Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Дипломная работа
На степень магистра
Студента 6 курса
Тарнопольского Г. М.

Методы двумерной конформной теории поля в Двумерной квантовой гравитации и калибровочных теориях

Научные руководители
Белавин А. А.
Литвинов А. В.

Москва, 2011

Содержание

1 Введение

Конформные теории поля в двух измерениях [1, 2] представляют большой интерес, так как предлагают обилие примеров, в которых корреляционные функции могут быть вычислены точно. Взаимосвязь между конформными теориями и точно решаемыми решеточными моделями интенсивно исследуется. В тоже время методы Конформной теории поля находят применение в других областях теоретической физики. В последнее время внимание исследователей привлекает связь двумерной конформной теории поля с четырехмерными суперсимметричными калибровочными теориями [3] (так называемая АГТ гипотеза). В работе [4] было предложено доказательство этой гипотезы, опирающиеся на существование специального базиса в пространстве состояний конформной теории поля, обладающего рядом замечательных свойств. Было замечено, что данный базис диагонализует бесконечную систему интегралов движения, являющихся квантовыми аналогами интегралов движения некоторой классической интегрируемой системы.

Таким образом интересный вопрос, возникающий на этом этапе, касается связи классических интегрируемых систем с конформной теорией поля. Существование бесконечного набора полиномиальных сохраняющихся величин в инволюции друг к другу по отношению к определенным скобкам Пуассона есть одна из основных черт классических интегрируемых уравнений. Бесконечный набор интегралов движения есть краеугольный камень полной интегрируемости классических систем. Такая же ситуация возникает и на квантовом уровне. Поэтому естественный вопрос, который возникает, это сохраняется ли бесконечная симметрия в квантовом случае [5, 6]. А именно можем ли мы получить бесконечный набор квантовых интегралов движения, переходящих в классические в пределе $\hbar \to 0$ (где $\hbar$ константа Планка поделенная на 2π) или этого не произойдет в силу каких-либо аномалий, вызванных высокой нелинейностью взаимодействия. Обычно эта проблема исследуется в терминах обратной квантовой задачи рассеяния. Однако в этом подходе теоретико-полевые аспекты становятся сложно обозримыми, в силу сложной алгебраической структуры вычислений.

Исследования данного рода проводились со многими классическими интегрируемыми уравнениями, такими, например, как нелинейное уравнение Шредингера,

$$i\psi_t + \psi_{xx} - k\psi^+\psi\psi = 0$$

В этом случае явно построен бесконечный набор квантовых коммутирующих операторов (данные рассеяния) в терминах изначальных полевых операторов [7]. Также исследовались и другие солитонные теории [5], такие как уравнение Кортевега- де Фриза (КдФ)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ)

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0,$$

и уравнение Синус-Гордона (в калибровке светового конуса)

$$\partial_t \partial_x \phi + \frac{1}{\beta} \sin \beta\phi = 0$$

Последние три теории тесно связаны друг с другом. Прогресс был достигнут путем канонического квантования фурье-мод периодических полей, т.е. рассматривались периодические решения данных уравнений. Было доказано, что все данные теории в квантовом случае, также обладают бесконечным набором коммутирующих друг с другом квантовых интегралов движения [5], которые в классическом пределе ($\hbar \to 0$) переходят в соответствующие классические интегралы движения. Однако построить явную формулу для квантовых интегралов, и, что более важно, найти их собственные значения на вакууме не удалось. Дальнейший прогресс в этой области был сделан в серии работ [8–10], где задача о нахождении собственных чисел интегралов движения на вакууме решалась иным способом, а именно построением квантовой матрицы монодромии уравнения КдФ, и, как следствие, построением квантового T-оператора.

Недавно, в связи с появлением АГТ гипотезы [3], и пониманием ее структуры с точки зрения конформной теории поля [4], в обозрение попало другое интегрируемое уравнение, а именно так называемое уравнение Бенжамина-Оно$_2$. Это уравнение является матричным обобщением уравнения Бенжамина-Оно [11,12], построенным в работах [13–15]. Таким образом, появляется вопрос об изучении квантования простейшего интегрируемого уравнения, а именно уравнения Бенжамина-Оно.

В данном дипломе исследуется взаимосвязь между конформной теорией поля и квантово-полевой теорией уравнения Бенжамина-Оно. Показывается, что квантовое уравнение Бенжамина-Оно имеет бесконечное число коммутирующих интегралов движения. Эти интегралы движения есть не что иное, как правильно определенные интегралы движения квантовой тригонометрической модели Калоджеро-Сазерленда.

Собственные функции интегралов в данном случае есть полиномы Джека. Собственные значения даются простой формулой, и обладают определенной симметрией. На данном этапе исследования остается вопрос об определении спина данных квантовых интегралов движения. Сложность в данном случае обусловлена наличием нелокального оператора Гильберта, присутствующего в уравнении Бенжамина-Оно.

Стоит отметить, что квантовое уравнение Бенжамина-Оно и его связь с квантовой тригонометрической моделью Калоджеро-Сазерленда обсуждалась в работах [16, 17].

2 Классическое уравнение Бенжамина-Оно

Уравнение Бенжамина-Оно (БО) [11, 12] появляется при изучении длинных внутренних волн в слоистой жидкости (рис 1), для которой верны условия $h_2 \gg h_1$, $h_1 \ll \lambda \ll h_2$, и $a \ll h_1$, где h_1, h_2 —глубины первого и второго слоя соответственно, λ —длина волны, а a —амплитуда волны Это интегро-дифференциальное

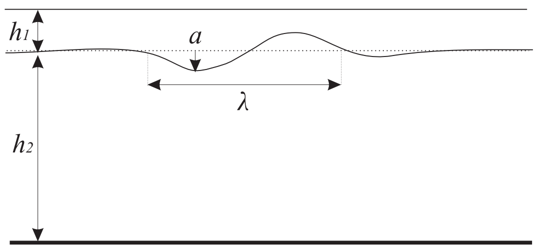

Рис. 1: Длинные волны на глубокой воде в слоистой жидкости

уравнение весьма интересно, своей близостью с уравнением Кортевега-де Фриза (КдФ). Как любое стандартное интегрируемое уравнение, уравнение БО обладает многими специальными свойствами. Среди них: преобразование Миуры, бесконечное число интегралов движения и мульти-солитонные решения.

Мы запишем уравнение БО в следующей нормировке

$$v_t + \frac{1}{2} v v_x + \frac{1}{8} H v_{xx} = 0, \tag{1}$$

где H означает преобразование Гильберта,

$$Hv(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(z)dz}{z - x}, \tag{2}$$

символ P означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Также предполагается, что поле $v(x,t)$ и все его пространственные производные стремятся к 0 достаточно быстро при $x \to \infty$. В дальнейшем для удобства мы будем обозначать действие преобразование Гильберта на функцию f, как f^H, следуя работе [16]. Преобразование Гильберта коммутирует с дифференциальными операторами, а также обладает свойствами

$$\begin{aligned}
&(f^H)^H = -f, \\
&f^H g^H = fg + (fg^H)^H + (gf^H)^H, \\
&\int_{\infty}^{\infty} (fg^H + gf^H) dx = 0, \\
&\int_{-\infty}^{\infty} f f^H dx = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Другие свойства преобразования Гильберта могут быть найдены в Приложении A. Уравнение БО обладает бесконечным числом интегралов движения [18–20], которые коммутируют друг с другом в смысле скобки Пуассона, задающейся следующим выражением

$$\{v(x), v(y)\} = \frac{1}{4} \delta'(x - y) \tag{4}$$

Одним из методов нахождения интегралов движения является преобразования Миуры, которое в случае уравнения БО записывается в виде [19]

$$2v = k(e^w - 1) + i(w_x)^+, \tag{5}$$

где действие проекционного оператора определяется как $f^+ = \frac{1}{2}(f - if^H)$. Раскладывая функцию w в уравнении (5) в ряд по параметру $k \to \infty$: $w = \frac{2w^{(1)}}{k} - \frac{2^2 w^{(2)}}{k^2} + ... + \frac{(-2)^{i+1} w^{(i)}}{k^i} + ...$ и выражая $w^{(i)}$ через поле v, получим интегральную плотность $w^{(i)} = G_i(v, v_x, v_x^H, ...)$. В свою очередь интеграл движения дается формулой $I_i = \int G_i dx$. Приведем пример первых 3 плотностей

$$
\begin{aligned}
&w^{(1)} = v,\\
&w^{(2)} = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} i v_x^+\\
&w^{(3)} = \frac{v^3}{3} + \frac{i}{2} v v_x^+ + \frac{1}{4} v_{xx}^+ - \frac{i}{2}(v v_x)^+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

а также первых 7 интегралов движения

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \int v dx,\\
&I_2 = \int \frac{v^2}{2} dx\\
&I_3 = \int \big(\frac{v^3}{3} + \frac{1}{4} v v_x^H\big) dx\\
&I_4 = \int \big(\frac{v^4}{4} + \frac{3}{8} v^2 v_x^H + \frac{1}{8}(v_x)^2\big) dx\\
&I_5 = \int \big(\frac{v^5}{5} + \big(\frac{1}{3} v^3 v_x^H + \frac{1}{8} v^2 (v^2)_x^H\big) + \big(\frac{1}{8} v (v_x^H)^2 + \frac{3}{8} v (v_x)^2\big) - \frac{1}{16} v_{xx} v_x^H\big) dx\\
&I_6 = \int \big(\frac{u^6}{6} + \big(\frac{5}{16} v^4 v_x^H + \frac{5}{24} v^3 (v^2)_x^H\big) + \frac{5}{32}\big(5v^2 (v_x)^2 + v^2 (v_x^H)^2 + v v_x^H (v^2)_x^H\big) - \frac{5}{32}\big(v_x^2 v_x^H + 2 v v_{xx} v_x^H\big) + \frac{(v_{xx})^2}{32}\big) dx\\
&I_7 = \int \big(\frac{v^7}{7} + \big(\frac{3}{10} v^5 v_x^H + \frac{3}{16} v^4 (v^2)_x^H + \frac{1}{12} v^3 (v^3)_x^H\big) + \big(\frac{11}{8} v^3 v_x^2 + \frac{3}{16} v^3 (v_x^H)^2 + \frac{3}{16} v^2 v_x^H (v^2)_x^H + \frac{1}{8} v v_x^H (v^3)_x^H +\\
&\quad + \frac{3}{64} v (v^2)_x^H (v^2)_x^H\big) + \big(\frac{3}{64} v v_x^H (v v_x^H)_x^H + \frac{1}{32} v (v_x^H)^3 - \frac{5}{8} v v_x^2 v_x^H - \frac{19}{32} v^2 v_{xx} v_x^H - \frac{7}{128} v_x^2 (v^2)_x^H - \frac{19}{128} v v_{xx} (v^2)_x^H\big) +\\
&\quad + \big(\frac{1}{8} v v_{xx}^2 + \frac{1}{16} v (v_{xx}^H)^2 - \frac{3}{64} v_{xx} (v_x^H)^2\big) + \frac{v_{xx} v_{xxx}^H}{64}\big) dx\\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Существует и другой способ получения интегралов движения для уравнения БО. Как для любого интегрируемого уравнения, для уравнения БО была построена задача рассеяния [18, 19] и выведено спектральное уравнение. Тем самым решена задача Коши для БО. Лаксовская пара записывается как [18]

$$
\begin{aligned}
&i\Phi_x^+ + \lambda(\Phi^+ - \Phi^-) = -v\Phi^+,\\
&i\Phi_t^\pm - 2i\lambda\Phi_x^\pm + \Phi_{xx}^\pm \mp 2iv_x^\pm \Phi^\pm = -\nu\Phi^\pm,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\Phi^+(x, t, \lambda)(\Phi^-)$ есть предел функции аналитической в верхней (нижней) z-полуплоскости, при $z \to x$. (λ — спектральный параметр, а ν — произвольная постоянная). Решение спектральной задачи приводит к формуле, позволяющей рекуррентно вычислять интегралы движения:

$$I_n = \int v R_{n-1}(x) dx, \tag{9}$$

где R_n подчиняется рекуррентному уравнению

$$R_n = \frac{i}{2}\frac{dR_{n-1}}{dx} + (vR_{n-1})^+, \tag{10}$$

с начальным условием $R_0 = 1$.

