=0},\ \langle R^n \rangle \propto e^{\lambda_n t} \tag{20}$$

Мы можем вычислить Ляпуновскую экспоненту, зная угловую функцию распределения

$$\lambda = \langle \dot\rho \rangle \approx s\langle \phi \rangle \sim (Ds^2)^{1/3} \tag{21}$$

С другой стороны, поведение $S(x)$ вдали от минимума пересчитывается в обобщенные Ляпуновские экспоненты (инкременты роста старших моментов).

$$\lambda_n = \lim_{t\to 0} t^{-1} \ln \langle (R(t)/R(0))^n \rangle \tag{22}$$

Действительно,

$$\langle R^n(t) \rangle = \int d\rho e^{n\rho} e^{-tH(\rho/t)} \tag{23}$$

При $t \to \infty$ можно вычислить этот интеграл методом перевала. Находим стационарную точку показателя:$\rho/t = x_n$, где $H'(x_n) = nx_n$.

$$\langle R^n(t) \rangle \propto e^{\lambda_n t} \sim e^{(nx_n - H(x_n))t} \tag{24}$$

Эти инкременты роста моментов пропроциональны $(n^4 Ds^2)^{1/3}$ [21]. Заметим, что если бы ρ была гауссовой случайной величиной, то функция Крамера была бы квадратична и инкременты роста моментов росли бы линейно с номером момента. Мы же наблюдаем нелинейную зависимость инкрементов от n, что свидетельствует о перемежаемости.

Численное подтверждение этих аналитических результатов представленно в [28],[29].

3 Влияние инерции на динамику частиц

Рассмотрим две маленькие сферические частички радиуса a, помещенные в несжимаемый поток $\mathbf{u}(r,t)$. Каждая из них подвержена силе Стокса $\mathbf{f} = 6\pi\eta a(\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}})$. Таким образом, уравнение на радиус-вектор частицы имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 6\pi\eta a(\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \dot{\mathbf{r}}) \tag{25}$$

Пусть расстояние между частицами $|\mathbf{R}(t)| = |r_1 - r_2|$ много меньше вязкого масштаба турбулентности. Тогда мы можем разложить скорость до линейного порядка, определяемого матрицей градиентов σ: $\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{R}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{R}$ и получать уравнение движения на R

$$\tau\ddot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}} = \sigma\mathbf{R} \tag{26}$$

Здесь мы ввели меру инерции частицы τ, имеющую размерность времени ("время отклика"). В случае, когда плотность каждой частицы много больше плотности жидкости, мы можем пренебречь эффектом присоединенной массы, и $\tau = m/(6\pi\eta a)$. Мы пренебрегаем взаимодействием частиц (как гидродинамическим, так и из-за столкновений).

При малых числах Стокса частицы следуют по Лагранжевым траекторям, слегка отклоняясь от них, поэтому изменения концентрации незначительны. При очень больших числах Стокса движение частиц почти баллистическое, и концентрация также остается равномерной. При промежуточных числах Стокса могут возникать существенные флуктуации концентрации. За это ответственны два эффекта. Первый связан с тем, что на достаточно больших масштабах линии течения сильно искривлены. За счет того, что инерционные частицы срываются с траекторий, по которым их тащит течение, есть постоянная миграция частиц из областей

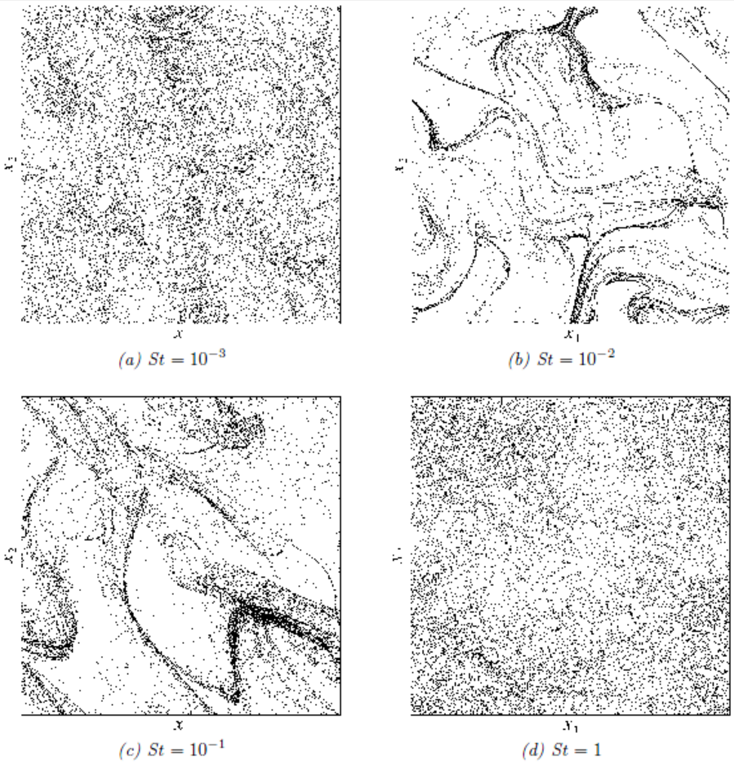

FIGURE 5. Snapshots of the positions of $N = 10^5$ heavy particles ($\beta = 0$) associated to four different Stokes numbers as labelled. (*a*), (*b*) and (*c*) correspond to values smaller than the threshold, so that particles form fractal clusters. (*d*) corresponds to a Stokes number larger than the critical value, so that the particles fill the whole domain.

Рис. 1: Образование мультифрактальной структуры [14]

большой кривизны линий тока в области меньшей. Заметим, что при этом области большой концентрации частиц напрямую определяются распределением кривизны линий тока в пространстве, т.е. мгновенным полем скорости. Второй эффект не предполагает наличие корреляций между мгновенным полем скорости и положениями частиц, таким образом он работает даже тогда, когда время корреляции скорости много меньше времени отклика частицы. Динамика инерционных частиц соответствует диссипативной стохастической системе, которая имеет аттрактор в фазовом пространстве. Известно, что [30] если размерность этого аттрактора меньше, чем размерность физического пространства, то почти всегда область, занимаемая частицами в физическом пространстве (естественная проекция аттрактора на физ. пространство) будет иметь такую же размерность.

В литературе имеется зоопарк различных размерностей, характеризующих фрактальные множества. Ниже мы произведем их краткую опись, частично следуя [31].

Фрактальная размерность D_F определяется как скейлинг количества $N_F(l)$ шаров радиуса l, требуемых, чтобы покрыть исследуемое множество при $l \to 0$.

$$N_F(l) \propto l^{-D_F}. \tag{27}$$

Очевидно, фрактальная размерность не превосходит размерности объемлющего пространства d. Объект называется фрактальным, если она меньше d.

