Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра "Проблемы теоретической физики"

Оптическая проводимость графена с учетом кулоновского взаимодействия

Выпускная квалификационная
работа на степень магистра
студента 628 гр. Гука Н.Д.

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Бурмистров И.С.

Содержание

1 Введение.

Изучению проводимости графена посвящены многочисленные работы [1]. Наибольший интерес привлекает вопрос о проводимости при значении химического потенциала равного нулю (в дираковской точке). В основном в них расматриваются модели без межэлектронного взаимодействия. В работе [2] рассмотрен графен без примесей. В этой работе получена, в частности, оптическая проводимость в дираковской точке для всех соотношений ω и $T > 0$:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{4\hbar}\tanh\frac{\omega}{4T} + \frac{2\ln 2}{\pi}\frac{e^2}{\hbar}T\delta(\omega) \tag{1}$$

Первый член в этой формуле называется межзонным, так как он соответствует переходам электронов между зонами графена.Этот член и дает конечную проводимость графена при $T \to 0$. Второй член - внутризонный вклад в проводимость (электроны при взаимодействии с электрическим полем не уходит из зоны, в которой находился). В работе [1] рассматривается графен с беспорядком, показано, что при $T \to 0$ проводимость не зависит от беспорядка и равна константе $\frac{2e^2}{\pi\hbar}$. Оказывается, что пределы $T \to 0$ и $\tau^{-1} \to 0$ (τ - время свободного пробега) дают разные результаты в зависимости от порядка.

Работы, в которых учитывается кулоновское взаимодействие между электронами, либо рассматривают малые частоты [3, 4], либо достаточно большие [5].

Для малых частот проводимость выходит па плато:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{\hbar}\alpha^{-2}, \ \text{ при } \ \omega \ll \alpha^2 T, \ \ \alpha = \frac{e^2}{\varepsilon v_F} \tag{2}$$

v_F - скорость Ферми в графене, ε - диэлектрическая проницаемость подложки, на которой находится образец графена. $\alpha = \frac{e^2}{\epsilon v_F}$ аналог постоянной тонкой структры для графена. Она в $c/\epsilon v_F$ раз больше. С учетом того, что типичное значение v_F для графена 10^6 м/с, $\alpha \simeq 2.19/\varepsilon \simeq 0.73$. Мы будем полагать $\alpha \ll 1$.

Во работе [5] показано, что в области $\alpha T \ll \omega \ll T$ внутризонная проводимость дает основной вклад и ведет себя следующим образом:

$$\sigma(\omega) \sim \frac{\alpha^2 T^2}{\omega^2}, \text{ при } \alpha T \ll \omega \ll T \tag{3}$$

Целью данной работы является выяснение поведения оптической проводимости в области $\alpha^2 T \ll \omega \ll \alpha T$.

2 Гамильтониан

В данной работе мы будем рассматривать графен без учета примесей вблизи точки Дирака. Система описывается гамильтонианом, состоящим из двух частей: гамильтониан Дирака H_0, описывающий невзаимодействующие электроны в графене с достаточно малыми энергиями ($|E| < E_D \sim 3eV$), и член кулоновского межэлектронного взаимодействия:

$$\begin{aligned} H = \sum_{\nu=1}^{N} \int d^2 r \Psi_\nu^+ (-\imath v_F \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla}) \Psi_\nu + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\nu'=1}^{N} \int d^2 r_1 d^2 r_2 \Psi_{\nu'}^+ \Psi_\nu^+ \frac{e^2}{\varepsilon |\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|} \Psi_\nu \Psi_{\nu'}, \end{aligned} \tag{4}$$

где ε - диэлектрическая константа. Индексы в суммировании нумеруют различные степени свободы $N = 4$ (две точки Дирака в зоне Брилюэна и два направления проекции спина). Матрицы Паули действуют в пространстве двух подрешеток гексагональной решетки графена. Ψ_ν - спинор в этом же пространстве. Будем считать, что в графене нижняя зона при $T = 0$ полностью заполнена, а верхняя полностью пуста, то есть $\mu = 0$. Ниже мы будем следовать обозначениям работы [5].

2.1 Затравочные функции Грина.

Так как волновые функции спиноры, то гриновские функции в графене представляют собой матрицы:

$$G^{R,A}(\epsilon,p)=\frac{\epsilon 1+\sigma\mathbf{p}}{(\epsilon\pm\imath 0)^2-p^2} \tag{5}$$

В дальнейшем будем полагать $v_F=1$. Чтобы востановить v_F в формуле, нужно домножить все импульсы в формуле на него. Как будет видно далее, функцию Грина удобно разложить на две, описывающие электроны в верхней или нижней зоне графена. Для этого нужно ввести проекционные операторы

$$P_\pm(\mathbf{p})=\frac{\mathbf{1}\pm\sigma\mathbf{n_p}}{\mathbf{2}} \tag{6}$$

$\mathbf{n}_p=\boldsymbol{p}/p$ - единичный вектор указывающий направление импульса электрона. Используя эти операторы можно переписать функцию Грина в виде:

$$G^{R,A}(\epsilon,p)=\sum_{s=\pm}P_sG_s^{R,A}(\epsilon,p) \tag{7}$$

$$G_s^{R,A}(\epsilon,p)=\frac{1}{\epsilon+\imath 0-sp}$$

Суммирование ведется по $s=\pm 1$.