Заметим, что мы предполагали, что уравнение БО определенно на всей вещественной оси. На самом деле мы также могли бы рассматривать периодические решения $v(x, t) = v(x + 2\pi, t)$ уравнения БО. С этой точки зрения вид интегралов движения не изменяется. Преобразование Гильберта на окружности определяется как

$$f^H = \frac{1}{2\pi} P \int_0^{2\pi} f(y) \cot \frac{1}{2}(y-x) dy \tag{11}$$

В следующей главе мы рассмотрим солитонные решение уравнения БО, и их связь с моделью Калоджеро-Сазерленда. В этом случае обобщение решений на цилиндр также тривиально.

3 Связь классического уравнения Бенжамина-Оно с классической моделью Калоджеро-Сазерленда

Классическая модель Калоджеро-Сазерленда для N частиц с парным обратно квадратичным потенциалом взаимодействия, дается гамильтонианом

$$H_{CS} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \dot{a}_i^2 + \sum_{i\neq j}^{N} \frac{1}{(a_i - a_j)^2}, \tag{12}$$

где a_i —координаты частиц на прямой. Классические уравнения данной системы выражаются формулами

$$\ddot{a}_j = 2\sum_{i\neq j} \frac{1}{(a_j - a_i)^3} \tag{13}$$

Известно, что данная модель является интегрируемой Гамильтоновой системой. Уравнения движения (13) эквивалентны следющему Лаксовскому условию

$$L_t = [A, L], \tag{14}$$

где Лаксовская пара дается следующими формулами

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \delta_{ij}\dot{a}_j + \frac{i(1-\delta_{ij})}{a_i - a_j}, \\ A_{ij} &= -i\delta_{ij}\sum_{k\neq i} \frac{1}{(a_i - a_j)^2} + \frac{i(1-\delta_{ij})}{(a_i - a_j)^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь вернемся к уравнению БО. N-солитонный анзатц записывается в виде [21]

$$v^{(N)}(x,t) = \sum_j \frac{i}{x - a_j(t)} + \text{к.с.}, \tag{16}$$

где полюса $a_j(t)$ выбраны лежащими в верхней комплексной полуплоскости и также $a_j \neq a_k$ для $j \neq k$. Подставляя (16) в уравнение (1) получаем уравнения на $a_j(t)$

$$i\dot{a}_j = \sum_{k\neq j} \frac{1}{a_k - a_j} + \sum_k \frac{1}{a_j - a_k^*} \tag{17}$$

Здесь мы использовали то, что $\left(\frac{1}{x-a_j}\right)^H = \frac{i}{x-a_j}$. Решая получившиеся уравнения мы находим N-солитонное решение уравнения БО. Далее дифференцируя по времени уравнение (17) и производя некоторые алгебраические преобразования получим

$$\ddot{a}_j = 2\sum_{k\neq j} \frac{1}{(a_j - a_k)^3} \tag{18}$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением движения частиц в модели Калоджеро-Сазерленда. Таким образом устанавливается связь между классической моделью Калоджеро-Сазерленда и уравнением БО.

В случае периодических граничных условиях солитонный анзац для уравнения БО записывается в виде (период $L = 2\pi$)

$$v^{(N)}(x,t) = \sum_k i\cot(x - a_k(t)) + \text{к.с.}. \tag{19}$$

И соответствие устанавливается с тригонометрической классической моделью Калоджеро-Сазерленда.

4 Квантование уравнения Бенжамина-Оно: Канонический подход

Итак, мы рассматриваем уравнение Бенжамина-Оно

$$v_t + \frac{1}{2} v v_x + \frac{1}{8} v_{xx}^H = 0 \tag{20}$$

с периодическими граничными условиями с периодом 2π

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \tag{21}$$

Как мы уже отметили, явная форма интегралов движения I_n для периодического граничного условия такая же, как для обычного граничного условия ($v(x) \to 0$, при $|x| \to \infty$, где $-\infty < x < \infty$).

Классические интегралы движения находятся в инволюции:

$$\{I_n, I_m\} = 0, \quad n, m = 1, 2... \tag{22}$$

по отношению к скобки Пуассона, которая дается формулой

$$\{v(x), v(y)\} = \frac{\pi}{2} \delta'(x - y) \tag{23}$$

Выбирая второй интеграл $I_3 = \int \frac{dx}{2\pi} (\frac{v^3}{3} + \frac{v v_x^H}{4})$ как гамильтониан, мы получим уравнение БО как каноническое уравнение

$$v_t(x) = \{I_3, v(x)\} \tag{24}$$

Далее обсудим квантование классического уравнения БО. Здесь мы проводим наивное каноническое квантование. Каноническое квантование достигается путем замены скобок Пуассона на коммутационные соотношения

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j} \ \longrightarrow \ [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{i,j} \tag{25}$$

Таким образом коммутационные соотношения следующие из скобок Пуассона (23) запишутся как

$$[v(x), v(y)] = i\hbar \frac{\pi}{2} \delta'(x - y) \tag{26}$$

Как хорошо известно из двумерных квантовых теорий и из теории струн, коммутационные соотношения (26) реализуются с помощью свободного бозонного поля. Действительно, в классическом случае поле $v(x)$ раскладывалось в ряд Фурье:

$$v(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-inx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \tag{27}$$

и исходя из скобки Пуассона на поле $v(x)$ можно было заключить, что скобка Пуассона на Фурье-модах a_n равна

$$\{a_n, a_m\} = -\frac{in}{4} \delta_{n+m,0}, \tag{28}$$

откуда для квантового случая получаем хорошо известные бозонные коммутационные соотношения

$$[a_n, a_m] = \hbar \frac{n}{4} \delta_{n+m,0} \tag{29}$$

Мы интерпретируем a_m, при $m < 0$ ($m > 0$) как операторы рождения (уничтожения), а a_0 — как нулевую моду. Вакуумное состояние $|0\rangle$ определяется условием

$$a_m |0\rangle = 0, \quad m \geqslant 0 \tag{30}$$

Фоковское пространство строится из действия операторов рождения на вакуумное состояние.

Для того чтобы определить квантовую версию интегралов движения мы должны определить операторное упорядочение для $\hat{\mathbf{I}}_n$, $n = 1, 2, 3, ...$ Так как квантовые интегралы содержат произведение операторов $v, v_x^H, v_x, ...$ в одной точке пространства-времени, I_n в квантовой теории содержат большое количество расходимостей. Простейший способ избавится от них, это определить нормальное упорядочение для локальных плотностей, которое мы будем обозначать как : :. На языке бозонных операторов a_n, такое наивное нормальное упорядочение означает, что в выражении

$$: a_{n_1} a_{n_2} .... a_{n_k} : \tag{31}$$

операторы уничтожения ($n_i > 0$) стоят справа, а операторы рождения ($n_i < 0$) слева.

Итак мы будем обозначать за $\hat{\mathbf{I}}_n$ квантовый интеграл движения, соответствующий классическому I_n. Также квантовые интегралы должны удовлетворять основному свойству

$$[\hat{\mathbf{I}}_n, \hat{\mathbf{I}}_m] = 0, \quad n, m = 1, 2, ... \tag{32}$$

Мы предполагаем, что общая структура квантовых интегралов выглядит аналогично классическому случаю, в котором все локальные плотности есть операторы, коэффициенты при которых имеют квантовые поправки, и переходят в классические коэффициенты в классическом пределе $\hbar \to 0$.

Далее для удобства обозначим $\hbar = -b^2$, и сделаем замену $a_n \to iba_n$, получим, что $v(z) = ib\sum_n a_n e^{-inz}$, и бозоны коммутируют как