Пусть объемлющее пространство разбито на d-мерные кубики со стороной l, из которых N_F покрывают наше множество. Наугад взятая точка из множества имеет разные вероятности оказаться в разных кубиках (очевидно, пропорционально их заполненности). Усредним q-ую степень этих вероятностей по всем кубикам и посмотрим, как полученная величина зависит от l. В случае общего положения зависимость будет степенной. Показатель степени связан с размерностью Реньи:

$$\langle p^q(l)\rangle = \sum_{i=1}^{N_F(l)} p_i^{q+1}(l) \propto l^{qd_{q+1}} \tag{28}$$

Если множество, размерность которого мы ищем, - аттрактор диссипативной динамической системы, то есть более удобный на практике способ найти тот же самый скейлинг. Рассмотрим M точек на траектории нашей системы, взятых через равные промежутки времени и окружим каждую шаром радиуса l. Усредним количество точек, попавших в один шар, в степени q.

$$\langle n^q(l)\rangle = \sum_{i=1}^{M} n_i^q(l) \propto l^{\phi(q)} \tag{29}$$

В предположении эргодичности системы мы можем заменить пространственное усреднение усреднением по ансамблю, поэтому $\phi(q) = qd_{q+1}$.

Размерность Реньи является обобщением фрактальной размерности, т.к. $d_0 = -\phi(-1) = d_F$.

Полагая $q = 1$ мы получаем еще одну важную характеристику статистики объекта $d_2 = \phi(1) = d_2$ - корреляционную размерность. Она является скейлингом с l вероятности того, что расстояние между двумя частицами меньше, чем l. Нетрудно понять, что $d_2 \leq d_F$

Удобный способ вычисления корреляционной размерности следует из ее связи с обобщенными Ляпуновскими экспонентами

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \ln \left\langle R^{-d_2}(t)\right\rangle = \Lambda(-d_2) = 0 \tag{30}$$

Основанный на этом метод вычисления корреляционной размерности для инерционных частиц в случайном потоке разработан в [32]. Наконец, разлагая две последние части определения (28) при $q \to 0$, получаем так называемую информационную размерность $d_I = d_1 = \phi'(0)$

$$\langle p(l) \ln p(l)\rangle \propto l^{d_I} \tag{31}$$

Размерности не доступны для непосредственного измерения, в отличие от Ляпуновских экспонент. Поэтому в [33] была введена так называемая Ляпуновская размерность d_L . Пусть сумма первых j Ляпуновских экспонент положительна, а первых $j+1$ - отрицательна. Тогда

$$d_L = j + |\lambda_{j+1}|^{-1} \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \tag{32}$$

Ее можно интерпретировать как размерность объектов, не меняющих свой d_L-мерный объем в среднем на больших временах. Действитительно, первая Ляпуновская экспонента отвечает за рост расстояния между двумя частицами, сумма первых двух - за рост площади, натянутой на два вектора, а сумма всех трех - за рост объема (и поэтому она равна 0 в несжимаемом поле скорости). Соотношение (32) линейно интерполирует эту зависимость и определяет размерность, на которой соответствующий инкремент роста равен 0.

Чтобы лучше понять, что говорит набор размерностей Реньи о системе, предположим, что фрактал является однородным. Тогда в (28) можно вынести q за знак усреднения и увидеть, что все размерности Реньи равны фрактальной размерности. Зависимость d_q от q свидетельствует о неоднородности фрактала, т.е. о так называемой "мультифрактальности".

Еще одной характеристикой фрактала является Хаусдорфова размерность. Определим сначала Хаусдорфову меру как нижняя грань величины $\sum_i r_i^d$ по всем покрытиям множества X шарами, а r_i — радиусы шаров покрытия. Тогда Хаусдорфова размерность - это нижняя грань таких чисел d, что d-мерная Хаусдорфова мера $C_H^d(X)$ рассматриваемого множества X равна нулю. Показано, что Ляпуновская размерность является точной верхней гранью Хаусдорфовой размерности.

Как сказано выше, размерность фрактального множества можно оценить с помощью Ляпуновской размерности, которая выражается через Ляпуновские экспоненты. В нашем двумерном случае $d = 1 + \lambda_1/|\lambda_2|$. Считая, что обе Ляпуновские экспоненты приобретают линейные поправки $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2$, находим дефицит размерности $\delta d = 2 - d$:

$$\delta d \approx \frac{\delta\lambda_2 - \delta\lambda_1}{\lambda}. \tag{33}$$

Поправку к первой Ляпуновской экспоненте мы найдем в нашей работе, а поправку ко второй - нет, но в конце раздела 5 покажем как это принципиально можно сделать.

4 Диффузия в сдвиговом потоке по действием теплового шума

Рассмотрим динамику расстояния R между двумя инерционными частицами, которые помещены в постоянный сдвиговый поток и подвержены действию случайной силы ξ, коротко-коррелированной во времени(например, теплового происхождения).

$$\tau\ddot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}} = \sigma\mathbf{R} + \xi \tag{34}$$

Мы рассматриваем двумерную задачу, и матрица градиентов скорости имеет вид $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Обезразмериваем время и интенсивность шира на τ: $t \to t/\tau,\ s \to s\tau$ Уравнение второго порядка для вектора из конфигурационного пространства можно заменить эквивалентным уравнением первого порядка в фазовом пространстве. Для этого введем вектор $Q = (x, y, v_x, v_y)$ и матрицу, описывающую его эволюцию

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \sigma & -1 \end{array}\right) \tag{35}$$

аналогично тому как матрица σ описывает эволюцию вектора $\mathbf{R}$ Тогда

$$\dot{\mathbf{Q}} = \Sigma\mathbf{Q} + \xi \tag{36}$$

Решение этого уравнения для каждой реализации шума ξ имеет явный вид

$$\mathbf{Q}(t) = \int\limits_0^t dt' W(t-t')\xi(t'), \tag{37}$$

где

$$W(t) = \exp{(\Sigma t)} = \begin{pmatrix} 1 & s(-1+t+e^{-t}) & 1-e^{-t} & s(2e^{-t}-2+t(1+e^{-t})) \\ 0 & 1 & 0 & 1-e^{-t} \\ 0 & s(1-e^{t}) & e^{-t} & s(e^{-t}+1-te^{-t}) \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{38}$$

Матрица корреляций "удвоенного"шума

$$M(t) = D\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \delta(t)\mathbf{1} \end{array}\right) \tag{39}$$

позволяет вычислить матрицу корреляций вектора Q

$$\langle Q_i(t)Q_j(t)\rangle = \left(\int\limits_0^t dt' W(t-t')M(t-t')W^T(t-t')\right)_{ij} \tag{40}$$

Используя для $W(t)$ явный вид (38), выписываем матрицу $\langle Q_i(t)Q_j(t)\rangle$ с точностью до членов порядка $O(e^{-t/\tau})$

$$D\begin{pmatrix} t+\frac{1}{3}s^2t^3-\frac{3}{2}-2s^2t^2+4s^2t-\frac{3}{4}s^2 & \frac{11}{4}s-2st+\frac{1}{2}st^2 & \frac{1}{2}+2s^2-2s^2t+\frac{1}{2}s^2t^2 & \frac{1}{4}s \\ \frac{11}{4}s-2st+\frac{1}{2}st^2 & t-\frac{3}{2} & -\frac{9s}{4}+st & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+2s^2-2s^2t+\frac{1}{2}s^2t^2 & -\frac{9s}{4}+st & \frac{1}{2}-\frac{11}{4}s^2+s^2t & \frac{1}{4}s \\ \frac{1}{4}s & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}s & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