Затравочный пропагатор кулоновского взаимодействия имеет обычный вид

$$D_0(q)=\frac{2\pi\alpha}{|q|} \tag{8}$$

2.2 Собственно энергетическая часть

Собственно энергетическая часть функции Грина вычисляется стандартным образом. В мацубаровской техники формула для Σ будет иметь вид

$$\Sigma(\imath\epsilon_n,p)=T\sum_{\omega_k}\int\frac{d^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}D(\imath\omega_k,\boldsymbol{k})G(\imath\omega_k+\imath\epsilon_n,\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) \tag{9}$$

Как будет видно из дальнейших вычислений, в пропагаторе кулоновского взаимодействия $D(\imath\omega_k, \boldsymbol{k})$ важна для проводимости только мнимая часть. Действительная часть этого пропагатора дает перенормировки констант связи α. В затравочном пропагаторе нет мнимой части, поэтому нужно учесть поправки к нему, происходящие из поляризационного оператора $\Pi^R(\omega, \boldsymbol{q})$. Мы будем учитывать поправки к кулоновскому пропагатору в RPA (Random Phase Approximation) приближении, считая, что $N \gg 1$.

$$D^R_{RPA}(\omega, \boldsymbol{q}) = \frac{D_0(q)}{1 + D_0(q) N \Pi^R(\omega, \boldsymbol{q})} \tag{10}$$

Более подробно этот вопрос рассмотрен в [5]. Для мнимой части есть две существенно разных области: $|\omega| < q$ и $|\omega| > q$, при $\max\{|\omega|, q\} \ll T$.

$$D^R_{RPA}(\omega, \boldsymbol{q}) = \begin{cases} \dfrac{\pi\omega\sqrt{q^2-\omega^2}}{NT\ln 2[(q^2-\omega^2)(1+\frac{q}{2\ln 2\alpha N})^2+\omega^2]}, & |\omega| < q \\ \dfrac{64\pi^2 N\alpha^2\sqrt{\omega^2-q^2}\tanh\frac{\omega}{2T}}{16(\sqrt{\omega^2-q^2}(1+\frac{2\pi\alpha N\ln 2}{q})-\frac{2\alpha N\ln 2}{q}|\omega|)^2+(\pi\alpha\alpha Nq\tanh\frac{\omega}{2T})}, & |\omega| > q \end{cases} \tag{11}$$

Суммирование в формуле (9) идет по $\omega_k = 2\pi kT$. Преобразуем эту сумму в интеграл по комплесной плоскости.

$$\Sigma(\imath\epsilon_n, p) = \oint \frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2} D(\omega_k, k) G(\omega_k + \imath\epsilon_n, k+p)\coth(\frac{\omega}{2T}) \tag{12}$$

На комплексной плоскости есть два разреза $\operatorname{Im}\omega = 0$ и $\operatorname{Im}(\omega + \imath\epsilon_n) = 0$. Преобразуя контурный интеграл в интегралы вдоль этих разрезов, получаем

$$\operatorname{Im}\Sigma^R(\epsilon, p) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\operatorname{Im}D^R(\omega, k)\operatorname{Im}G^R(\omega+\epsilon, k+p) \times(\coth(\frac{\omega}{2T} + \operatorname{th}(\frac{\epsilon-\omega}{2T})) \tag{13}$$

Собственно энергетическая часть в таком виде матрица в пространстве двух подрешеток. Удобно разложить ее на две части

$$\Sigma^R = \Sigma^R_\epsilon + \sigma n_p \Sigma^R_v \tag{14}$$

В дальнейших вычислениях нас будут интересовать собственно энергетические части функций Грина, введенных в формуле (7). Они легко записываются через введенные ранее:

$$\operatorname{Im}\Sigma^R_s = \operatorname{Im}\Sigma^R_\epsilon + s\operatorname{Im}\Sigma^R_v \tag{15}$$

Таким образом получаем конечную формулу [5]

$$\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p) = \sum_{s'}\int\frac{dE}{4\pi}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}[1+ss'\mathbf{n_p}\mathbf{n_k}]K_{s'}(E,\boldsymbol{k},\epsilon,\boldsymbol{p}) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} K_{s'}(E,\boldsymbol{k},\epsilon,\boldsymbol{p}) = -\operatorname{Im}D^R(E-\epsilon,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\operatorname{Im}G^R_{s'}(E,\boldsymbol{k}) \\ \times[\coth\frac{E-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{E}{2T}] \end{aligned} \tag{17}$$

Из уравнения (16) видно, $\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p)$ не зависит от направления импульса p и удовлетворяет соотношению:

$$\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p) = \operatorname{Im}\Sigma^R_{-s}(-\epsilon,p) \tag{18}$$

3 Проводимость без учета вершинной части

Для вычисления проводимости будем пользоваться известной формулой

$$\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{\omega}[\operatorname{Im}\Pi^R_{\mu\nu}(\omega) - \operatorname{Im}\Pi^R_{\mu\nu}(0)], \tag{19}$$