$$[a_n, a_m] = \frac{n}{4}\delta_{n+m,0} \tag{33}$$

Также введем оператор D по формуле

$$\mathrm{D}f(x) = H\frac{d}{dx}f = (f'(x))^H \tag{34}$$

Тогда первые 7 квантовых интегралов движения уравнения БО запишутся как ($Q = b + b^{-1}$)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{I}}_2 &= \int \frac{dz}{2\pi} \frac{: v^2 :}{2} \\
\hat{\mathbf{I}}_3 &= \int \frac{dz}{2\pi} \Big(\frac{: v^3 :}{3} + \frac{bQ}{4} : v\mathrm{D}v : \Big) \\
\hat{\mathbf{I}}_4 &= \int \frac{dz}{2\pi} \Big(\frac{: v^4 :}{4} + \frac{3bQ}{8} : v^2\mathrm{D}v : + \frac{1}{8}b^2(Q^2 - \frac{1}{2}) : v_z^2 : \Big) \\
\hat{\mathbf{I}}_5 &= \int \frac{dz}{2\pi} \Big(\frac{: v^5 :}{5} + bQ(\frac{1}{3} : v^3\mathrm{D}v : + \frac{1}{8} : v^2\mathrm{D}v^2 :) + \frac{b^2Q^2}{8} : v(\mathrm{D}v)^2 : + \frac{3b^2(Q^2 - \frac{2}{3})}{8} : vv_z^2 : - \\
&\quad - \frac{b^3Q(Q^2 - \frac{7}{6})}{16} : v_{zz}\mathrm{D}v : + \frac{b^3Q}{96} : v\mathrm{D}v : \Big) \\
\hat{\mathbf{I}}_6 &= \int \frac{dz}{2\pi} \Big(\frac{: v^6 :}{6} + bQ(\frac{5}{16} : v^4\mathrm{D}v : + \frac{5}{24} : v^3\mathrm{D}v^2 :) + \frac{25}{32}b^2(Q^2 - \frac{4}{5}) : v^2v_z^2 : + \frac{5}{32}b^2Q^2 : v^2(\mathrm{D}v)^2 : + \frac{5}{32}b^2Q^2 : v\mathrm{D}v\mathrm{D}v^2 : + \\
&\quad + \frac{5}{16}b^3Q(Q^2 - \frac{7}{6}) : vv_z\mathrm{D}v_z : + \frac{5}{96}b^3Q(Q^2 - \frac{1}{2}) : (\mathrm{D}v)^3 : + \frac{b^4}{32}(Q^4 - \frac{23}{12}Q^2 + \frac{1}{3}) : v_{zz}^2 : + \\
&\quad + \frac{5b^3Q}{192} : v^2\mathrm{D}v : + \frac{5}{384}b^4Q^2 : v_z^2 : \\
\hat{\mathbf{I}}_7 &= \int \frac{dz}{2\pi} \Big(\frac{: v^7 :}{7} + (\frac{3bQ}{10} : v^5\mathrm{D}v : + \frac{3bQ}{16} : v^4\mathrm{D}v^2 + \frac{bQ}{12} : v^3\mathrm{D}v^3 :) + \Big(\frac{11b^2(Q^2 - \frac{10}{11})}{8} : v_z^2v^3 : + \frac{3b^2Q^2}{16} : v^3(\mathrm{D}v)^2 : + \\
&\quad + \frac{3b^2Q^2}{16} : v^2\mathrm{D}v\mathrm{D}v^2 : + \frac{b^2Q^2}{8} : v\mathrm{D}v\mathrm{D}v^3 : + \frac{3b^2Q^2}{64} : v\mathrm{D}v^2\mathrm{D}v^2 : \Big) + \Big(\frac{3b^3Q^3}{64} : (v\mathrm{D}v)\mathrm{D}(v\mathrm{D}v) : + \frac{b^3Q^3}{32} : v(\mathrm{D}v)^3 - \\
&\quad - \frac{5b^3Q(Q^2 - \frac{17}{10})}{8} : vv_z^2\mathrm{D}v : - \frac{19b^3Q(Q^2 - \frac{23}{19})}{32} : v^2v_{zz}\mathrm{D}v : - \frac{7b^3Q(Q^2 - \frac{18}{7})}{128} : v_z^2\mathrm{D}v^2 : - \frac{19b^3Q(Q^2 - \frac{24}{19})}{128} : vv_{zz}\mathrm{D}v^2 : \Big) + \\
&\quad + \Big(\frac{b^4}{8}(Q^4 - \frac{33}{16}Q^2 + \frac{1}{2}) : vv_{zz}^2 : + \frac{b^4}{16}Q^2(Q^2 - \frac{13}{8}) : v\mathrm{D}v_z\mathrm{D}v_z : - \frac{3b^4}{64}Q^2(Q^2 - \frac{7}{6}) : v_{zz}(\mathrm{D}v)^2 : \Big) + \\
&\quad + \frac{b^5Q(Q^4 - \frac{163}{60}Q^2 + \frac{6}{5})}{64} : v_{zz}\mathrm{D}v_{zz} : + \frac{b^3Q}{32} : v^3\mathrm{D}v : + \frac{b^3Q}{64} : v^2\mathrm{D}v^2 : + \frac{3b^4Q^2}{128} : v(\mathrm{D}v)^2 : + \\
&\quad + \frac{7b^4Q^2}{128} : vv_z^2 : - \frac{3}{256}b^5Q(Q^2 - \frac{4}{9}) : v_{zz}\mathrm{D}v : + \frac{b^5Q(Q^2 - 4)}{1920} : v\mathrm{D}v : \Big) \\
&\quad \text{...}
\end{aligned} \tag{35}$$

Вычисление данных интегралов производилось на программе Mathematica 8.0. Мы могли бы проводить вычисления только используя свойство $[\hat{\mathbf{I}}_n, \hat{\mathbf{I}}_m] = 0$. Но в данном случае, мы действовали исходя из другого условия, которое будет описано ниже. Как мы и ожидали в классическом пределе, т.е при $b \to 0$, $Q \to b^{-1}$ данные интегралы совпадают с классическими, представленными в формуле (7).

5 Квантовая модель Калоджеро-Сазерленда на кольце

5.1 Общие сведения

Квантовая тригонометрическая модель Калоджеро-Сазерленда описывает систему нерелятивистских частиц на кольце длины L. Гамильтониан данной модели записывается как

$$\hat{H}_{CS} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i,j=1}^{N} \frac{g(g-1)}{\sin^2 \frac{\pi}{L}(q_i - q_j)}, \tag{36}$$

где g — константа связи. Данная модель была введена Сазерлендом в [22]. Основное состояние гамильтониана $\hat{H}_{CS}$ есть

$$\Delta_{CS}^{g} = \left(\frac{L}{\pi}\prod_{i,j=1}^{N} \sin\frac{\pi}{L}(q_i - q_j)\right)^g, \tag{37}$$

с энергией основного состояния $E_0 = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 g^2 (N^3 - N)$. При $g = 1$ основное состояние есть ни что иное, как вакуум свободных фермионов (детерминант Вандермонда).

Теперь сделаем замену координат $x_j = e^{2\pi i q_j / L}$. Будем искать возбужденные состояния в виде $P_\lambda(x)\Delta_{CS}^{g}$, где $P_\lambda(x)$ — симметричный полином от координат x_i. Тогда гамильтониан, действующий на $P_\lambda(x)$, запишется как

$$\Delta_{CS}^{-g}\hat{H}_{CS}\Delta_{CS}^{g} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \hat{H}_g + E_0, \tag{38}$$

где

$$\hat{H}_g = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + g\sum_{i,j=1}^{N}\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{39}$$

5.2 Собственные функции, Диаграммы Юнга и полиномы Джека

Собственные функции гамильтониана $\hat{H}_g$ называются в математической литературе полиномами Джека [23], $P_\lambda(x)$. Они зависят от диаграммы Юнга λ как от параметра. Диаграмма Юнга параметризованна числом квадратиков в каждом столбце, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$, где $\lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_N \geqslant 0$ (рис. 2). Длина $l(\lambda)$

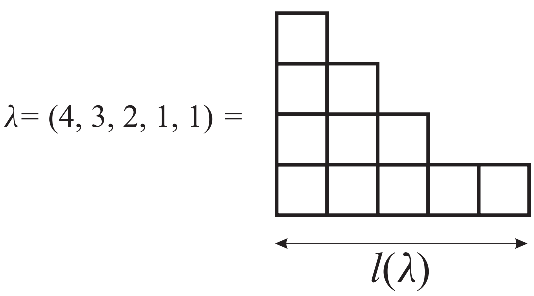

Рис. 2: Пример диаграммы Юнга

есть число ненулевых λ_i. Сопряженная диаграмма Юнга определяется как замена столбцов на строки, и обозначается как $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, ...)$. Общее число ячеек в диаграмме Юнга обозначается как $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. Если диаграмма Юнга λ имеет m_1 частей длинной 1, m_2 частей длинной 2 и так далее, то мы записываем это как $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}...)$. Для такого разбиения определим

$$z_\lambda = \prod_r r^{m_r} m_r! \tag{40}$$

На диаграммах Юнга можно вести операцию сравнения как

$$\lambda \geqslant \mu \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| = |\mu|, \quad \text{и} \quad \sum_i^r \lambda_i \geqslant \sum_i^r \mu_i, \quad \text{для всех} \quad r \geqslant 1. \tag{41}$$

Для каждой диаграммы Юнга (разбиения) можно ввести ввести следующий базис симметричных функций

(1) Симметричные мономы.

Для каждого разбиения λ моном x_λ определяется как $x_\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}....$ Симметричные мономы m_λ получаются из x_λ перестановкой всех x_i.

(2) Степенные суммы.

n-ая степенная сумма определяется как $p_n = \sum_i x_i^n$. Для каждого разбиения λ, p_λ определяется как $p_\lambda = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2}....$

Далее определим скалярное произведение на пространстве симметричных функций

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} g^{-l(\lambda)} z_\lambda, \tag{42}$$

тогда можно определить полиномы Джека $J_\lambda^{1/g}(x_1, ..., x_N)$ как

$$\begin{aligned} &(a) \quad P_\lambda^{1/g}(x_i) = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} v_{\lambda,\mu}(g) m_\mu \\ &(b) \quad \langle P_\lambda^{1/g}, P_\mu^{1/g} \rangle = 0, \quad \text{если} \quad \lambda \neq \mu \end{aligned} \tag{43}$$

где $v_{\lambda,\mu}(g)$ коэффициент. Приведем пример всех полиномов Джека до 4 уровня (т.е. $|\lambda| < 4$).

$$\begin{aligned} &P_{(1)}^{1/g}(\{p_n\}) = p_1 \\ &P_{(2)}^{1/g}(\{p_n\}) = \frac{p_2 + g p_1^2}{1+g} \\ &P_{(1,1)}^{1/g}(\{p_n\}) = -\frac{1}{2}(p_2 - p_1^2) \\ &P_{(3)}^{1/g}(\{p_n\}) = \frac{2p_3 + 3g p_2 p_1 + g^2 p_1^3}{(g+1)(g+2)} \\ &P_{(2,1)}^{1/g}(\{p_n\}) = \frac{(1-g)p_2 p_1 - p_3 + g p_1^3}{1+2g} \\ &P_{(3)}^{1/g}(\{p_n\}) = \frac{1}{6}p_1^3 + \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{2}p_2 p_1 \end{aligned} \tag{44}$$

Собственные значения гамильтониана $\hat{H}_g$ на полиномах Джека:

$$\begin{aligned} &\hat{H}_g P_\lambda^{1/g}(x) = \epsilon_{g,\lambda} P_\lambda^{1/g}(x) \\ &\epsilon_{g,\lambda} = \sum_{i=1}^N (\lambda_i^2 + g(N+1-2i)\lambda_i) \end{aligned} \tag{45}$$

Как любая интегрируемая система, модель Калоджеро-Сазерденда содержит бесконечную иерархию гамильтонианов. Построение такой иерархии мы рассмотрим ниже, также заметим, что оператор модели Калоджеро-Сазерленда явно зависит от числа частиц N, соответственно от числа частиц зависят и его собственные значения на полиномах Джека. В дальнейшем мы будем обсуждать вопрос о построении в иерархии гамильтонианов Калоджеро-Сазерленда операторов, не зависящих от числа частиц, т.е. таких, что их собственные значения на полиномах Джека не зависят от числа частиц. Этот вопрос также рассматривался в [28, 29].