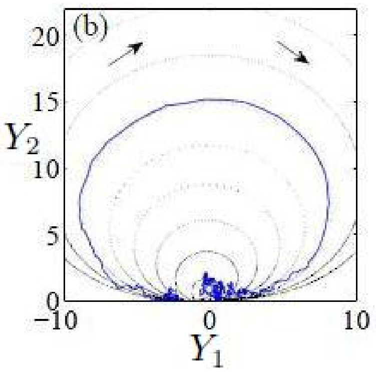

Рис. 2: Типичная динамика Y_1, Y_2 в изотропном случайном потоке [19]

.

Выпишем в явном виде моменты координат (все размерности восстановлены)

$$\begin{cases} \langle x^2 \rangle = Dt + \frac{1}{3}Ds^2t^3 - D\tau\left(\frac{3}{2} - s^2t^2\right) + 4D\tau^2s^2t - \frac{3}{4}D\tau^3s^2 + O\left(e^{-t/\tau}\right) \\ \langle y^2 \rangle = Dt - \frac{3}{2}D\tau + O\left(e^{-t/\tau}\right) \\ \langle xy \rangle = \frac{1}{2}Dst^2 - 2D\tau st + \frac{11}{4}D\tau^2 s + O\left(e^{t/\tau}\right) \end{cases} \tag{41}$$

5 Вычисление поправки к Ляпуновской экспоненте

В этом разделе мы вычислим поправку к Ляпуновской экспоненте. Мы построим систему стохастических уравнений, такую, что Ляпуновская экспонента будет даваться средним от одной из переменных. Соответствующее этой системе уравнение Фоккер-Планка мы сведем к уравнению Шредингера и будем строить в нем теорию возмущений по малой инерции. Нулевой порядок теории возмущений воспроизводит уравнение Фоккер-Планка в безинерционном пределе, соответствующее уравнениям Ланжевена (50). Следующие порядки теории возмущений дают поправки к функции распределения и соответственно поправки к Ляпуновской экспоненте.

Поскольку порядок уравнения (26) в два раза больше порядка безинерционного уравнения (6), то кроме переменных ϕ, ρ, входящих в систему (14), в систему входят $Y_1 = \dot{\rho}, Y_2 = \dot{\phi}$. Тогда (26) записывается так

$$\begin{cases} \tau\dot{Y}_1 = -Y_1 + \tau(Y_2^2 - Y_1^2) + s\sin\phi\cos\phi + \xi_1 \\ \tau\dot{Y}_2 = -Y_2 - 2\tau Y_1Y_2 - s\sin^2\phi + \xi_2 \\ \dot{\phi} = Y_2 \end{cases} \tag{42}$$

Как и в (14), изначально мультипликативный шум стал аддитивным. Это достигнуто ценой того, что уравнения стали нелинейными.

Совместная функция распределения величин ϕ, Y_1, Y_2, порождаемая уравнениями Ланжевена (42) удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка $\tau\partial_t P(\phi, Y_1, Y_2, t) = \hat{L}P(\phi, Y_1, Y_2, t)$, где оператор $\hat{L}$ имеет вид

$$\hat{L} = -\tau Y_2\partial_\phi + \partial_1\left(Y_1 - s\sin\phi\cos\phi + \frac{D}{\tau}\partial_1\right) + \partial_2\left(Y_2 + s\sin^2\phi + \frac{D}{\tau}\partial_2\right) + \\ + \tau\partial_1\left(Y_1^2 - Y_2^2\right) + 2\tau Y_1\partial_2 Y_2 \tag{43}$$

Мы ожидаем, что на больших временах $P(\phi, Y_1, Y_2, t)$ выходит на стационарное неравновесное решение, тогда как $\rho = \int dtY_1$ растет со стационарным инкрементом. Поэтому мы будем искать нулевые моды оператора $\hat{L}$. Для удобства вычислений по теории возмущений мы перейдем от уравнения Фоккера-Планка к уравнению Шредингера. Сделаем подстановку

$$P(\phi, x_1, x_2) = Q(\phi, x_1, x_2)\exp(-x_1^2/4 - x_2^2/4), \tag{44}$$

,где $x_1 = \sqrt{\tau/D}\left(Y_1 - s\sin\phi\cos\phi\right),\ x_2 = \sqrt{\tau/D}\left(Y_2 + s\sin^2\phi\right)$

Оператор $\hat{L}$ преобразуется в гамильтониан следующим образом

$$\hat{H} = -e^{(x_1^2+x_2^2)/4}\hat{L}e^{-(x_1^2+x_2^2)/4} = -\epsilon\Big[4x_1 - x_2^3/2 - x_1x_2^2/2 - x_2\partial_\phi + 2x_1x_2\partial_2 + (x_1^2 - x_2^2)\partial_1 + \\ +\alpha\left((4 - x_1^2 + 2x_1\partial_1)\frac{\sin 2\phi}{2} - \frac{x_1x_2}{2} + \phi^2\partial_\phi - 2\phi^2x_1\partial_2 + x_2\partial_1 + 2\phi^2x_2\partial_1\right)\Big] - \left(\Delta - \frac{x_1^2+x_2^2}{4} + 1\right),$$

где $\epsilon = \sqrt{D\tau},\ \alpha = s\sqrt{\tau/D}$. Мы предполагаем, что $\epsilon \ll 1$ и $\alpha\epsilon \ll 1$. Итоговый гамильтониан $\hat{H}$ соответствует двумерному гармоническому осциллятору с неэрмитовым возмущением. Выразим его через осцилляторные операторы рождения-уничтожения $\hat{a} = x/2 + \partial_x,\ \hat{a}^\dagger = x/2 - \partial_x$

$$\begin{cases} \hat{H}^{(0)} = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \\ \hat{H}^{(1)} = -\epsilon\left[-x_2\partial_\phi - a_1^\dagger a_1^2 - 2{a_1^\dagger}^2 a_1 - {a_1^\dagger}^3 + a_1^\dagger(a_2^2 - {a_2^\dagger}^2) - 2a_2^\dagger a_1(a_2 + a_2^\dagger)\right] \propto \sqrt{\tau} \\ \hat{H}^{(2)} = -\epsilon\alpha\left[2\sin 2\phi - a_1^\dagger a_2 + 2a_1a_2^\dagger\sin^2\phi + \sin^2\phi\partial_\phi - a_1^\dagger a_2^\dagger\cos 2\phi - x_1a_1^\dagger\sin 2\phi\right] \propto \tau \end{cases} \tag{45}$$

Ниже мы найдем поправки к волновой функции основного состояния, используя теорию возмущений по малому параметру ϵ. Заметим, что мы имеем дело с вырождением, т.к. $\hat{H}_0$ не затрагивает ϕ, и его волновые функции могут иметь произвольную угловую зависимость. Секулярное уравнение, определяющее правильную волновую функцию нулевого приближения, совпадает со стационарным уравнением Фоккера-Планка безынерционной задачи.