где $\Pi^R_{\mu\nu}(\omega)$ - запаздывающий корелятор ток-ток. Без учета вершинных поправок он выражается через точные функции Грина:

$$\Pi_{\mu\nu}(\omega_n) = T\sum_{\epsilon_k}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}j_\mu G(\imath\epsilon_k,k)j_\nu G(\imath\epsilon_k+\imath\omega_n,k+p) \tag{20}$$

Где $j_\mu = ev_F\sigma_\mu$ - оператор тока в графене. Преобразуя $\Pi^R_{\mu\nu}$ аналогично собственно энергетической части функции Грина, получим:

$$\operatorname{Im}\Pi^R_{\mu\nu}(\omega) = \frac{e^2}{2\pi}\operatorname{Tr}\int d\epsilon\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\sigma_\mu \operatorname{Im}G^R(\epsilon+\omega,k+p)\sigma_\nu \operatorname{Im}G^R(\epsilon,k) \times(\tanh\frac{\epsilon+\omega}{2T}-\tanh\frac{\epsilon}{2T}) \quad (21)$$

След берется по пространству подрешеток. Подставляя (7), получаем:

$$\operatorname{Im}\Pi^R_{\mu\nu}(\omega) = -\frac{\delta_{\mu\nu}}{64\pi^2}\int_p\sum_{ll'qq'=\pm1} ll'[\tanh\frac{\epsilon+\omega}{2T}-\tanh\frac{\epsilon}{2T}] \times\frac{1}{\epsilon+\omega-qp+\imath l\operatorname{Im}\Sigma^R_q(\epsilon+\omega,p)}\frac{1}{\epsilon-q'p+\imath l'\operatorname{Im}\Sigma^R_{q'}(\epsilon,p)}d\epsilon p dp \quad (22)$$

Суммирование по q и q' распадается на два существенно отчающихся вклада. При $q=q'$ функции Грина в кореляторе соответствуют электронам из одной зоны. Этот вклад в проводимость будем называть однозонным. При $T=0$ он должен исчезать, так как электронных переходов в одной зоне не будет. Межзонный вклад ($q\neq q'$) в нультемпературном пределе дает конечную проводимость графена.

Вычисления проводимости в пределе $\omega \ll T$, $\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p) \ll T$ дают для внутризонного вклада

$$\operatorname{Re}\sigma_{inter}(\omega) = \frac{2\ln 2}{\pi}\frac{2\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p)T}{\omega^2+4(\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p))^2} \quad (23)$$

и для межзонного вклада при $\omega \ll T$, $\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p) \ll T$

$$\operatorname{Re}\sigma_{intra}(\omega) = \frac{1}{16}\frac{\omega}{T}(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\omega}{4\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p)}) \quad (24)$$

При этом в обоих вкладах $\operatorname{Im}\Sigma^R_s(\epsilon,p)$ берется на $\epsilon\sim p\sim T$

4 Учет вершинной части.

4.1 Уравнение Бете-Солпитера.

Теперь учтем, что в диаграмме для $\Pi_{\mu\nu}(\omega)$ есть вершинная часть. Будем искать ее в лестничном приближении. Для этого нужно решить уравнение Бете-Солпитера на вершину:

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(\imath\epsilon_k, \imath\epsilon_k+\imath\omega_k, \imath\omega_k, \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sigma_\mu + T\sum_{E_n}\int_k G(\imath E_n+\imath\omega_k, k)\\ \times\Gamma(\imath E_n, , \imath E_n+\imath\omega_k, \imath\omega, \boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{q})G(\imath E_n, k)D(\imath E_n-\imath\epsilon_k, k-p)\end{aligned} \tag{25}$$

$$\int_k \stackrel{def}{=} \int \frac{d^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}$$

Суммирование ведется по $E_n = 2n\pi T$. Так как нас интересует оптическая проводимость, положим $q = 0$. Проводя процедуру со сменой суммирования на интегрирование вокруг полюсов $\coth(\frac{E}{2T})$ (аналогично $\Sigma_s^R(\epsilon, p)$), получим:

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(\imath\epsilon_k, \imath\epsilon_k+\imath\omega_k, \imath\omega_k, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, 0) = \sigma_\mu + \frac{1}{4\pi\imath}\oint dE\int_k G(E+\imath\omega_k, k)\\ \times\Gamma(E, E+\imath\omega_k, \imath\omega_k, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}, 0)G(E, k)D(E-\imath\epsilon_k, k-p)\coth\frac{E}{2T}\end{aligned} \tag{26}$$