5.3 Иерархия операторов Секигучи

Известно, что иерархию гамильтонианов модели Калоджеро-Сазерленда, можно построить из так называемых операторов Секигучи [24, 25], производящая функция которых дается выражением

$$D(u; g) = \frac{(-1)^{N(N-1)/2}}{|\Delta_N(x)|} \det \left[x_i^{N-j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + (N-j)g + u \right) \right]_{i,j=1}^N , \tag{46}$$

где

$$|\Delta_N(x)| = \det\Delta_N(x) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j) \tag{47}$$

— детерминант Вандермонда, g —константа связи и u —спектральный параметр. Также известна формула для собственных значений производящей функции $D(u,g)$ действующей на полиномы Джека:

$$D(u;g)P_\lambda^{(1/g)}(x) = \left[\prod_{i=1}^{N}(\lambda_i + (N-i)g + u)\right] P_\lambda^{(1/g)}(x), \tag{48}$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ —произвольная диаграмма Юнга. Раскладывая производящую функцию в ряд по параметру u, мы получим выражение

$$D(u,g) = u^n + \sum_{i=1}^{n} u^{n-i} H_i \tag{49}$$

в котором операторы H_i и есть операторы Секигучи. Приведем пример первых двух таких операторов

$$\begin{aligned} &H_1 = \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + g\frac{N(N-1)}{2}, \\ &H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + g\frac{N(N-1)}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - g\sum_{i\neq j}^{N} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{g^2}{24}N(N-1)N(N-2)(3N-1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{50}$$

Гамильтониан модели Калоджеро-Сазерленда (39) выражается через первые два оператора Секигучи по формуле

$$\hat{H}_g = H_1(H_1 - (N-1)g) - 2H_2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}g \tag{51}$$

Очевидно, что операторы Секигучи коммутируют с друг другом

$$[H_n, H_m] = 0, \quad n,m = 1,2,... \tag{52}$$

Операторы Секигучи изначально выражены через координаты $x_1, ..., x_N$, где N —соответствует количеству частиц на кольце в тригонометрической модели Калоджеро-Сазерленада. Ясно, что любой оператор Секигучи, являясь симметричным оператором, может быть переписан, через симметричные полиномы $p_k = \sum_i x_i^k$ и симметричные операторы $\nabla_k = k\frac{\partial}{\partial p_k}$. В дальнейшем мы попробуем переписать логарифм производящей функции операторов Секигучи $\mathcal{D}(u,g) = \ln D(u,g)$ через симметричные полиномы и операторы p_m и ∇_m.

5.4 Выражение операторов Секигучи через симметричные полиномы

Итак производящую функцию операторов Секигучи, можно записать в виде

$$D(u,g) = \frac{\prod_{i=1}^{N}(x_i\partial_i + u)|\Delta_N(x)|}{|\Delta_N(x)|}, \tag{53}$$

где для краткости введено обозначение $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, также мы подразумеваем, что когда оператор ∂_i действует на детерминант Вандермонда $|\Delta_N(x)|$, результат умножается на фактор g. Далее для дальнейшего упрощения введем переменные z_i по формуле $x_i = e^{z_i}$, тогда производящая функция запишется как

$$D(u,g) = u^N \frac{\prod_{i=1}^{N}(\frac{d_i}{u} + 1)|\Delta_N(x)|}{|\Delta_N(x)|}, \tag{54}$$

где $d_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$. Далее сделав замену $D(u,g) \to \frac{D(u,g)}{u^N}$, запишем выражение для $D(u,g)$ в виде

$$D(u,g) = \det\big(\Delta_N^{-1}(z)(\frac{\hat{D}}{u}+1)\Delta_N(z)\big), \tag{55}$$

где матричный оператор $\hat{D}$ есть матрица вида

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, \tag{56}$$

а $\Delta_N(x)$ —матрица Вандермонда. И также $\Delta_N^{-1}(x)\Delta_N(x) = 1_{N\times N}$. Затем мы можем получить для логарифма производящей функции операторов Секигучи следующее выражение

$$\mathcal{D}(u,g) = \ln D(u,g) = \operatorname{Tr}\ln\big(\Delta_N^{-1}(\frac{\hat{D}}{u}+1)\Delta_N\big) = \operatorname{Tr}\ln\big(1+\frac{1}{u}\Delta_N^{-1}\hat{D}\Delta_N\big), \tag{57}$$

здесь мы воспользовались известной формулой

$$\ln\det A = \operatorname{Tr}\ln A. \tag{58}$$

Теперь наши преобразования свелись к изучению матрицы $A = \Delta_N^{-1}\hat{D}\Delta_N$. Имеем в индексных обозначениях

$$A_{ij} = \Delta_{ik}^{-1} d_k \Delta_{kj} = g(i-1)\delta_{ij} + \Delta_{ik}^{-1}\Delta_{kj} d_k, \tag{59}$$

где мы использовали, что $d_k\Delta_{kj} = d_k e^{(j-1)z_k} = (j-1)\Delta_{kj}$. Далее мы используем, что операторы d_k можно переписать как

$$d_k = \sum_{m>0} x_k^m \nabla_m, \quad \text{где} \quad \nabla_m = m\frac{\partial}{\partial p_m}, \quad p_m = \sum_{i=1}^N x_i^m. \tag{60}$$

Таким образом матрица A равна сумме двух

$$A = g\Lambda + \sum_{m>0} O_m \nabla_m, \tag{61}$$

где

$$\Lambda_{ij} = (i-1)\delta_{ij}, \qquad O_{m,ij} = \Delta_{ik}^{-1} x_k^m \Delta_{kj} \tag{62}$$

Очевидно, что для матриц O_m верно равенство

$$O_m O_k = O_{m+k} \tag{63}$$

и также $O_0 = 1$. Далее легко показать, что матрицу O_1 можно записать в виде

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & (-1)^{N+1}e_N \\ 1 & \dots & 0 & 0 & (-1)^N e_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -e_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & e_1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

где $e_k(x_1,...,x_N)$ симметричные полиномы дающиеся производящей функцией

$$\sum_{k=1}^N (-1)^k e_k t^k = \prod_{i=1}^N (1-x_i t), \tag{65}$$

например $e_1 = \sum_i x_i$, $\ e_2 = \sum_{i,j} x_i x_j$, ... , $e_N = x_1 \cdot ... \cdot x_N$. Таким образом мы получаем, что для матрицы O_m верно

$$O_m = O_1^m \tag{66}$$

Далее можно вывести общую формулу для матрицы O_m, через симметричные полиномы e_k:

$$O_{m,ij} = \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1-i+j}} \frac{\sum_{k=0}^{N-i}(-1)^k e_k t^k}{\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e_k t^k} \tag{67}$$

Затем используем хорошо известную формулу для связи симметричных полиномов e_k с симметричными полиномами p_k

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e_k(x_1, ..., x_N)t^k = e^{-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m(x_1,...,x_N)t^m}{m}} \tag{68}$$

Заметим, что в правой части этого равенства стоит бесконечная сумма по индексу m, это не ошибка, дело в том, что данная формула учитывает, что число переменных x_i равно N, поэтому при разложении правой части данного равенства, все коэффициенты при степенях t, больших N будут тождественно равны нулю после переписывания p_m через x_i. Таким образом для матрицы O_m мы получаем

$$O_{m,ij} = \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1-i+j}} \sum_{k=0}^{N-i}(-1)^k e_k t^k \times \exp\big(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}\big) \tag{69}$$

Получим на основе этой формулы выражение для следа матрицы O_m (оно очевидно следует из формулы 62), имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}O_m = \sum_{i=1}^{N} O_{ii}(m) = \sum_{i=1}^{N}\oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1}} \sum_{k=0}^{N-i}(-1)^k e_k t^k \times e^{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}} = \\
= \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{N-i}(-1)^k e_k t^k \times e^{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}} = \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1}} \sum_{k=0}^{N}(-1)^k (N-k) e_k t^k \times e^{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}} = \\
= \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1}} e^{-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}} \big(N e^{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k e^{-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}}\big) = p_m
\end{aligned} \tag{70}$$

Таким образом резюмируя вычисления мы заключаем, что логарифм производящей функции для операторов Секигучи дается формулой

$$\mathcal{D}(u,g) = \mathrm{Tr}\ln(1 + \frac{1}{u}(g\Lambda + \sum_{m>0} O_m \nabla_m)), \tag{71}$$

где матрицы Λ и O_m равны

$$\Lambda_{ij} = (i-1)\delta_{ij}, \quad O_{m,ij} = \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1-i+j}} \sum_{k=0}^{N-i}(-1)^k e_k t^k \times \exp\big(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{p_l t^l}{l}\big) \tag{72}$$

Далее мы получаем, что операторы Секигучи (логарифмированные) выражаются как

$$\mathcal{D}(u,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\mathcal{H}_{k+1}}{k u^k}, \tag{73}$$

где

$$\mathcal{H}_k = \mathrm{Tr}(g\Lambda + \sum_m O_m \nabla_m))^{k-1} \tag{74}$$

Поэтому мы получаем (здесь подразумевается суммирование по индексам $m, k, ...$)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_2 = \mathrm{Tr}(O_m\nabla_m) + g\mathrm{Tr}\Lambda \\
&\mathcal{H}_3 = \mathrm{Tr}(O_m\nabla_m)^2 + 2g\mathrm{Tr}(\Lambda O_m)\nabla_m + g^2\mathrm{Tr}\Lambda^2 \\
&\mathcal{H}_4 = \mathrm{Tr}(O_m\nabla_m)^3 + 3g\mathrm{Tr}\Lambda(O_m\nabla_m)^2 + 3g^2\mathrm{Tr}(\Lambda^2 O_m)\nabla_m + g^3\mathrm{Tr}\Lambda^3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{75}$$

Для вычисления первых трех операторов Секигуи выраженных через симметричные полиномы, нам понадобятся формулы для вычисления следов от произведения матриц Λ и O_m. Из явной формулы для матрицы O_m можно получить следующие тождества

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}\Lambda O_m = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i+j=m} p_i p_j - m p_m\Big) + (N - \frac{1}{2}) p_m \\
&\operatorname{Tr}\Lambda^2 O_m = \frac{1}{3}\Big(\sum_{i+j+k=m} p_i p_j p_k - 3\sum_{i+j=m} i p_i p_j + m^2 p_m\Big) + (N - \frac{1}{2})\Big(\sum_{i+j=m} p_i p_j - m p_m\Big) + (N^2 - N + \frac{1}{6}) p_m \\
&\operatorname{Tr}\Lambda^3 O_m = \frac{1}{4}\Big(\sum_{i+j+k+l=m} p_i p_j p_k p_l - 6\sum_{i+j+l=m} i p_i p_j p_k + 4\sum_{i+j=m} i^2 p_i p_j + 3\sum_{i+j=m} i j p_i p_j - m^3 p_m\Big) + \\
&\quad + (N - \frac{1}{2})\Big(\sum_{i+j+k=m} p_i p_j p_k - 3\sum_{i+j=m} i p_i p_j + m^2 p_m\Big) + \frac{3}{2}(N^2 - N + \frac{1}{6})\Big(\sum_{i+j=m} p_i p_j - m p_m\Big) + N\big(N^2 - \frac{3}{2}N + \frac{1}{2}\big) p_m
\end{aligned}
$$

....