Мы ищем новое основное основное состояние в виде разложения по базису невозмущенных осцилляторных собственных функций

$$Q(x_1, x_2, \phi) = \sum_n f_n(\phi)|n\rangle. \tag{46}$$

Обозначим как $f_{nm}^{(k)}$ поправку kого порядка к функции $f(\phi)$, соответствующей осцилляторным числам заполнения n, m. Изходя из физического смысла, $f_{00} \sim 1$, а все остальные f_i малы по крайней мере как $O(\epsilon)$. Подставляя разложение (46) в уравнение Шредингера, получаем следующую систему уравнений:

$$\left(H_{nk} + E_k^{(0)}\delta_{nk}\right)f_k(\phi) = 0,\ E_k^{(0)} = k_1 + k_2 \tag{47}$$

Мы ввели обозначение $H_{nk} \equiv \langle n_1n_2|\hat{H}|k_1k_2\rangle$ для матричных элементов $\hat{H}$ между невозмущенными осцилляторными состояниями (заметим, что с точки зрения угловой динамики они действуют как дифференциальные операторы по ϕ).

Раскладывая систему (47) по ϵ последовательно порядок за порядком, мы можем найти f_n, соответствующие возбужденным состояниям, т.е. состояниям с $n_1 + n_2 > 0$.

$$\begin{cases} f_n^{(1)} = -\frac{H_{n0}^{(1)}}{E_n}f_{00}^{(0)}, \\ f_n^{(2)} = \left(-\frac{H_{n0}^{(2)}}{E_n} + \sum_k \frac{H_{nk}^{(1)}H_{k0}^{(1)}}{E_nE_k}\right)f_{00}^{(0)} \\ f_n^{(3)} = \left(\sum_k \frac{H_{nk}^{(2)}H_{k0}^{(1)} + H_{nk}^{(1)}H_{k0}^{(2)}}{E_nE_k} - \sum_{k,m}\frac{H_{nk}^{(1)}H_{km}^{(1)}H_{m0}^{(1)}}{E_nE_kE_m}\right)f_{00}^{(0)} - \frac{H_{n0}^{(1)}}{E_n}f_{00}^{(2)} \end{cases} \tag{48}$$

Здесь и в дальнейшем суммирование по индексам n, k, m происходит по всем собственным состояниям двумерного осциллятора, кроме основного.

Заметим, что $H^{(2)}$ меняет четность суммы осцилляторных квантовых чисел $n_1 + n_2$, а $H^{(1)}$ инвертирует ее, поэтому f_n с четным $n_1 + n_2$ имеют поправки только четного порядка по $\sqrt{\tau}$, и наоборот.

Разлагая (47) до второго порядка, мы получаем уравнение на правильную волновую функцию основного состояния f_{00}

$$H_{00}^{(2)}f_{00}^{(0)} = \frac{H_{0k}^{(1)}H_{k0}^{(1)}}{E_k}f_{00}^{(0)} \tag{49}$$

В это уравнение входят следующие ненулевые матричные элементы: $\langle 00|H|00\rangle = -\alpha\partial_\phi \sin^2\phi$ и $\langle 00|H|01\rangle = \langle 01|H|00\rangle = -\epsilon\partial_\phi$. Подставляя их в (49), получаем явный вид уравнения на $f_{00}^{(0)}$. Оно совпадает со стационарным уравнением Фоккера-Планка на угловую функцию в безынерционной динамике (14)

$$\partial_\phi(s\sin^2\phi + D\partial_\phi)f_{00}^{(0)} = 0. \tag{50}$$

Это уравнение было проанализировано в работе [21]. Нормированная функция распределения в области малых углов имеет вид $(s/D)^{1/3}F\left((s/D)^{1/3}\phi\right)$, где

$$F(\eta) = C\int\limits_0^\infty d\xi\exp(-\eta^3/3 - (\xi-\eta)^3/3),\ C = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)}{3^{5/6}} \tag{51}$$

Используя эту функцию распределения, можно показать, что безынерционная Ляпуновская экспонента $\lambda = s\langle\phi\rangle$ равна

$$\lambda = \frac{\sqrt{\pi}\,3^{1/3}}{\Gamma(1/6)}D^{1/3}s^{2/3}. \tag{52}$$

Для вычисления первой поправки к этому значению нам нужно найти $f_{00}^{(2)}$ (поправки нечетного порядка к f_{00} равны нулю). Для этого придется разложить (47) до 4ого порядка.

$$H_{00}^{(2)}f_{00}^{(2)} = -\left(\sum_{n,m}\frac{H_{0n}^{(1)}H_{nm}^{(2)}H_{m0}^{(1)} + H_{0n}^{(1)}H_{nm}^{(1)}H_{m0}^{(2)} + H_{0n}^{(2)}H_{nm}^{(1)}H_{m0}^{(1)}}{E_nE_m} - \sum_{n,m,k}\frac{H_{0n}^{(1)}H_{nm}^{(1)}H_{mk}^{(1)}H_{k0}^{(1)}}{E_nE_mE_k}\right)f_{00}^{(0)} \tag{53}$$

Используя явный вид гамильтониана, можно раскрыть оператор в правой части

$$-\tau^2\left(Ds\left(-\partial_\phi\sin 2\phi\partial_\phi + \partial_\phi\cos 2\phi - \partial_\phi\sin\phi\partial_\phi\sin\phi\partial_\phi\right) - D^2\left(2\partial_\phi^2 + \partial_\phi^4\right)\right) \tag{54}$$

Слагаемое со второй производной можно включить в перенормировку интенсивности флуктуаций $D : D' = D(1+2D\tau)$.