Напишем уравнение для Γ^{RA}. Изменяя контуры интегрирования, перейдем к интегрированию вдоль разрезов $\operatorname{Im} E = 0, \operatorname{Im}(E+i\epsilon_k) = 0, \operatorname{Im}(E+\imath\epsilon_k+\imath\omega_k) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{RA}_\mu(\imath\epsilon_k, \imath\epsilon_k + \imath\omega_k, \imath\omega_k, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, 0) = \sigma_\mu + \frac{1}{4\pi\imath}\int dE \int_k \\
G_R(E+\imath\omega_k, k)\Gamma^{RR}_\mu(E, E+\imath\omega_k, \imath\omega_k, k)G^R(E,k) \\
\times D^R(E-\imath\epsilon_k, k-p)\tanh\frac{E}{2T} - \\
-G_R(E+\imath\omega_k, k)\Gamma^{RA}_\mu(E, E+\imath\omega_k, \imath\omega_k, k)G^A(E,k) \\
\times D^R(E-\imath\epsilon_k, k-p)\tanh\frac{E}{2T} + \\
+G_R(E+\imath\omega_k+\imath\epsilon_k, k)\Gamma^{RA}_\mu(E+\imath\epsilon_k, E+\imath\epsilon_k+\imath\omega_k, \imath\omega_k, k)G^R(E+\imath\epsilon_k,k) \\
\times D^R(E, k-p)\coth\frac{E}{2T} - \\
-G_R(E+\imath\omega_k+\imath\epsilon_k, k)\Gamma^{RA}_\mu(E+\imath\epsilon_k, E+\imath\epsilon_k+\imath\omega_k, \imath\omega_k, k)G^R(E+\imath\epsilon_k,k) \\
\times D^A(E, k-p)\coth\frac{E}{2T} + \\
+G_R(E,k)\Gamma^{RA}_\mu(E-\imath\omega_k, E, \imath\omega_k, k)G^A(E-\imath\omega_k, k) \\
\times D^A(E-\imath\epsilon_k-\imath\omega_k, k-p)\tanh\frac{E}{2T} - \\
-G_A(E,k)\Gamma^{RA}_\mu(E-\imath\omega_k, E, \imath\omega_k, k)G^A(E-\imath\omega_k, k) \\
\times D^A(E-\imath\epsilon_k-\imath\omega_k, k-p)\tanh\frac{E}{2T} \quad (27)
\end{aligned}
$$

Основной вклад в случае $\omega \ll T$ дают интегралы, где интегрируется одна запаздывающая и одна опережающая функции Грина. Оставим только их. Аналитически продолжив вершинную часть, получим:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{RA}_\mu(\epsilon, \epsilon+\omega, \omega, p) = \sigma_\mu + \frac{1}{4\pi\imath}\int dE \int_k G(E+\omega, k)\Gamma^{RA}_\mu(E, E+\omega, \omega, k) \\
G^A(E,k)\{\operatorname{Re} D^R(E-\epsilon, k-p)[\tanh\frac{E+\omega}{2T} - \tanh\frac{E}{2T}] + \\
+\imath \operatorname{Im} D^R(E-\epsilon, k-p)[2\coth\frac{E-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{E+\omega}{2T} - \tanh\frac{E}{2T}]\} \quad (28)
\end{aligned}
$$

Действительная часть кулоновской функции Грина приводит к перенормировке костанты связи α. Рассмотрим интеграл с мнимой частью. Вершина имеет матричную структуру в пространстве подрешеток графена. Пусть

$$\Gamma_\mu = \Gamma^0_\mu + A^{\mu\nu}\sigma_\nu + \Gamma^z_\mu \sigma_z \tag{29}$$

Подставив такую параметризацию в уравнение Бете-Солпитера, получим уравнения на $\Gamma^0_\mu, A^{\mu\nu}, \Gamma^z\mu$. Уравнение на Γ^z_μ получается независимое от остальных параметров. То есть $\Gamma^z_\mu = 0$. Остальные два уравнения такие:

$$\Gamma^0_\mu(\epsilon,\omega,p) = -\sum_{s'=\pm}\int\frac{dE}{4\pi}\int_k \operatorname{Im} D^R(E-\epsilon,k-p)(\coth\frac{E-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{E}{2T})$$
$$\times G^R_{s'}(E+\omega,k)G^A_{s'}(E,k)(\Gamma^0_\mu(E,\omega,k) + s'A^{\mu\nu}(E,\omega,k)n^\nu) \tag{30}$$

$$A^{\mu\nu}(\epsilon,\omega,p) = \delta^{\mu\nu} - \sum_{s'=\pm}\int\frac{dE}{4\pi}\int_k(\coth\frac{E-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{E}{2T})G^A_{s'}(E,k)$$
$$\times \operatorname{Im} D^R(E-\epsilon,k-p)G^R_{s'}(E+\omega,k)n^\nu(s'\Gamma^0_\mu(E,\omega,k) + A^{\mu\rho}(E,\omega,k)n^\rho) \tag{31}$$

С точностью до членов порядка $\frac{\omega}{T}$, произведение функций Грина можно преобразовать:

$$G^R_{s'}(E+\omega,k)G^A_{s'}(E,k) \simeq \frac{-2\imath}{\omega + 2\imath\operatorname{Im}\Sigma^R_{s'}(E,k)}\operatorname{Im} G^R_{s'}(E,k) \tag{32}$$

$$\operatorname{Im} G^R_{s'}(E,k) = -\pi\delta(E - s'k) \tag{33}$$

В последствии, при вычислении проводимости, нам будет удобен вектор Φ^μ, определенный как

$$\Phi^\mu_{s,p}(\epsilon,\omega) = s\Gamma^0_\mu(\epsilon,\omega) + n^\nu_p A^{\mu\nu}(\epsilon,\omega) \tag{34}$$