$$
\operatorname{Tr}\Lambda^l O_m = \oint_0 \frac{dt}{2\pi i t^{m+1}}\, e^{\sum_{i=1} \frac{p_i t^i}{i}} \Big(\sum_{s=1}^{N-k-1} s^l\Big)\Big|_{k=t\partial_t}\, e^{-\sum_{i=1} \frac{p_i t^i}{i}} \tag{76}
$$

а также тождества, учитывающие действие оператора ∇_m на матрицу O_k.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}(O_m \nabla_m) = p_m \nabla_m \\
&\operatorname{Tr}(O_m \nabla_m)^2 = p_{m+k} \nabla^2_{mk} + m p_m \nabla_m \\
&\operatorname{Tr}(O_m \nabla_m)^3 = p_{m+k+l} \nabla^3_{mkl} + 3m p_{m+k} \nabla^2_{mk} + m^2 p_m \nabla_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{77}
$$

Далее используя формулы (76) и (77) получим следующее выражение для первых трех операторов Секигучи в явном виде, выраженные через симметричные операторы p_m и ∇_m

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 &= \sum_{m>0} p_m \nabla_m + g\operatorname{Tr}\Lambda \\
\mathcal{H}_3 &= \Big(\sum_{m,k>0} p_{m+k} \nabla^2_{mk} + g\sum_{i+j=m} p_i p_j \nabla_m + (1-g)\sum_{m>0} m p_m \nabla_m\Big) + 2g(N - \frac{1}{2})\sum_{m>0} p_m \nabla_m + g^2 \operatorname{Tr}\Lambda^2 \\
\mathcal{H}_4 &= \Big(\sum_{m,k,l>0} p_{m+k+l} \nabla^3_{mkl} + \frac{3}{2} g \sum_{i+j=m+k} p_i p_j \nabla^2_{mk} + g^2 \sum_{i+j+k=m} p_i p_j p_k \nabla_m + 3(1-g)\sum_{m,k>0} m p_{m+k} \nabla^2_{mk} + \\
&\quad + \frac{3}{2} g \sum_{i+j=m} m p_i p_j \nabla_m - 3g^2 \sum_{i+j=m} i p_i p_j \nabla_m + (1 - \frac{3}{2} g + g^2)\sum_{m>0} m^2 p_m \nabla_m\Big) + \\
&\quad + 3g(N - \frac{1}{2})\Big(\sum_{m,k>0} p_{m+k} \nabla^2_{mk} + g\sum_{i+j=m} p_i p_j \nabla_m + (1-g)\sum_{m>0} m p_m \nabla_m\Big) + \\
&\quad + 3g^2(N^2 - N + \frac{1}{6})\sum_{m>0} p_m \nabla_m + g^3 \operatorname{Tr}\Lambda^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{78}
$$

и число $g^n \operatorname{Tr}\Lambda^n$ дается простой формулой

$$
g^n \operatorname{Tr}\Lambda^n = g^n \sum_{l=0}^{n} \frac{B_l C_n^l}{n+1-l} N^{n+1-l}, \tag{79}
$$

где B_l — числа Бернулли ($B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, ...$), а $C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!l!}$ — биномиальные коэффициенты.

Мы видим, что операторы Секигучи $\mathcal{H}_k$ явно зависят от числа частиц N, причем эта зависимость выражается в коэффициентах перед суммами по произведению операторов p_m и ∇_m. Сами же суммы также формально зависят от числа частиц, но эта зависимость спрятана внутри симметричных операторов p_m и ∇_m. Дальнейшее продвижение состоит в том, что мы постараемся определить новые интегралы движения $\mathbf{I}_k$, являющиеся линейной комбинацией операторов $\mathcal{H}_k$, в которых явная зависимость от числа частиц N будет исключена. Тогда формально такие интегралы движения можно рассматривать для бесконечного числа частиц, их явная форма в записи через операторы p_m и ∇_m при этом никак не изменится. Главное, что мы заметим далее, это то, что интегралы $\mathbf{I}_k$ после некоторых переопределений и при определенных значениях параметра g, будут являться квантовыми интегралами уравнения Бенжамина-Оно.

5.5 Переход к операторам не зависящим от числа частиц

Итак основная гипотеза, возникающая при взгляде на формулу (78), заключается в следующем определении независящих от числа частиц N интегралов движения $\mathbf{I}_k$

$$\mathcal{H}_2 = \mathbf{I}_2 + g\mathrm{Tr}\Lambda$$

$$\mathcal{H}_3 = \mathbf{I}_3 + 2g(N - \frac{1}{2})\mathbf{I}_2 + g^2\mathrm{Tr}\Lambda^2$$

$$\mathcal{H}_4 = \mathbf{I}_4 + 3g(N - \frac{1}{2})\mathbf{I}_3 + 3g^2(N^2 - N + \frac{1}{6})\mathbf{I}_2 + g^3\mathrm{Tr}\Lambda^3$$

$$\mathcal{H}_5 = \mathbf{I}_5 + 4g(N - \frac{1}{2})\mathbf{I}_4 + 6g^2(N^2 - N + \frac{1}{6})\mathbf{I}_3 + 4g^3(N^3 - \frac{3}{2}N^2 + \frac{1}{2}N)\mathbf{I}_2 + g^4\mathrm{Tr}\Lambda^4$$

$$\mathcal{H}_6 = \mathbf{I}_6 + 5g(N - \frac{1}{2})\mathbf{I}_5 + 10g^2(N^2 - N + \frac{1}{6})\mathbf{I}_4 + 10g^3(N^3 - \frac{3}{2}N^2 + \frac{1}{2}N)\mathbf{I}_3 + 5g^4(N^4 - 2N^3 + N^2 - \frac{1}{30})\mathbf{I}_2 + g^5\mathrm{Tr}\Lambda^5$$

....

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k=0}^{n-2} g^k C_{n-1}^k\, B_k(N)\, \mathbf{I}_{n-k} + g^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{B_l C_{n-1}^l}{n-l}N^{n-l}, \tag{80}$$

где $B_k(N)$ — многочлены Бернулли, дающиеся формулой

$$B_k(N) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l B_l C_k^l N^{k-l} \tag{81}$$

Очевидно, что интегралы $\mathbf{I}_k$ также коммутируют друг с другом

$$[\mathbf{I}_n, \mathbf{I}_m] = 0, \quad n, m = 1, 2, ... \tag{82}$$

Теперь обратим формулу (80), то есть выразим интегралы $\mathbf{I}_k$ через операторы $\mathcal{H}_k$

$$\mathbf{I}_2 = \mathcal{H}_2 - \frac{g}{2}N(N-1)$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathcal{H}_3 - 2g(N - \frac{1}{2})\mathcal{H}_2 + \frac{2g^2}{3}N(N-1)(N - \frac{1}{2})$$

$$\mathbf{I}_4 = \mathcal{H}_4 - 3g(N - \frac{1}{2})\mathcal{H}_3 + 3g^2(N^2 - N + \frac{1}{3})\mathcal{H}_2 - \frac{3g^3}{4}N(N-1)(N^2 - N + \frac{1}{3})$$

$$\mathbf{I}_5 = \mathcal{H}_5 - 4g(N - \frac{1}{2})\mathcal{H}_4 + 6g^2(N^2 - N + \frac{1}{3})\mathcal{H}_3 - 4g^3(N^3 - \frac{3}{2}N^2 + N - \frac{1}{4})\mathcal{H}_2 + \frac{4g^4}{5}N(N-1)(N^3 - \frac{3}{2}N^2 + N - \frac{1}{4})$$

$$\mathbf{I}_6 = \mathcal{H}_6 - 5g(N - \frac{1}{2})\mathcal{H}_5 + 10g^2(N^2 - N + \frac{1}{3})\mathcal{H}_4 - 10g^3(N^3 - \frac{3}{2}N^2 + N - \frac{1}{4})\mathcal{H}_3 + 5g^4(N^4 - 2N^3 + 2N^2 - N + \frac{1}{5})\mathcal{H}_2 + \\ + \frac{5g^5}{6}N(N-1)(N^4 - 2N^3 + 2N^2 - N + \frac{1}{5})$$

....

$$\mathbf{I}_n = \sum_{k=0}^{n-2}(-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(N)\mathcal{H}_{n-k} + \frac{(n-1)(-g)^{n-1}}{n}N(N-1)\tilde{B}_{n-2}(N), \tag{83}$$

где полиномы $\tilde{B}_k(N)$ даются простой формулой

$$\tilde{B}_k(N) = \frac{N^{k+1} - (N-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{C_k^l}{1+l}N^{k-l} \tag{84}$$

Далее мы докажем, что определенные по формуле (83) интегралы движения действительно не зависят от числа частиц N. Рассуждения к которым мы прибегаем очень просты: если мы покажем, что собственные значения интегралов $\mathbf{I}_k$ на полиномах Джека $P_\lambda^{1/g}(x)$ не зависят от числа частиц N, это и будет означать, что и сами интегралы также не зависят явно от числа частиц, так как полиномы Джека, как симметричные полиномы выражаются через полиномы p_m. Поэтому мы переходим к вопросу о нахождении собственных чисел интегралов движения $\mathbf{I}_k$ на полиномах Джека.

5.6 Собственные значения квантовых интегралов движения

Итак мы знаем, что собственные значения производящей функции операторов Секигучи $D(u,g)$ на полиномах Джека равны (здесь мы уже разделили на фактор u^N)

$$D(u,g)P_\lambda^{(1/g)}(x) = \big(\prod_{i=1}^{N}(1+\frac{\lambda_i+(N-i)g}{u})\big)P_\lambda^{(1/g)}(x) \tag{85}$$

Тогда для прологарифмированной производящей функции $\mathcal{D}(u,g)=\ln D(u,g)$ имеем

$$\mathcal{D}(u,g)P_\lambda^{(1/g)}(x) = \big(\sum_{i=1}^{N}\ln(1+\frac{\lambda_i+(N-i)g}{u})\big)P_\lambda^{(1/g)}(x) \tag{86}$$

Таким образом для самих логарифмированных операторов Секигучи получаем следующие собственные значения

$$\mathcal{H}_k P_\lambda^{(1/g)}(x) = h_k(\lambda)P_\lambda^{(1/g)}(x) = \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i+(N-i)g)^{k-1}P_\lambda^{(1/g)}(x) \tag{87}$$

Приведем первые несколько значений

$$h_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i + \frac{g}{2}N(N-1)$$

$$h_3(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\big(\lambda_i^2 - 2gi\lambda_i + 2gN\lambda_i\big) + \frac{g^2}{3}N(N-1)(N-\frac{1}{2})$$

$$h_4(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\big(\lambda_i^3 - 3gi\lambda_i^2 + 3g^2i^2\lambda_i - 6g^2Ni\lambda_i + 3gN\lambda_i^2 + 3N^2g^2\lambda_i\big) + \frac{g^3}{4}N^2(N-1)^2$$

$$\begin{aligned}h_5(\lambda) = &\sum_{i=1}^{N}\big(\lambda_i^4 - 4gi\lambda_i^3 + 6g^2i^2\lambda_i^2 - 4g^3i^3\lambda_i + 4gN\lambda_i^3 - 12g^2Ni\lambda_i^2 + 12g^3Ni^2\lambda_i + 6g^2N^2\lambda_i^2 - 12g^3N^2i\lambda_i + 4g^3N^3\lambda_i\big)+\\ &+\frac{g^4}{5}N(N-1)(N-\frac{1}{2})(N^2-N-\frac{1}{3})\end{aligned}$$