Разлагаем (53) при малых ϕ и ищем решение в форме $f_{00}^{(2)} = (s/D)^{1/3}F^{(2)}\left((s/D)^{1/3}\phi\right)$. В главном порядке по D/s уравнение принимает вид:

$$\left(\partial_\eta\eta^2 + \partial_\eta^2\right)F^{(2)}(\eta) = -\tau(Ds^2)^{1/3}\left(-\partial_\eta + \partial_\eta\eta\partial_\eta\eta\partial_\eta + 2\partial_\eta\eta\partial_\eta + \partial_\eta^4\right)F^{(0)}(\eta) \tag{55}$$

Нас интересует решение этого уравнения, не изменяющее общую нормировку, т.е $\int d\phi F^{(2)}(\phi) = 0$. Его явный вид:

$$F^{(2)}(\eta) = \tau(Ds^2)^{1/3}e^{-\eta^3/3}\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta_1 e^{\eta_1^3/3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\eta_2 e^{-\eta_2^3/3}\int\limits_{-\infty}^{\eta_2}d\eta_3 e^{\eta_3^3/3}\left(h(\eta_1) - h(\eta_3)\right), \tag{56}$$

где $h(\eta) = \left(1 - 3\eta\partial_\eta - \eta^2\partial_\eta - \partial_\eta^3\right)F^{(0)}(\eta)$

Наша цель в этом разделе - вычислить Ляпуновскую экспоненту. Она следующим образом выражается через средние от динамических переменных системы (42)

$$\langle Y_1\rangle = s\langle\phi\rangle + \sqrt{D/\tau}\langle x_1\rangle \tag{57}$$

Зная поправку (56) к угловой функции распределения, мы можем узнать, как сдвинулся средний угол

$$\langle\phi\rangle = \int dx_1dx_2d\phi\phi\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\right)Q(x_1,x_2,\phi) = \int\limits_0^{2\pi}\phi f_{00}(\phi)d\phi = \langle\phi\rangle_0 + \int\limits_0^{2\pi}\phi f_{00}^{(2)}(\phi)d\phi \tag{58}$$

$\delta\phi = (D/s)^{1/3}\int d\eta\eta F^{(2)}(\eta) = -C_1\tau(D^2 s)^{1/3}$, где

$$C_1 = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta\eta e^{-\eta^3/3}\int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta_1 e^{\eta_1^3/3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 e^{-\eta_2^3/3}\int\limits_{-\infty}^{\eta_2} d\eta_3 e^{\eta_3^3/3}\left(h(\eta_1)-h(\eta_3)\right)\approx 9.8 \qquad (59)$$

Таким образом, поправка к Ляпуновской экспоненте за счет изменения среднего угла $\delta\lambda_1 = s\delta\phi = -C_1\tau(Ds^2)^{2/3}$

Вторая поправка к Ляпуновской экспоненте связана с тем, что средней Y_1 больше не равен $s\langle\phi\rangle$, как это было в безынерционном случае.

$$\langle x_1\rangle = \int dx_1 dx_2 d\phi x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\right)Q(x_1,x_2,\phi) = \int f_{10}(\phi)d\phi \qquad (60)$$

Полные производные после интегрирования изчезают, поэтому поправки первого порядка $f_{10}^{(1)} \propto \partial_\phi f_{00}^{(0)}$ не вносят вклад в $\langle x_1\rangle$. Поправка второго порядка равна нулю, рассмотрим третий порядок (48):

$$f_{10}^{(3)} = -\left(\epsilon^2\alpha\partial_\phi\left(1+\frac{1}{2}\cos 2\phi\right)+\epsilon^2\alpha\sin 2\phi+\frac{2}{3}\epsilon^3\partial_\phi^2\right)f_{00}^{(0)} \qquad (61)$$

$$\langle x_1\rangle = -\epsilon^2\alpha\int d\phi\sin 2\phi f_{00}^{(0)}(\phi) \qquad (62)$$

$$\delta\lambda_2 = \sqrt{\frac{D}{\tau}}\langle x_1\rangle = -2Ds\tau\langle\phi\rangle = -2D\tau(Ds^2)^{1/3} \ll \delta\lambda_1 \qquad (63)$$

Видим, что поправкой за счет ненулевого $\langle x_1\rangle$ можно пренебречь по сравнанию с поправкой за счет изменения среднего угла.

Используя (52) , представим ответ в виде

$$\delta\lambda/\lambda = -\frac{C_1\Gamma^2(1/6)}{\pi 3^{2/3}}\lambda\tau \approx -46.5\lambda\tau \qquad (64)$$

Таким образом, мы вычислили линейную поправку к первой Ляпуновской экспоненте. Она отрицательна (как упоминалось во введении, это связано с неотрицательностью производства энтропии) и в главном порядке по D/s пропорциональна $\tau\lambda^2$. Отрицательность поправки к Ляпуновской экспоненте означает, что инерция частиц уменьшает интенсивность перемешивания.

Мы не вычисляем здесь вторую Ляпуновскую экспоненту, но скажем об этом пару слов. Аналогично тому, как сделано в [6], используем тот факт, что сумма первых двух Ляпуновских экспонент определяет рост площади треугольника, натянутого на два вектора:

$$\lambda_1+\lambda_2 = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln|[\delta r_1\times\delta r_2]| \qquad (65)$$

Тогда можно рассмотреть систему из трех частиц с радиус-векторами $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}$ и ввести вектора $R' = \mathbf{r_1}-\mathbf{r_3}$ и $R'' = \mathbf{r_2}-\mathbf{r_3}$. Каждый из них будет подчинятся уравнению (26). Переходя в полярную систему координат, получим две системы уравнений, аналогичные (42) на переменные $Y_1', Y_2', \rho', \phi', Y_1'', Y_2'', \rho'', \phi''$. Площадь треугольника, натянутого на вектора $\mathbf{R}', \mathbf{R}''$, будет выражаться как $S = 1/2R'R''\sin(\phi'-\phi'')$, а ее логарифмическая производная

$$\dot{S}/S = \dot{R}'/R' + \dot{R}''/R'' + \frac{Y_2'-Y_2''}{\phi'-\phi''}. \qquad (66)$$

Здесь мы считаем, что траектории r_1, r_2, r_3 еще не разошлись достаточно сильно, поэтому $|\phi'-\phi''| \ll 1$. Возьмем среднее от обеих частей. Слева, как следует из (65), получим сумму Ляпуновских экспонент.

$$\lambda_1+\lambda_2 = Y_1'+Y_1''+\left\langle\frac{Y_2'-Y_2''}{\phi'-\phi''}\right\rangle \qquad (67)$$

Первые два слагаемых мы уже знаем, а последнее - нет. Оно и представляет собой нетривиальную часть задачи о вычислении второй Ляпуновской экспоненты.

6 Седловое приближение для старших моментов

В предыдущем разделе мы вычислили Ляпуновскую экспоненту, которая определяется моментами расстояния с малым номером (20), а этом разделе мы вычислим λ_n - инкременты роста старших моментов расстояния (обобщенные Ляпуновские экспоненты).

$$\langle R^{2n}(t)\rangle \propto e^{\lambda_{2n}t},\ n \gg 1 \tag{68}$$

При вычислении мы будем пользоваться методом оптимальной флуктуации (инстантонным методом). Этот метод был разработан в [23] для нахождения функций распределения вероятности в задачах стохастической гидродинамики, см. также [34] и [35]. В работе [36] с его помощью найдены скейлинговые экспоненты структурных функций пассивного скаляра.