Уравнение Бете-Солпитера преобразуется так:

$$\Phi^\mu_{sp}(\epsilon) = n^\mu_p + \imath\int\frac{dE}{2\pi}\int_k\sum_{s'=\pm}\frac{1}{\omega + 2\imath\operatorname{Im}\Sigma^R_{s'}(E,k)}K_{s'}(E,k,\epsilon,p)$$
$$\times(ss' + n_k n_p)\Phi^\mu_{s'k}(E) \tag{35}$$

Для решения данного уравнения разложим Φ^μ_{sp} на продольную и поперечные части

$$\Phi^\mu_{sp}(\epsilon) = n^\mu f_{sp} + g^\mu_{sp}, \text{где } g^\mu_{sp} n^\mu_p = 0 \tag{36}$$

Уравнение на f_{sp} и g^μ_{sp} имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{sp}(\epsilon) = 1 + \imath \int \frac{dE}{2\pi} \int_k \sum_{s'=\pm} \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma^R_{s'}(E,k)} K_{s'}(E,k,\epsilon,p) \\ \times (ss' + n_k n_p) n_k n_p f_{s'k}(E) + \\ \imath \int \frac{dE}{2\pi} \int_k \sum_{s'=\pm} \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma^R_{s'}(E,k)} K_{s'}(E,k,\epsilon,p) \\ \times (ss' + n_k n_p) g^\mu_{s'k} n^\mu_p(E) \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} g^\mu_{sp}(\epsilon) = \imath \int \frac{dE}{2\pi} \int_k \sum_{s'=\pm} \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma^R_{s'}(E,k)} K_{s'}(E,k,\epsilon,p) \\ \times (ss' + n_k n_p)(n^\mu_k - (n_k n_p) n^\mu_p) f_{s'k}(E) + \\ \imath \int \frac{dE}{2\pi} \int_k \sum_{s'=\pm} \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma^R_{s'}(E,k)} K_{s'}(E,k,\epsilon,p) \\ \times (ss' + n_k n_p)(g^\mu_{s'k} - (g_{s'k} n_p) n^\mu_p) \end{aligned} \tag{38}$$

Расмотрим первый интеграл во втором уравнении. Будем считать, что $f_{sp}(\epsilon)$ не зависит от направления импульса (как будет видно в дальнейшем, это предположение оправдывается). Можно взять интеграл по углу. Он будет выглядеть так:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\phi) \sin\phi \, d\phi \tag{39}$$

Такой интеграл равен нулю по периодичности. То есть в уравнеии на g^μ не будет свободного члена. Следовательно $g^\mu_{sp}(\epsilon) = 0$. А значит Φ^μ_{sp} имеет только продольную часть и уравнение на нее имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{sp}(\epsilon) = 1 + \imath \int \frac{dE}{2\pi} \int_k \sum_{s'=\pm} \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma^R_{s'}(E,k)} K_{s'}(E,k,\epsilon,p) \\ \times (ss' + n_k n_p) n_k n_p f_{s'k}(E) \end{aligned} \tag{40}$$

Запишем уравнения для f_+ и f_- отдельно. Воспользуемся явным видом $\operatorname{Im} G^R(E,k)$, возьмем интеграл по E.

$$\begin{aligned}
f_{+p}(\epsilon) = 1 + \imath\frac{1}{2}\int_k \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma^R_+(k,k)} \operatorname{Im} D^R(k-\epsilon, k-p) \\
\times[\coth\frac{k-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}](1+n_k n_p) n_k n_p f_{+k}(k) + \\
+\imath\frac{1}{2}\int_k \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma^R_-(-k,k)} \operatorname{Im} D^R(-k-\epsilon, k-p) \\
\times[\coth\frac{-k-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}](-1+n_k n_p) n_k n_p f_{-k}(-k)
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
f_{-p}(\epsilon) = 1 + \imath\frac{1}{2}\int_k \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma^R_-(k,k)} \operatorname{Im} D^R(k-\epsilon, k-p) \\
\times[\coth\frac{k-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}](-1+n_k n_p) n_k n_p f_{+k}(k) + \\
+\imath\frac{1}{2}\int_k \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma^R_-(-k,k)} \operatorname{Im} D^R(-k-\epsilon, k-p) \\
\times[\coth\frac{-k-\epsilon}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}](1+n_k n_p) n_k n_p f_{-k}(-k)
\end{aligned} \tag{42}$$

Пользуясь свойствами собственно энергетической части можно доказать тождество

$$f_{+p}(p) = f_{-p}(-p) \tag{43}$$

Преобразовав уравнение на $f_{+p}(p)$, получим

$$\begin{aligned}
f_{+p}(p) = 1 + \imath\frac{1}{2}\int_k \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma^R_+(k,k)} n_k n_p f_{+k}(k) \\
\times(\operatorname{Im} D^R(k-p, k-p)\{\coth\frac{k-p}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}\}(1+n_k n_p) - \\
\operatorname{Im} D^R(k+p, k-p)\{\coth\frac{k+p}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}\}(1-n_k n_p))
\end{aligned} \tag{44}$$

4.2 Приближенное решение.