....

$$h_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i+(N-i)g)^{n-1} \tag{88}$$

Основываясь на этих формулах, можно вычислить собственные значения для первых интегралов $\mathbf{I}_k$ и предположить общую формулу. Имеем

$$i_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

$$i_3(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \big(\lambda_i^2 - 2g(i-1/2)\lambda_i\big)$$

$$i_4(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \big(\lambda_i^3 - 3g(i-\frac{1}{2})\lambda_i^2 + 3g^2(i^2-i+\frac{1}{3})\lambda_i\big)$$

$$i_5(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \big(\lambda_i^4 - 4g(i-\frac{1}{2})\lambda_i^3 + 6g^2(i^2-i+\frac{1}{3})\lambda_i^2 - 4g^3(i^3-\frac{3}{2}i^2+i-\frac{1}{4})\lambda_i\big)$$

$$i_6(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \big(\lambda_i^5 - 5g(i-\frac{1}{2})\lambda_i^4 + 10g^2(i^2-i+\frac{1}{3})\lambda_i^3 - 10g^3(i^3-\frac{3}{2}i^2+i-\frac{1}{4})\lambda_i^2 + 5g^4(i^4-2i^3+2i^2-i+\frac{1}{5})\lambda_i\big)$$

....

$$i_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2} (-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(i)\lambda_i^{n-1-k} \tag{89}$$

где полиномы $\tilde{B}_k(i)$ определены в формуле (84). Далее докажем, что общая формула для собственных значений (89) действительно следует из формулы (83). Имеем для интегралов $\mathbf{I}_n$ формулу

$$\mathbf{I}_n = \sum_{k=0}^{n-2} (-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(N)\mathcal{H}_{n-k} + \frac{(n-1)(-g)^{n-1}}{n} N(N-1)\tilde{B}_{n-2}(N) \tag{90}$$

и также собственные значения для операторов $\mathcal{H}_n$

$$h_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + (N-i)g)^{n-1} \tag{91}$$

Откуда собственные значения интегралов $\mathbf{I}_n$ равны

$$i_n = \sum_{k=0}^{n-2} (-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(N) \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + (N-i)g)^{n-1-k} + \frac{(n-1)(-g)^{n-1}}{n} N(N-1)\tilde{B}_{n-2}(N) \tag{92}$$

Вначале получим выражение для членов не зависящих от λ_i, имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2} (-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(N)((N-i)g)^{n-1-k} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2} (-g)^{n-1} C_{n-1}^k \tilde{B}_k(N)(-(N-i))^{n-1-k} = \\
&= (-g)^{n-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{k} \frac{C_{n-1}^k C_k^l}{1+l} (-1)^l N^{k-l} (-(N-i))^{n-1-k} = \\
&= -\frac{(n-1)(-g)^{n-1}}{n} N(N-1)\tilde{B}_{n-2}(N)
\end{aligned} \tag{93}$$

Затем получим выражение для оставшейся части суммы (мы исключаем из суммирование члены не зависящие от λ_i, так как они уже были учтены выше, это приводит к изменению пределов в некоторых суммах вычисляемых ниже)

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2}(-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(N)\sum_{m=0}^{n-2-k} C_{n-k-1}^m(\lambda_i - ig)^{n-k-1-m}(-1)^m(-Ng)^m =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{n-2}(\lambda_i - ig)^{n-1-s}(-g)^s \sum_{k=0}^{s}\tilde{B}_k(N) C_{n-1}^k C_{n-k-1}^{n-1-s}(-1)^{s-k}N^{s-k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{n-2} C_{n-1}^s(-g)^s(\lambda_i - ig)^{n-1-s}\sum_{k=0}^{s} C_s^k \tilde{B}_k(N)(-N)^{s-k} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{n-2} C_{n-1}^s(-g)^s(\lambda_i - ig)^{n-1-s}\frac{(-1)^s}{1+s} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{m=0}^{n-2-s} C_{n-1}^s(-g)^{s+m} C_{n-1-s}^{n-1-s-m} i^m \lambda_i^{n-1-s-m}\frac{(-1)^s}{1+s} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{n-2} C_{n-1}^s C_{n-1-s}^{n-1-r}\frac{(-1)^s}{1+s} i^r(-g)^r\lambda_i^{n-1-r} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{n-1}(-g)^r\lambda_i^{n-1-r} C_{n-1}^r \sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s C_r^s}{1+s} i^{r-s} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{n-1}(-g)^r C_{n-1}^r \lambda_i^{n-1-r}\tilde{B}_r(i) \tag{94}$$

В итоге получаем формулу для собственных значений интегралов $\mathbf{I}_n$

$$i_n(\lambda, g) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2}(-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(i)\lambda_i^{n-1-k} \tag{95}$$

что и доказывает наше утверждение. Далее можно увидеть, что данные собственные значения обладают интересным свойством симметрии при замене диаграммы Юнга на ее транспонированную

5.7 Симметрия собственных значений

Итак можно доказать следующее замечательное равенство

$$i_n(\lambda, g) = (-g)^{(n-2)} i_n(\lambda', g^{-1}) \tag{96}$$

Действительно, для любого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$ и его сопряженного $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, ...)$ мы имеем следующее очевидное соотношение

$$\sum_i i^n \lambda_i^m = \sum_j m\tilde{B}_{m-1}(j) S_n(\lambda'_j), \tag{97}$$

где

$$\tilde{B}_m(j) = \frac{j^{m+1} - (j-1)^{m+1}}{m+1}, \qquad S_n(\lambda'_j) = \sum_{i=1}^{\lambda'_j} i^n \tag{98}$$

мы использовли, что $\sum_{i=1}^{p}\tilde{B}_{m-1}(i) = \frac{p^m}{m}$. Следовательно можно получить другое полезное равенство

$$\sum_i \tilde{B}_n(i)\lambda_i^m = \sum_j m\tilde{B}_{m-1}(j)\frac{(\lambda'_j)^{n+1}}{n+1}, \tag{99}$$

мы использовали, что $S_{\tilde{B}_n(i)}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Далее используя эти равенства, получаем ряд равенств для собственных значений интегралов $\mathbf{I}_n$

$$\begin{aligned}
i_n(\lambda,g) &= \sum_i \sum_{k=0}^{n-2} (-g)^k C_{n-1}^k \tilde{B}_k(i)\lambda_i^{n-1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-g)^k C_{n-1}^k \sum_j (n-1-k)\tilde{B}_{n-2-k}(j)\frac{(\lambda'_j)^{k+1}}{k+1} = \\
&= \sum_j \sum_{m=0}^{n-2} (-g)^{(n-2-m)} C_{n-1}^{n-2-m} \frac{1+m}{n-1-m}\tilde{B}_m(j)(\lambda'_j)^{n-1-m} = \\
&= (-g)^{n-2} \sum_j \sum_{m=0}^{n-2} (-g)^{-m} C_{n-1}^m \tilde{B}_m(j)(\lambda'_j)^{n-1-m} = (-g)^{n-2} i_n(\lambda', g^{-1})
\end{aligned} \tag{100}$$

Таким образом равенство доказано. Далее мы перейдем к рассмотрению связи интегралов $\mathbf{I}_n$ с квантовыми интегралами уравнения Бенжамина-Оно. Как мы уже и сказали по сути $\mathbf{I}_n$ и являются иерархией интегралов БО.

6 Вычисление первых квантовых интегралов Бенжамина-Оно через операторы Секигучи

Итак для первых трех интегралов $\mathbf{I}_k$ получаем из формулы (80) и (78) следующие выражения

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_2 &= \sum_{m>0} p_m \nabla_m \\
\mathbf{I}_3 &= \sum_{m,k>0} p_{m+k}\nabla^2_{mk} + g\sum_{i+j=m} p_i p_j \nabla_m + (1-g)\sum_{m>0} m p_m \nabla_m \\
\mathbf{I}_4 &= \sum_{m,k,l>0} p_{m+k+l}\nabla^3_{mkl} + \frac{3}{2}g \sum_{i+j=m+k} p_i p_j \nabla^2_{mk} + g^2 \sum_{i+j+k=m} p_i p_j p_k \nabla_m + 3(1-g)\sum_{m,k>0} m p_{m+k}\nabla^2_{mk} + \\
&\quad + \frac{3}{2}g\sum_{i+j=m} m p_i p_j \nabla_m - 3g^2 \sum_{i+j=m} i p_i p_j \nabla_m + (1-\frac{3}{2}g+g^2)\sum_{m>0} m^2 p_m \nabla_m.
\end{aligned} \tag{101}$$

Далее пусть $g=-b^2$, и перепишем операторы p_n и ∇_m, через бозонные операторы a_{-n} и a_m по формулам

$$p_n = \frac{2i}{b}a_{-n}, \quad \nabla_m = -2iba_m, \tag{102}$$

тогда бозонные операторы коммутируют как

$$[a_n, a_m] = \frac{n}{4}\delta_{n+m,0}, \tag{103}$$

здесь мы использовали то, что $[\nabla_n, p_m] = n\delta_{n+m,0}$. Теперь интегралы $\mathbf{I}_k$ из формулы (101) перепишутся в терминах бозонных операторов по формулам ($Q = b + b^{-1}$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_2 =& 4\sum_{m>0} a_{-m}a_m \\
\mathbf{I}_3 =& -8ib\big(\sum_{m,k>0} a_{-m-k}a_m a_k + \sum_{i+j=m} a_{-i}a_{-j}a_m + \frac{iQ}{2}\sum_{m>0} m a_{-m}a_m\big) \\
\mathbf{I}_4 =& -16b^2\big(\sum_{m,k,l>0} a_{-m-k-l}a_m a_k a_l + \frac{3}{2}\sum_{i+j=m+k} a_{-i}a_{-j}a_m a_k + \sum_{i+j+k=m} a_{-i}a_{-j}a_{-k}a_m + \\
&+ \frac{3}{2}iQ(\sum_{m,k>0} m a_{-m-k}a_m a_k + \sum_{i+j=m} i a_{-i}a_{-j}a_m) - \frac{1}{4}(Q^2-\frac{1}{2})\sum_{m>0} m^2 a_{-m}a_m\big) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{I}_N =& 4(-2ib)^{N-2}\big(\sum_{i_1\ldots i_{N-1}>0} a_{-i_1-\ldots-i_{N-1}}a_{i_1}\ldots a_{i_{N-1}} + \ldots\big)
\end{aligned} \tag{104}$$