Инстантонный метод является бесконечномерным обобщениям метода перевала и состоит в следующем: мы предпологаем, что основной вклад в среднее от интересующей нас величины набирается в окрестности одной траектории, которая является стационарной для действия. Тогда искомое среднее пропорционально вероятности появления этой оптимальной траектории. Аналогия с конечномерным случаем делается явной, если записать среднее в виде функционального интеграла по траекториям. Пусть мы вычисляем моменты некоторой величины $X(t)$, которая имеет заданую плотность вероятности реализации траектории $\mathcal{P}[X] = \exp\left(-\mathcal{F}[X]\right)$

$$\langle X^n(t)\rangle = \int DX X^n(t) e^{-\mathcal{F}[X]} \tag{69}$$

По аналогии с конечномерным случаем, можно предположить, что основной вклад дают стационарные точки показателя, т.е. траектории, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\delta}{\delta X}\left(-\mathcal{F}[X] + n\ln X\right) = 0 \tag{70}$$

При этом нужно проверить, что показатель подынтегрального выражения достаточно быстро убывает (или осциллирует, в случае мнимой экспоненты) при удалении от оптимальной траектории. Часто на практике это реализуется при больших характерных временах и $n \gg 1$.

Нас будут интересовать моменты величины $R(t)$, которая выражается из решения системы (42) как $\exp\left(\int dt Y_1\right)$. Различные траектории этой системы соответствуют различным реализациям шума $\xi_1(t), \xi_2(t)$, поэтому

$$\langle R^{2n}(t)\rangle = \int D\xi_1 D\xi_2 R^{2n} \mathcal{P}[\xi_1]\mathcal{P}[\xi_1] \tag{71}$$

где $\mathcal{P}$ - это вероятностная мера для белого шума

$$\mathcal{P}[\xi] = \exp\left(-\frac{1}{2D}\int_0^t dt' \xi^2\right) \tag{72}$$

Поскольку в системе (42) шум выражается через переменные Y_1, ϕ, то в (71) можно перейти от интегрирования по траекториям шума $D\xi_1 D\xi_2$ к интегрированию по $DY_1 D\phi$.

$$\langle R^{2n}(t)\rangle = \int DY_1 D\phi e^{-S[Y_1,\phi]} \tag{73}$$

Действие получается подстановкой в (72) уравнений Ланжевена (42)

$$S[Y_1,\phi] = \int dt \left[\left(-\tau\dot{Y}_1 - Y_1 + \tau(\dot{\phi}^2 - Y_1^2) + s\sin\phi\cos\phi\right)^2 + \left(-\tau\ddot{\phi} - \dot{\phi} - 2\tau Y_1\dot{\phi} - s\sin^2\phi\right)^2\right] \tag{74}$$

Следуя методу оптимальной флуктуации, мы получим уравнения движения для оптимальной траектории, проварьировав действие (74). Решение этих уравнений $\phi^\star(t), Y_1^\star(t)$ подставим в действие, и в главном порядке среднее (73) будет пропорционально $\exp(-S[\phi^\star(t), Y_1^\star(t)])$ при больших временах для $n \gg 1$.

Для удобства, ниже мы проведем эту процедуру для несколько более общего вида уравнений Ланжевена, чем (42), что позволит потом рассматривать как инерционный, так и безинерционный случаи аналогично.

Рассмотрим следующую систему стохастических уравнений

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(\phi) + \xi_1 \\ \dot{\phi} = f_2(\phi) + \xi_2, \end{cases} \tag{75}$$

где шумы ξ_1, ξ_2 - случайные процессы с коррелятором

$$\langle \xi_1(t_1)\xi_j(t_2)\rangle = D\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2) \tag{76}$$

Выпишем соответствующее действие

$$S\left[\phi(t), Y_1(t)\right] = \frac{1}{2D}\int_0^t dt' \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) - 2n\rho =$$

$$= \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2D}\left(Y_1 - f_1(\phi)\right)^2 + \frac{1}{2D}\left(\dot{\phi} - f_2(\phi)\right)^2 - 2nY_1\right) \tag{77}$$

Проварьировав это действие по $\delta Y_1, \delta\phi$, получим уравнения движения и граничные условия

$$\begin{cases} Y_1 - f_1 = 2nD \\ \ddot{\phi} = f_2 \frac{\partial f_2}{\partial \phi} - 2nD\frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \left(\dot{\phi} - f_2(\phi)\right)|_{0,t} = 0 \end{cases} \tag{78}$$

В общем случае у действия (77) может быть больше одной стационарной траектории. Нас интересуют только те из них, на которых действие достигает минимального значения. В частности, это означает, что вторая вариация действия около искомой траектории должна быть положительна. Варьируя (77) два раза, получаем

$$\delta^2 S = \frac{1}{2D}\int dt (f_1^2 + f_2^2)''(\delta\phi)^2 \tag{79}$$

Поскольку это должно выполняться для любых малых вариаций $\delta\phi$, условие минимальности действия на траектории выглядит так:

$$(f_1^2 + f_2^2)'' > 0 \tag{80}$$

Второе уравнение в (78) можно интерпретировать как уравнение движения материальной точки в потенциале

$$U(\phi) = 2nDf_1(\phi) - f_2^2(\phi)/2, \tag{81}$$

при этом первый интеграл этого уравнения будет соответствовать сохраняющейся энергии

$$(\dot{\phi})^2/2 + U(\phi) = E \tag{82}$$

Отсюда мы получаем в неявной форме решение для оптимальной траектории $t = \int \frac{d\phi}{\sqrt{E - U(\phi)}}$, которое подставляем в действие

$$S = -\int_0^t dt' \left(-\frac{1}{2D}\left(f_2(\phi) - \sqrt{2E - 4nDf_1(\phi) + f_2^2(\phi)}\right)^2 + 2Dn^2 + 2nf_1\right) =$$

$$= \frac{1}{D}\int_0^t dt' \left(f_2^2(\phi) + 4nDf_1(\phi)\right) - 2Dn^2 t - \frac{1}{D}f_2(\phi)\phi|_0^t + Et/D$$

Используя выражение для потенциала (81), мы можем переписать интегральное слагаемое в последнем выражении как $2U(\phi) = 2E - \dot{\phi}^2$. Получаем следующее выражение для инкрементов роста λ_{2n} при произвольных f_1, f_2

$$\lambda_{2n} t = -\frac{1}{D} \int\limits_0^t dt' \dot{\phi}^2 + \frac{1}{D} f_2(\phi)\phi|_0^t + Et/D + 2Dn^2 t. \quad (83)$$