Решить данное уравнение можно приближенно, при различных p. Результаты представлены в таблице. F_1 и F_2 вклад в интеграл в правой части уравнения во второй и третьей строчке в формуле (44) соответственно.

	$p \ll \alpha^2 T$	$\alpha^2 T \ll p \ll \alpha T$	$\alpha T \ll p \ll T$
F_1	$\sim \sqrt{pT}$	$\alpha T G(\frac{\alpha^2 T}{p})$	$\gamma(p)\frac{f_{+p}(p)}{\omega+2\imath\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p)}$
F_2	$\sim \sqrt{pT}$	$\alpha T\frac{f_+(\frac{\alpha^2 T}{p})}{\omega+2\imath\operatorname{Im}\Sigma_+^R(\frac{\alpha^2 T}{p})}$	$\alpha T(\frac{\alpha T}{p})^4\frac{f_+(\frac{\alpha^2 T}{p})}{\omega+2\imath\operatorname{Im}\Sigma_+^R(\frac{\alpha^2 T}{p})}$

Здесь

$$G(p) = \int_0^\infty \frac{f_+(\frac{\alpha^2 T}{p}z)}{\omega + 2\imath\operatorname{Im}\Sigma_+^R(\frac{\alpha^2 T}{p}z)}dz \tag{45}$$

и

$$\gamma(p) = \frac{1}{2}\int_k n_k n_p \operatorname{Im} D^R(k-p, k-p)\{\coth\frac{k-p}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}\}(1 + \boldsymbol{n_k n_p}) \tag{46}$$

5 Проводимость.

Для вычисления проводимости нужно посчитать корелятор ток-ток (с учетом вершинных поправок)

$$\Pi_{\mu\nu}(\imath\omega) = e^2 T\sum_{\epsilon_n}\int_p \operatorname{Tr}\sigma_\mu G(\imath\epsilon_n + \imath\omega_k, p)\Gamma(\imath\epsilon_n, \imath\omega_k, p)\sigma_\nu G(\imath\epsilon_n, p) \tag{47}$$

Произведя такие же преобразования, как и для уравнения Бете-Солпитера получим:

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(\omega) = -\frac{e^2}{4\pi\imath}\int d\epsilon\int_p \\ \operatorname{Tr}\sigma_\mu G^R(\epsilon+\omega, p)\Gamma^{RA}(\epsilon,\omega,p)\sigma_\nu G^A(\epsilon,p)[\tanh\frac{\epsilon+\omega}{2T} - \tanh\frac{\epsilon}{2T}] + \\ +[\operatorname{Tr}\sigma_\mu G^R(\epsilon+\omega,p)\Gamma^{RR}(\epsilon,\omega,p)\sigma_\nu G^R(\epsilon,p)\tanh\frac{\epsilon}{2T} - \\ -[\operatorname{Tr}\sigma_\mu G^A(\epsilon+\omega,p)\Gamma^{AA}(\epsilon,\omega,p)\sigma_\nu G^A(\epsilon,p)\tanh\frac{\epsilon+\omega}{2T}]\end{aligned} \tag{48}$$

При $\omega \ll T$ главный вклад в корелятор вносит первая строчка, так как в ней есть и запаздывающая и опережающая функции Грина. Используя параметризацию Γ^{RA} из предыдущего параграфа, можно взять след. Формулу (48), используя (7) можно привести к виду:

$$\operatorname{Im}\Pi_{\mu\nu}(\omega) = \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \int_p \frac{\omega}{2T} \frac{1}{\cosh^2 \frac{\epsilon}{2T}} \sum_{s=\pm} \operatorname{Im} \frac{n_p^\mu n_p^\nu f_{sp}(\epsilon)}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma_s^R(\epsilon, p)} \operatorname{Im} G_s^R(\epsilon, p) \quad (49)$$

Интеграл по энергии легко берется. Далее используя свойства собственно энергетической части функции Грина и функции $f_{sp}(\epsilon)$ и проинтегрировав по углу, получим:

$$\operatorname{Im}\Pi_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu} \int_0^\infty \frac{pdp}{2\pi} \frac{\omega}{2T} \frac{1}{\cosh^2 \frac{p}{2T}} \operatorname{Im} \frac{f_{+p}(p)}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma_+^R(p, p)} \quad (50)$$

Далее воспользуемся решением уравнения на $f_{+p}(p)$. Основной вклад в интеграл дает интервал $\alpha T \ll p \ll T$. В этом интервале уравнение Бете-Соплпитера (44) явно решается:

$$f_{+p}(p) = \frac{1}{1 + \frac{\gamma(p)}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p)}} \quad (51)$$

Итого основной вклад в коррелятор получается равным:

$$\operatorname{Im}\Pi_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu} \int_{\alpha T}^T \frac{pdp}{2\pi} \frac{\omega}{2T} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma_+^R(p, p) + \imath\gamma(p)} \quad (52)$$

Величина $\gamma(p)$ чисто действительная. Введем $\tau_{tr}^{-1}(p) = 2\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p) + \gamma(p)$

$$\tau_{tr}^{-1}(p) = \sum_{s'} \int \frac{dE}{4\pi} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} [1 + s'\mathbf{n_p n_k}][1 - s'\boldsymbol{n_k n_p}] K_{s'}(E, \boldsymbol{k}, \epsilon, \boldsymbol{p})|_{\epsilon=|p|} \quad (53)$$