Таким образом можно увидеть, что если ввести поле $v(z) = ib\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} a_n e^{-inz}$, то интегралы в формуле (104) могут быть переписаны в виде интегралов от нормально упорядоченных локальных плотностей

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_2 =& -\frac{4}{b^2}\int \frac{dz}{2\pi}\frac{:v^2:}{2} \\
\mathbf{I}_3 =& \frac{8}{b^2}\int \frac{dz}{2\pi}\Big(\frac{:v^3:}{3} + \frac{bQ}{4} :v\mathrm{D}v:\Big) \\
\mathbf{I}_4 =& -\frac{16}{b^2}\int \frac{dz}{2\pi}\Big(\frac{:v^4:}{4} + \frac{3bQ}{8} :v^2\mathrm{D}v: + \frac{1}{8}b^2(Q^2 - \frac{1}{2}) :v_z^2:\Big), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{105}
$$

где D —оператор определенный в формуле (34). Как мы видим данные интегралы совпадают с точностью до коэффициента с квантовыми интегралами уравнения Бенжамина-Оно приведенными в формуле (35), таким образом **основная гипотеза** заключается в том, что иерархия квантовых интегралов Бенжамина-Оно дается формулой

$$
\hat{\mathbf{I}}_n = \frac{(-1)^{n+1}b^2}{2^n}\mathbf{I}_n, \tag{106}
$$

где в свою очередь интегралы $\mathbf{I}_n$ выражаются через операторы Секигучи по формуле в (83). Таким образом полиномы Джека, выраженные в терминах бозонов по формуле (102), являются собственными состояниями квантовых интегралов Бенжамина-Оно. Причем собственные значения квантовых интегралов Бенжамина-Оно на полиномах Джека даются формулой

$$
\hat{\mathbf{I}}_n \cdot P_\lambda^{-1/b^2}(\{a_{-n}\})|0\rangle = \hat{i}_n(\lambda, b)\cdot P_\lambda^{-1/b^2}(\{a_{-n}\})|0\rangle, \tag{107}
$$

где

$$
\hat{i}_n(\lambda, b) = \frac{(-1)^{n+1}b^2}{2^n} i_n(\lambda, b) = \frac{(-1)^{n+1}b^n}{2^n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-2} b^{2k-(n-2)} C_{n-1}^k \tilde{B}_k(i)\lambda_i^{n-1-k} \tag{108}
$$

Такие собственные значения обладают в свою очередь симметрией вида

$$
b^{-n}\hat{i}_n(\lambda, b) = b^n\hat{i}_n(\lambda', b^{-1}). \tag{109}
$$

Следующий важный вопрос касающийся данных интегралов движения, состоит в построении таких квантовых интегралов движения, которые имеют определенный спин. То есть таких интегралов, которые являясь интегралами от локальных плотностей обладают определенным законом преобразования при конформных отображениях. Данный вопрос на самом деле тесно связан с определением правильного нормального упорядочения локальных плотностей, живущих на цилиндре. В следующей главе мы обсудим разные способы таких нормальных упорядочений для локальных плотностей. Однако в нашей задаче благодаря оператору Гильберта, в интегралах движения содержатся нелокальные плотности, т.к сам оператор Гильберта является нелокальным интегральным оператором. По этому обычный способ определить нормальное упорядочение наталкивается на ряд трудностей, которые на сегодняшний момент не преодолены.

7 Нормальное упорядочение на цилиндре

7.1 Вычисление поправок к локальным плотностям

В данной главе мы рассмотрим процедуру расчета нормального упорядочения локальных плотностей, следующих из операторного разложения двух локальных полей, живущих на цилиндре. Итак рассмотрим два локальных оператора $A(z)$ и $B(z)$ заданных фурье-разложением в виде

$$
A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-inz}, \quad B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-inz} \tag{110}
$$

Тогда их нормальное упорядочение $:A(z)B(z):$ определяется как

$$
:A(z)B(z): \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_z}\frac{\mathcal{T}(A(w)B(z))}{w-z}dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Lambda_n e^{-inz} \tag{111}
$$

где контур $\mathcal{C}_z$ охватывает точку z (рис. 3), а символ $\mathcal{T}$ означает хронологическое упорядочение

$$\mathcal{T}(A(w)B(z)) = \begin{cases} A(w)B(z), & \text{если} \quad \Im(z) > \Im(w) \\ B(z)A(w), & \text{если} \quad \Im(z) < \Im(w) \end{cases} \tag{112}$$

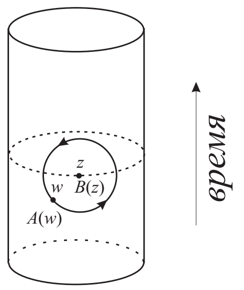

Рис. 3: Нормальное упорядочение на цилиндре

Заметим, что операция :: в данном случае не коммутативна, т.е

$$: A(z)B(z) : \neq : B(z)A(z) : . \tag{113}$$

Также мы предполагаем последовательное применение нормального упорядочения в случае более двух операторов

$$: A(z)B(z)C(z) : \stackrel{\text{def}}{=} : A(z)(: B(z)A(z) :) : . \tag{114}$$

Далее из определения нормального упорядочения (111) следует, что

$$\Lambda_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inz} : A(z)B(z) : dz = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_z} e^{inz}\frac{\mathcal{T}(A(w)B(z))}{w-z}dwdz. \tag{115}$$

Для того чтобы вычислить данное выражение, нужно переписать непериодический множитель $\frac{1}{w-z}$, через периодические, по формуле

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{2}\cot\big(\frac{w-z}{2}\big) - 2c_1\sin(w-z) - 2c_2\sin 2(w-z) - ... - 2c_N\sin N(w-z) + O((w-z)^{2N+1}) \tag{116}$$

где коэффициенты $c_1, ..., c_N$ определяются единственным образом. Целое число N в (116) должно быть выбрано таким образом, что $2N+1 \geqslant p$, где p степень максимально сингулярности, возникающей в операторном разложении

$$A(w)B(z) = \frac{\mathcal{O}}{(w-z)^p} + ... \tag{117}$$

В этом случае, можно сделать замену $(w-z)^{-1} \to \chi_N(w-z)$, где

$$\chi_N(w-z) = \frac{1}{2}\cot\big(\frac{w-z}{2}\big) - 2\sum_{q=1}^{N} c_q \sin q(w-z) \tag{118}$$

и тогда мы получим

$$\Lambda_n = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_z}\chi_N(w-z)\mathcal{T}(A(w)B(z))dwdz \tag{119}$$

Далее используем факт

$$\int\limits_0^{2\pi}\oint_{\mathcal{C}_z} dwdz = \underset{\Im(w)<\Im(z)}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}} dwdz - \underset{\Im(w)>\Im(z)}{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}} dwdz, \tag{120}$$

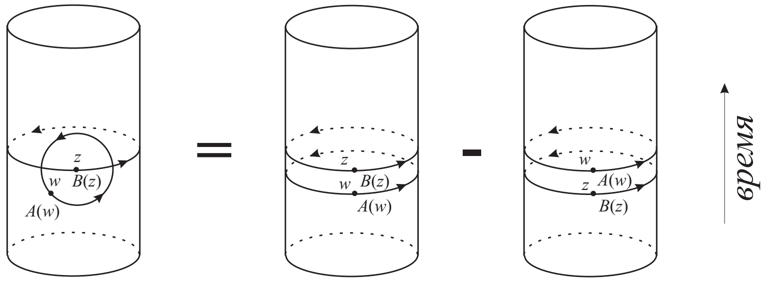

Рис. 4: Графическое изображение равенства (120)

который графически изображен на (рис. 4) В итоге мы получаем следующую формулу

$$\Lambda_n = \frac{1}{4\pi^2 i} \underset{\Im(w)<\Im(z)}{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}} \big(e^{inz}A(w)B(z) + e^{inw}B(w)A(z)\big)\chi_N(w-z)dwdz \tag{121}$$

Далее для функции $\chi_N(w-z)$ имеем следующее разложение

$$-i\chi_N(w-z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik(z-w)} + 2i\sum_{q=1}^{N} c_q \sin q(w-z) \tag{122}$$

Подставляя (122) в (121) получим основную формулу для расчета нормального упорядочения на цилиндре

$$\Lambda_n = \frac{1}{2}(A_0B_n + B_nA_0) + \sum_{k>0}(A_{-k}B_{n+k} + B_{n-k}A_k) + \sum_{q=1}^{N} c_q\big([A_q, B_{n-q}] + [B_{n-q}, A_{-q}]\big). \tag{123}$$

Как мы видим данная формула не совпадает с наивным нормальным упорядочением (31), в котором все операторы рождения ставятся слева, а операторы уничтожения справа. Далее приведем вычисление нормально упорядоченных плотностей, выраженные через наивное упорядочение мономов, состоящих из a_i. Итак пусть $v(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-inz}$, где $[a_n, a_m] = \frac{n}{4}\delta_{n+m,0}$ тогда имеем для n мод

$$\begin{aligned}
&(:v(z):)_n = a_n \\
&(:v^2(z):)_n = \sum_{i+j=n} :a_ia_j: -\frac{1}{48}\delta_{n,0} \\
&(:v^3(z):)_n = \sum_{i+j+k=n} :a_ia_ja_k: -\frac{1}{16}a_n \\
&(:v^4(z):)_n = \sum_{i+j+l+k=n} :a_ia_ja_la_k: -\frac{1}{8}\sum_{i+j=n} :a_ia_j: +\frac{1}{768}\delta_{n,0} \\
&(:v^5(z):)_n = \sum_{i+j+l+k+m=n} :a_ia_ja_ka_la_m: -\frac{5}{24}\sum_{i+j+l=n} :a_ia_ja_l: +\frac{5}{768}a_n \\
&(:v^6(z):)_n = \sum_{i+j+l+k+m+p=n} :a_ia_ja_ka_la_ma_p: -\frac{5}{16}\sum_{i+j+l+k=n} :a_ia_ja_la_k: +\frac{5}{256}\sum_{i+j=n} :a_ia_j: -\frac{5}{36864}\delta_{n,0}
\end{aligned} \tag{124}$$

Далее для полей $v(z)$ с производными по z ,

$$
\begin{aligned}
&(:(v_z(z))^2:)_n = -\sum_{i+j=n} ij : a_i a_j : + \frac{1}{480}\delta_{n,0} \\
&(:v(z)(v_z(z))^2:)_n = -\sum_{i+j+k=n} ij : a_i a_j a_k : + \frac{1}{480} a_n \\
&(:v(z)v_{zz}(z):)_n = -\sum_{i+j=n} i^2 : a_i a_j : - \frac{1}{480}\delta_{n,0} \\
&(:v(z)v_{zzzz}(z):)_n = \sum_{i+j=n} i^4 : a_i a_j : - \frac{1}{1008}\delta_{n,0} \\
&(:v_z(z)v_{zzz}(z):)_n = \sum_{i+j=n} i^3 j : a_i a_j : + \frac{1}{1008}\delta_{n,0} \\
&(:v_{zz}(z)v_{zz}(z):)_n = \sum_{i+j=n} i^2 j^2 : a_i a_j : - \frac{1}{1008}\delta_{n,0} \\
&(:v^2(z)(v_z(z))^2:)_n = -\sum_{i+j+k+l=n} ij : a_i a_j a_k a_l : + \frac{1}{48}\sum_{i+j=n} ij : a_i a_j : + \frac{1}{480}\sum_{i+j=n} : a_i a_j : - \frac{1}{23040}\delta_{n,0} \\
&(:v^2(z)v_{zz}(z):)_n = -\sum_{i+j+k=n} i^2 : a_i a_j a_k : + \frac{1}{48} n^2 a_n - \frac{1}{240} a_n \\
&(:v^3(z)v_{zz}(z):)_n = -\sum_{i+j+k+l=n} i^2 : a_i a_j a_k a_l : + \frac{1}{16}\sum_{i+j=n} i^2 : a_i a_j : - \frac{1}{160}\sum_{i+j=n} : a_i a_j : + \frac{1}{7680}\delta_{n,0}
\end{aligned} \tag{125}
$$

Таким образом мы видим, что правильное упорядочение локальных плотностей, содержит поправки к наивному упорядочению.