Теперь конкретизируем наши рассуждения применительно к безинерционному случаю, т.е. положим $\tau = 0$ в (42). Сравнивая (75) и (14), видим, что $f_1(\phi) = s \sin\phi \cos\phi, f_2(\phi) = -s \sin^2\phi$. Потенциал для соответствующий задачи о движении материальной точки имеет вид $U(\phi) = nDs \sin 2\phi - s^2 \sin^4 \phi/2$, а рост ρ определяется инкрементом

$$Y_1 = 2nD + s \sin\phi \cos\phi \quad (84)$$

Как мы увидим в дальнейшем, основные события будут разворачиваться вблизи его максимума $\phi_m = (nD/s)^{1/3}$. Граничные условия $\sin 2\phi(0) = \sin 2\phi(t) = \frac{E}{nDs}$ имеют два семейства решений

$$\phi(t) = \phi(0) + \pi n \quad (85)$$

$$\phi(t) = \pi/2 - \phi(0) + \pi n \quad (86)$$

Обе серии отвечают стационарным точкам действия, но первая серия соответствует минимумам, а вторая - максимумам. Действительно, условие минимальности действия (80) в нашем случае выглядит как $\cos 2\phi > 0$. Оно отбирает из двух серий решений только первую, если считать, что $\phi(0) < \pi/4$(на самом деле типичный начальный угол порядка $(D/s)^{1/3} \ll 1$, поэтому это предположение оправдано). Заметим, что если считать время прохождения t фиксированным, то все траектории из первой серии имеют одинаковое действие, не зависящее от количества проворотов n. Нас интересует поведение системы на больших временах, а значит большим должно быть время прохождения траектории $t \propto \ln(E - U(\phi_m))$. Это достигается, когда энергия, характеризующая оптимальную траекторию, экспоненциально близка к максимуму потенциала

$$E \approx U(\phi_m) = \frac{3}{2}(n^4 D^4 s^2)^{1/3}. \quad (87)$$

Первый член в (83) не растет со временем, что видно из следующей оценки сверху:

$$\int dt (\dot{\phi})^2 = \int d\phi \sqrt{2(E - U(\phi))} < \pi k \cdot 2 \max \Delta U(\phi). \quad (88)$$

Поэтому мы можем пренебречь им на фоне пропорциональных времени слагаемых. Поскольку наши траектории - полуцелые или целые провороты, то второе слагаемое в (83) обращается в ноль.

Итак, инкремент определяется исключительно энергией (а она, в свою очередь, максимумом потенциала)

$$\lambda_{2n} = \frac{3}{2}(n^4 D s^2)^{1/3} + 2n^2 D. \quad (89)$$

Мы воспроизвели ответ, полученный в [21]. Из него следует, в частности, что эффекты сдвигового течения (первое слагаемое) доминируют до $n \approx s/D$, а более старшие моменты забывают про него - происходит "изотропизация".

Теперь пойдем дальше и рассмотрим линейную по τ поправку к (89). Формально, порядок системы уравнений движения должен возрасти, но, поскольку высшие производные везде входят с малым параметром, то их можно выразить из безынерционного решения

$$\dot{\phi} = \sqrt{2(E - U_0(\phi))}, \ddot{\phi} = -U_0'(\phi) \quad (90)$$

и сохранить порядок уравнения. Инкремент по-прежнему определяется энергией. Она близка к максимуму потенциала, который, однако, изменился.

$$U(\phi_m) = U_0(\phi_m^{(0)} + \delta\phi) + \delta U(\phi_m^{(0)} + \delta\phi) = U_0(\phi_m) + \delta U(\phi_m^{(0)}) + O(\tau^2) \quad (91)$$

Выразим изменение потенциала через f_1, f_2:

$$\delta U = \delta\left(2nDf_1 - f_2^2/2\right) = 2nD\delta f_1 - f_2\delta f_2 \tag{92}$$

Из (42) получаем

$$\begin{aligned} \delta f_1 &= -\tau(Y_1^2 + \dot{Y}_1 - \dot{\phi}^2), \\ \delta f_2 &= -\tau(2Y_1\dot{\phi} + \ddot{\phi}). \end{aligned} \tag{93}$$

Все производные функции $\phi(t)$ здесь предполагаются выраженными через саму $\phi(t)$ при помощи (90).

Разберемся с величинами, входящими в выражения (94). Поскольку ϕ подчиняется уравнению $\ddot{\phi} = -U'(\phi)$, то в точке максимума потенциала $\ddot{\phi} = 0$. Поскольку мы предполагаем зазор между энергией и максимумом потенциала маленьким, а $\dot{\phi} = \sqrt{E - U(\phi)}$, то $\dot{\phi}$ тоже можно положить равной нулю в точке максимума потенциала. Подставляя значение $\phi_{max} = (nD/s)^{1/3}$ в (84), получаем значение Y_1 в точке максимума

$$Y_1 = 2nD + s(nD/s)^{1/3}. \tag{94}$$

Опять, первое слагаемое здесь порождается сдвигом, и доминирует над вторым, порождаемым изотропными флуктуациями, при $n \ll s/D$. Используя уравнение (84) и факт, что $\dot{\phi}(\phi_m) = 0$ заключаем, что в точке максимума потенциала $\dot{Y}_1 = 0$.

Собираем все вместе:

$\delta f_2(\phi_m) = 0$,

$\delta f_1(\phi_m) = -\tau(2nD + s(nD/s)^{1/3})^2$.

Таким образом, мы вычислили поправку к максимуму потенциала, которая и определяет искомую поправку к инкременту роста момента.

$$\delta\lambda_n = \delta E/D = 2n\tau(2nD + s(nD/s)^{1/3})^2 \approx -2n\tau(nDs^2)^{2/3} \tag{95}$$

Можно записать ответ в виде относительной поправки

$$\delta\lambda_n/\lambda_n = -\frac{4}{3}\tau(nDs^2)^{1/3} = -\frac{8}{9n}\tau\lambda_n \tag{96}$$

Заметим, что поправка (95) имеет более сильную зависимость от n, чем основной ответ (89). Однако, на всем интервале $n \ll s/D$ она остается много меньше основного ответа, поскольку мы предполагаем $s\tau \ll 1$.

7 Заключение

В этой работе мы начали изучать динамику инерционных частиц, погруженных в случайный поток со сдвиговой компонентой. Существенная часть информации об асимптотическом поведении системы заключена в статистике вектора $\mathbf{R}(t)$ между двумя частицами, например в обобщенных Ляпуновских экспонентах (22).

Мы вычислили линейные поправки к Ляпуновской экспоненте и к инкрементам роста старших моментов $\mathbf{R}$. Как и ожидалось, поправка к Ляпуновской экспоненте отрицательна и имеет относительный порядок $\tau\lambda$, где λ - безынерционная Ляпуновская экспонента. Поправка к инкременту роста nого момента имеет порядок $-n\tau(nDs^2)^{2/3}$, что означает, что относительная поправка $\delta\lambda_n/\lambda_n \sim -\tau\lambda_n/n$.

Теперь скажем немного о том, что предполагается делать в дальнейшем. Ляпуновские экспоненты дают возможность оценить размерность множества, на котором кластеризуются частицы, но для этого нужно вычислить вторую Ляпуновскую экспоненту (сумма которой с первой была равна нулю в безынерционном случае, а при учете инерции определяет отклонение размерности области, занимаемой частицами, от полной размерности пространства).

Мы рассмотрели случай, когда время отклика частицы много меньше и обратной силы флуктуаций, и обратного коэффициента сдвига $D\tau \ll s\tau \ll 1$, однако более интересным с физической точки зрения (и более сложным технически) является случай, когда время отклика частицы много больше, чем коэффициент шира $D\tau \ll 1 \ll s\tau$.