Вклад в проводимость от области $\alpha T \ll p \ll T$ равен:

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu} \int \frac{pdp}{2\pi} \frac{\omega}{2T} \frac{1}{\cosh^2 \frac{p}{2T}} \frac{\tau_{tr}^{-1}(p)}{\omega^2 + \tau_{tr}^{-2}(p)} \quad (54)$$

На рассматриваемом интервале $\alpha T \ll p \ll T$ поведение $\tau_{tr}(p)$ имеет вид [5]

$$\tau_{tr}^{-1}(p) \sim \alpha^2 \frac{T^2}{p} \tag{55}$$

Проводимость тогда дается формулой

$$\sigma_{\mu\nu} \simeq \delta_{\mu\nu} \int_{\sim \alpha T}^{\sim T} \frac{\alpha^2 T p^2 dp}{\omega^2 p^2 + \alpha^4 T^4} \tag{56}$$

Оптическая проводимость в предельных случаях получается равной:

$$\sigma_{\mu\nu} \sim \delta_{\mu\nu} \begin{cases} \alpha^{-2}, & \omega \ll \alpha^2 T \\ \dfrac{\alpha^2 T^2}{\omega^2}, & \omega \gg \alpha^2 T \end{cases} \tag{57}$$

6 Заключение.

В данной работе вычислена оптическая проводимость с учетом кулоновского межэлектронного взаимодействия на частотах $\omega \ll T$ методом функций Грина с учетом лестничных поправок к вершине. Впервые найдено поведение оптической проводимости в интервале $\alpha^2 T \ll \omega \ll \alpha T$. Показано, что особенность на нулевой частоте, которая появляется в рассмотрении невзаимодействующих электронах (формула (1)) размывается на ширину $\omega \sim \alpha^2 T$. Межзонный вклад в проводимость почти не изменяется (поправки порядка α).

7 Приложения.

7.1 Приближенное решение уравнения Бете-Солпитера.

$$\begin{aligned} f_{+p}(p) = 1 + \imath \frac{1}{2} \int_k \frac{1}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma_+^R(k,k)} n_k n_p f_{+k}(k) \\ (\operatorname{Im} D^R(k-p,k-p)\{\coth \frac{k-p}{2T} - \tanh \frac{k}{2T}\}(1 + n_k n_p) - \\ \operatorname{Im} D^R(k+p,k-p)\{\coth \frac{k+p}{2T} - \tanh \frac{k}{2T}\}(1 - n_k n_p)) \end{aligned} \tag{58}$$

В этом разделе для удобства мы будем использовать обезразмеренные переменные:

$$\frac{k}{2T} \to k, \quad \frac{p}{2T} \to p \tag{59}$$

Рассмотрим интеграл с $\operatorname{Im} D^R(k-p, k-p)$.

При $p \ll \alpha$, основной вклад в интеграл происходит от $k \gg p$. То есть $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}| \simeq k$

$$F_1 = -4\alpha T \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\infty} \frac{\frac{\alpha \ln 2}{\pi} z}{\sinh \frac{\alpha \ln 2}{\pi} z} F(\frac{\alpha \ln 2}{\pi} z) \int \frac{d\phi}{\pi} A(\cos\phi) \frac{\sqrt{\frac{\pi p}{\alpha \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{z}} \sin\frac{\phi}{2}}{1 + \frac{4\pi p}{\alpha \ln 2} \frac{1}{z} (1+z)^2 \sin^2\frac{\phi}{2}} \tag{60}$$

$$F(p) = \frac{f_{+,p}(p)}{\omega + 2\imath \operatorname{Im} \Sigma_+^R(p,p)} \tag{61}$$

$$A(cos\phi) = (1-\cos\phi) cos\phi \tag{62}$$

Сделана замена $k = \frac{\alpha \ln 2}{\pi} z$. Подинтегральное выражение быстро спадает из-за sinh, поэтому основной вклад от $z \ll \alpha^{-1}$. Учитывая это условие и границы интегрирования, заметим следущее: при $p \ll \alpha^2$ в последней дроби в знаменателе можно оставить 1, при $\alpha^2 \ll p \ll \alpha$. Основное значение интеграла набирается при $z \sim \frac{\alpha \ln 2}{4\pi p}$.