8 Приложение А. Преобразование Гильберта

Преобразование Гильберта определяется формулой

$$
v^H(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(y)}{y-x} dy \tag{126}
$$

где символ P означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения. Введем положительные и отрицательные моды по формулам

$$
v_+(x) = \int_0^{\infty} \tilde{v}_k e^{-ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad v_-(x) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{v}_k e^{-ikx} \frac{dk}{2\pi}, \tag{127}
$$

Тогда имеем

$$
v(x) = v_+(x) + v_-(x), \quad v^H(x) = -i(v_+(x) - v_-(x)) \tag{128}
$$

Далее приведем ряд полезных свойств и равенств связанных с преобразованием Гильбрета

$$
f^H g + f g^H = (fg)^H - (f^H g^H)^H \tag{129}
$$

Интегральные свойства

$$
\begin{aligned}
&\int dx f^H = 0, \\
&\int dx f^H g = -\int dx f g^H \\
&\int dx f^H f = 0
\end{aligned} \tag{130}
$$

Действие на функции

$$
\begin{aligned}
&(f^{\pm})^H = \pm i f^{\pm}\\
&(f^H)_k = i(\mathrm{sgn} k) f_k\\
&(e^{ikx})^H = i e^{ikx}\mathrm{sgn} k\\
&\left(\frac{1}{x-a}\right)^H = \frac{i}{x-a}, \quad \mathrm{Im} a > 0
\end{aligned}
\tag{131}
$$

Другие интегральные свойства

$$
\begin{aligned}
&\int v^2 dx = \int (v^H)^2 dx\\
&\int v^3 dx = 3\int v (v^H)^2 dx
\end{aligned}
\tag{132}
$$

И свойства связанные с проекционными операторами ($f^{\pm} = \frac{1}{2}(f \mp i f^H)$)

$$
\begin{aligned}
&(f^+g^+)^H = i f^+ g^+, \quad (f^-g^-)^H = -i f^- g^-\\
&(f^+g^+)^+ = f^+g^+, \quad (f^-g^-)^- = f^-g^-, \quad (f^+g^+)^- = (f^-g^-)^+ = 0\\
&(f_1^{\pm}...f_n^{\pm})^H = \pm i f_1^{\pm}...f_n^{\pm}, \quad (f_1^{\pm}...f_n^{\pm})^{\pm} = f_1^{\pm}...f_n^{\pm}, \quad (f_1^{\pm}...f_n^{\pm})^{\mp} = 0\\
&(fg^+)^+ = fg^+ - i(f^H g^+)^-, \qquad (fg^+)^- = i(f^H g^+)^-\\
&\int f^+ g = \int f g^-\\
&\int f^+ g^+ = \int f^- g^- = 0\\
&\int f^+ g^+ h^+ = \int f^- g^- h^- = 0\\
&\int f_1^{\pm}...f_n^{\pm} = 0\\
&\int f f^+ = \int f f^- = \int \frac{f^2}{2}\\
&\int f^2 f^+ = \int \left(\frac{f^3}{2} - \frac{i}{6}(f^H)^3\right), \quad \int f^2 f^- = \int \left(\frac{f^3}{2} + \frac{i}{6}(f^H)^3\right)\\
&\int f (f^+)^2 = \int \left(\frac{f^3}{6} - \frac{i}{6}(f^H)^3\right), \quad \int f (f^-)^2 = \int \left(\frac{f^3}{6} + \frac{i}{6}(f^H)^3\right)\\
&\int f f^+ f^- = \int \frac{f^3}{3}\\
&\int f^+ f^+ f^- = \int \left(\frac{i f^3}{6} + \frac{1}{6}(f^H)^3\right), \quad \int f^- f^- f^+ = \int \left(\frac{-i f^3}{6} + \frac{1}{6}(f^H)^3\right)
\end{aligned}
\tag{133}
$$

Список литературы

[1] A. M. Polyakov, *"Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory"*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 66 (1974) 23–42.

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *"Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory"*, Nucl. Phys. B241 (1984) 333–380.

[3] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *"Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories"*, Lett. Math. Phys. 91 (2010) 167–197, [arXiv:0906.3219].

[4] V. A. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolsky, "On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture," arXiv:1012.1312 [hep-th].

[5] Sasaki R. and Yamanaka, I.: *"Virasoro algebra, vertex operators, quantum Sine- Gordon and solvable Quantum Field theories."* Adv. Stud. in Pure Math. 16, 271-296 (1988)

[6] Eguchi, T. and Yang, S.K.: *"Deformation of conformal field theories and soliton equations"*. Phys. Lett. B224, 373-378 (1989)

[7] E. K. Sklyanin, Sov. Phys. Dokl. 24, 107-109 (1979)

[8] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *"Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz"*, Commun. Math. Phys. 177 (1996) 381–398, [hep-th/9412229].

[9] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, *"Integrable structure of conformal field theory II. Q-operator and DDV equation"*, Comm. Math. Phys. 190 (1997), 247–278.

[10] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, and A. B. Zamolodchikov, *"Integrable structure of conformal field theory. III: The Yang-Baxter relation"*, Commun. Math. Phys. 200 (1999) 297–324, [hep-th/9805008].

[11] T. Benjamin, *"Internal waves of permanent form in fluids of great depth"* , J. Fluid Mech. 29 (1967) 559–562

[12] H. Ono, *"Algebraic solitary waves in stratifed fluids"*, J. Phys. Soc. Japan 39 (1975) 1082–1091

[13] D. Lebedev and A. Radul, *"Generalized internal long waves equations: Construction, Hamiltonian structure, and conservation laws"*, Commun. Math. Phys. 91 (1983) 543–555.

[14] A. Degasperis, D. Lebedev, M. Olshanetsky, S. Pakuliak, A. Perelomov, and P. Santini, *" Nonlocal integrable partners to generalized MKdV and two-dimensional Toda lattice equation in the formalism of a dressing method with quantized spectral parameter"*, Commun. Math. Phys. 141 (1991) 133–151.

[15] A. Degasperis, D. Lebedev, M. Olshanetsky, S. Pakuliak, A. Perelomov, and P. Santini, *"Generalized Intermediate Long-Wave hierarchy in zero-curvature representation with noncommutative spectral parameter"*, J. Math. Phys. 33 (1992) 3783–3793.

[16] A. G. Abanov, E. Bettelheim, and P. Wiegmann, *"Integrable hydrodynamics of Calogero-Sutherland model: Bidirectional Benjamin-Ono equation"*, J. Phys. A 42 (2009) 135201, [arXiv:0810.5327]

[17] A. G. Abanov and P. B. Wiegmann, *"Quantum Hydrodynamics, the Quantum Benjamin-Ono equation, and the Calogero Model"*, Phys. Rev. Lett 95, 076402 (2005).

[18] M.J. Ablowitz, A.S. Fokas and R.L. Anderson, *"The direct linearizing transform and the Benjamin-Ono equation"*, Physics Letters, 93A, 8, 1983

[19] T. L. Bock and M.D. Kruskal, *"A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation"*, Physics Letters, 74A, 3, 4, 1979.

[20] A.S. Fokas B. Fuchssteiner, *"The hierarchy of the Benjamin—Ono equation"*, Physics Letters, 86A, 341-345, 1981

[21] H. H. Chen, Y. C. Lee, and N. R. Pereira, *"Algebraic internal wave solitons and the integrable Calogero-Moser-Sutherland N-body problem"*, J. Phys. Fluids 22, 187 (1979).

[22] F. Calogero, Jour. Math. Phys. 10 (1969) 2197-2200;
B. Sutherland, Jour. Math. Phys. 12 (1970) 246-250, 251-256; Phys. Rev. A4 (1971) 2019–2021; A5 (1992) 1372–1376.

[23] I. G. Macdonald, *"Symmetric functions and Hall polynomials"*. Oxford University Press, 1995

[24] T. Osima and H. Sekiguchi, *"Commuting families of differential operators invariant underthe action of a Weyl group"*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 2 (1995), 1–75.

[25] V. B. Kuznetsov, V. V. Mangazeev, and E. K. Sklyanin, *"Q-operator and factorised separation chain for Jack polynomials, Indag.Math"*. 14 (2003) 451, [math/0306242].

[26] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake and J. Shiraishi, *"Collective field theory, CalogeroSutherland model and generalized matrix models"*, Phys. Lett. B 347, 49 (1995) [arXiv:hep-th/9411053]

[27] S. Iso, *"Anyon Basis of $c = 1$ Conformal Field Theory"*, preprint UT-692, hep-th/9411051, November 1994.

[28] A. N. Sergeev, A. P. Veselov *"Calogero–Moser Operators in infinite dimension"*, arXiv:0910.1984v1 [math-ph] 11 Oct 2009

[29] A. N. Sergeev, A. P. Veselov *"Quantum Calogero–Moser Systmes: A view from infinity"*, arXiv:0910.5463v1 [math-ph] 28 Oct 2009

[30] M. A. Ablowitz and P. A. Clarkson, *"Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering"*, London Mathematical Society Lecture Note Series (No. 149), 1991

[31] P.P. Kulish, A.M. Zeitlin, Phys. Lett. B,581, 125 (2004); hep-th/0312159; Theor. Math. Phys., 142, 211 (2005); hep-th/0501018.

[32] P.P. Kulish, A.M. Zeitlin, Phys. Lett. B, 597, 229 (2004); hep-th/0407154; Nucl. Phys. B, 709, 578 (2005); hep-th/0501019.

[33] P.P. Kulish, A.M. Zeitlin, Nucl. Phys. B, 720, 289 (2005); hep-th/0506027.