Метод, которым мы получили линейную поправку к Ляпуновской экспоненте, использует разложения в ряд теории возмущений по ϵ. В принципе, он позволяет получать поправки произвольного порядка и получать зависимость $\lambda(\epsilon)$ при конечном ϵ. Однако при при этом может стать существенным непертрубативный вклад, который невозможно получить, суммируя ряд теории возмущения. Работы [2, 17, 6, 19] подтверждают, что в изотропном случае такой вклад есть, и он связан с образованием каустик — сингулярностей поля скорости, при которых разные частицы, находящиеся в одной точке, могут иметь разную скорость. Описание явления в одномерном (сжимаемом) потоке и его вклад в моменты концентрации и расстояния между частицами можно найти в [37]. Пока неясно, играют ли каустики существенную роль в случае сдвигового течения.

Одно из важных допущений, сделаных в нашей работе, это пренебрежение корреляциями поля скорости жидкости во времени. Представляется важным вопрос, может ли конечное время корреляции скорости качественно изменить поведение системы.

Список литературы

[1] Sundby S., Fossum P., Feeding conditions of Arcto-Norwegian cod larvae compared with the Rothschild-Osborn theory on small-scale turbulence and planktoncontact rates, J. Plankton Res. 12 (1990) 1153-1162.

[2] G. Falkovich, A. Fouxon, M. G. Stepanov, Nature 419, 151-154 (12 September 2002) Acceleration of rain initiation by cloud turbulence

[3] G. Falkovich, M. Stepanov, M. Vucelja , Rain initiation time in turbulent warm clouds, Apllied Meteorology and Climatology 45, 591 (2006)

[4] J. R. Fessler, J. D. Kulick, and J. K. Eaton, Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow, Phys. Fluids 6, 3742 (1994)

[5] J. Bec, L. Biferale, G. Boffetta, M. Cencini, S. Musachchio, and F. Toschi, Lyapunov exponents of heavy particles in turbulence, Phys. Fluids 18, 091702 (2006)

[6] Unmixing in random flows, M. Wilkinson, B. Mehlig, S. Ostlund and K. P. Duncan Physics of fluids 19, 113303 (2007)

[7] M. R. Maxey, The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields, J. Fluid Mech. 174, 441 (1987)

[8] J.Bec , R.Chetrite. Toward a phenomenological approach to the clustering of heavy particles in turbulent flows New J. Phys. 9, 77, 2007.

[9] J. Sommerer, E. Ott, Particles floating on a random flow: A dynamically comprehensible physical fractal, Science 359, 334 (1993)

[10] R. H. Kraichnan, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, Phys. Fluids 11, 945-953 (1968)

[11] Falkovich G. , Gawedzki K. and Vergassola M., Particles and fields in fluid turbulence. Rev. Mod. Phys. 73 : 913–75 (2001)

[12] D.Ruelle, Entropy production in nonequilibrium statistical mechanics Commun. Math. Phys. 189,365-371

[13] Balkovsky E , Falkovich G , Fouxon A , Intermittent distribution of inertial particles in turbulent flows. Physical Review Letters 86 : 2790-2793 (2001)

[14] J. Bec, Multifractal concentrations of inertial particles in smooth random flows, J. Fluid Mech. 528, 255-277, 2005

[15] Wilkinson M., Mehlig B., Path coalescence transition and its applications Phys. Rev. E **68** 040101 (2003).

[16] Mehlig B., Wilkinson M., Coagulation by Random Velocity Fields as a Kramers Problem Phys. Rev. Lett. **92** 250602 (2004).

[17] Mehlig B., Wilkinson M., K. Duncan, T.Weber, and M.Ljunggren Aggregation of inertial particles in random flows Phys. Rev. E **72** 051104 (2005).

[18] J. Bec, M. Cencini, R. Hillerbrand, Heavy particles in incompressible flows: the large Stokes number asymptotics, Physica D 226 (2007) 11Ц22

[19] Bec J., Cencini M., Hillerbrand R., Turitsyn K. (2007). Stochastic suspensions of heavy particles. Physica D: Nonlinear Phenomena, 237(14-17)

[20] M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev, K. Turitsyn, Polymer statistics in a random flow with mean shear, J. Fluid Mech., 531, 251-260 (2005); cond-mat/0411705.

[21] Turitsyn K. S., Polymer dynamics in chaotic flows with a strong shear component, ZhETF **132** 746 (2007) [JETP **105** 655 (2007)].

[22] Ellis R., Entropy Large Deviations and Statistical Mechanics, Springer Verlag, 1985.

[23] Falkovich G., Kolokolov I., Lebedev V., and Migdal A., Instantons and Intermittency, Phys. Rev. E **54** 4896 (1996)

[24] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev, Statistics of a passive scalar advected by a large-scale two-dimensional velocity field: Analytic solution, Phys. Rev. E 51 (6), 5609-5627 (1995); cond-mat/9402062.

[25] A. Chernykh, V. Lebedev, Passive scalar transport in peripheral regions of random flows, Phys. Rev. E, submitted (2009); arXiv:0912.1695

[26] M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev, Strong effect of weak diffusion on scalar turbulence at large scales, Phys. Fluids, 19, 101703 (2007); arXiv:0706.2928.

[27] V.V. Lebedev, K.S. Turitsyn, Passive scalar evolution in peripheral regions, Phys. Rev. E 69, 036301 (2004) (11 pages); nlin/0309019.

[28] A. Celani, A. Puliafito, K. Turitsyn, Polymers in linear shear flow: A numerical study, Europhys. Lett., 70 (4), 464-470 (2005); nlin/0503029

[29] A. Puliafito, K. Turitsyn, Numerical study of polymer tumbling in linear shear flows, Physica D 211 (1-2), 9-22 (2005)

[30] K. J. Falconer, The Geometry of Fractal Sets. (1985)

[31] Paladin G., Vulpiani A. Anomalous scaling laws in multifractal objects. Physics Reports Review Section Of Physics Letters, 156(4), 147-225. (1987)

[32] Wilkinson M. Mehlig B., Gustavsson K. Correlation dimension of inertial particles in random flows. EPL (Europhysics Letters), 89(5), p. 50002.(2010)

[33] Kaplan and Yorke, Chaotic behavior of multidimensional difference equations Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points Lecture Notes in Mathematics, 1979, Volume 730/1979, 204-227

[34] В.В. Лебедев, Флуктуационные эффекты в макрофизике (курс лекций)

[35] V. Lebedev, Instantons in the theory of turbulence, Trends in Mathematics, 277-301, 1999

[36] Balkovsky E., Lebedev V., Instanton for Kraichnan passive scalar problem, Phys. Rev E **58** (1998)

[37] Derevyanko SA , Falkovich G , Turitsyn K , Turitsyn S , Lagrangian and eulerian descriptions of inertial particles in random flows. Journal of Turbulence, 8:1-18,(2007)