При $p \ll \alpha^2$

$$F_1 = -\sqrt{p} 4\alpha T \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\infty} \frac{\frac{\alpha \ln 2}{\pi} z}{\sinh \frac{\alpha \ln 2}{\pi} z} F(\frac{\alpha \ln 2}{\pi} z) \int \frac{d\phi}{\pi} A(\cos\phi) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{z}} \sin\frac{\phi}{2}, \tag{63}$$

При $\alpha^2 \ll p \ll \alpha$

$$F_1 = -\frac{\alpha T}{2} \int_0^{\infty} dy F(\frac{\alpha^2 \ln^2 2}{4\pi^2 p} y^2) \int \frac{d\phi}{\pi} A(\cos\phi) \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{1 + \sin^2\frac{\phi}{2} y^2} \tag{64}$$

На промежутке $\alpha \ll p \ll 1$ $k \simeq p$. Пусть $k = p(1+y)$, $y \ll 1$, тогда

$$F_1 = -\frac{2\ln 2}{\pi} pF(p)T \int dy d\phi A(\cos\phi) \frac{\sin\frac{\phi}{2}}{4\sin\frac{\phi}{2}(\frac{p\sqrt{y^2+1}}{2\ln 2\alpha}+1)^2 + y^2} \tag{65}$$

Интеграл по y берется с помощью формулы.

$$\int \frac{dy}{y^2 + (1+a\sqrt{1+y^2})^2} = 4\frac{\arctan\frac{1-a}{1+a}}{1-a^2} \tag{66}$$

Сделав замену $t = \frac{2\pi p}{\alpha \ln 2}\sin\frac{\phi}{2} = u\sin\frac{\phi}{2}$, получим:

$$F_1 = -\frac{16\pi T}{\ln 2} pF(p) \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{u^2-t^2}} A(1-2\frac{t^2}{u^2}) \frac{1}{1-t^2} \arctan\frac{1-t}{1+t} \tag{67}$$

Подставив A получим, что в главном порядке $F_1 \sim \alpha TF(p)$. Однако нам надо будет не только главный порядок по α, поэтому в таблице результатов мы оставили функцию $\gamma(p)$. Вычисление следущего порядка будет произведено при вычислении τ_{tr}^{-1}.

Вычисление F_2 производится аналогично. Результаты показаны в таблице на стр. 12.

При решении уравнения на $f_{+,p}(p)$ оказывается, что главное значение имеют для различных интервалов по p различные члены F_1 и F_2. Так для $\alpha^2 \ll p \ll \alpha$, вклад от F_1 в главном порядке зануляется, а при $\alpha \ll p \ll 1$, вклад от F_2 меньше вклада от F_1 в α^4 раз(большая степень α имеет значение, так как в проводимость даетвклад не ведуший порядок по α от $\gamma(p)$, а второй).

Решение уравнения Бете-Солпитера приведены в таблице ниже.(Востановлена размерность p).

	$p \ll \alpha^2 T$	$\alpha^2 T \ll p \ll \alpha T$	$\alpha T \ll p \ll T$
$f_{+,p}(p)$	$1 + \imath\sqrt{pT}\tilde{g}(\omega)$	$\frac{\alpha T}{\omega + \imath\tau_{tr}^{-1}(p)}$	$\frac{\omega + 2\imath\Sigma_+^R(p,\mathbf{p})}{\omega + \imath\tau_{tr}^{-1}(p)}$

7.2 Вычисление $\tau_{tr}(p)$

После преобразования выражения (53) получим:

$$\tau_{tr}^{-1}(p) = \int \frac{d^2\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2}(1 - \boldsymbol{n_k}\boldsymbol{n_p})(1 + \boldsymbol{n_k}\boldsymbol{n_p})$$
$$(\operatorname{Im} D^R(k-p, k-p)\{\coth\frac{k-p}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}\} -$$
$$\operatorname{Im} D^R(k+p, k-p)\{\coth\frac{k+p}{2T} - \tanh\frac{k}{2T}\}) \tag{68}$$

Это выражение похоже на интеграл, который исследовался при приближенном решении уравнения Бете-Солпитера. Единственное отличие в том, что угловая зависимость $A(\cos\phi)$ теперь другая:

$$A(\cos\phi) = (1 - \cos\phi)(1 + \cos\phi) \tag{69}$$

Для случаев при $p \ll \alpha T$ существенно ничего не меняетя, только общий коэффициент.

Случай $\alpha T \ll p \ll T$. Действуя аналогично решению уравнения придем к интегралу:

$$\tau_{tr}^{-1}(p) = -\frac{16\pi T}{\ln 2}pF(p)\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{u^2-t^2}}A(1-2\frac{t^2}{u^2})\frac{1}{1-t^2}\arctan\frac{1-t}{1+t} \tag{70}$$

$$u = \frac{2\pi p}{\alpha \ln 2} \tag{71}$$

Подставляя угловую зависимость(69):

$$\tau_{tr}^{-1}(p) = -\frac{16\pi T}{\ln 2}pF(p)\int_0^u dt2\frac{t^2}{u^2}\sqrt{u^2-t^2}\frac{1}{1-t^2}\arctan\frac{1-t}{1+t} \tag{72}$$

Отсюда находим, что

$$\tau_{tr}^{-1}(p) \sim \frac{\alpha^2 T^2}{p} \tag{73}$$

Поведение гранспотрного времени рассеяния приведено в таблице:

	$p \ll \alpha^2 T$	$\alpha^2 T \ll p \ll \alpha T$	$\alpha T \ll p \ll T$
$\tau_{tr}^{-1}(p)$	$\sim \sqrt{pT}$	$\sim \alpha T$	$\sim \frac{\alpha^2 T^2}{p}$

7.3 Проводимость с учетом вершины.

Проводимость вычисляется по формуле:

$$\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu}\int \frac{pdp}{2\pi}\frac{1}{2T}\frac{1}{\cosh^2\frac{p}{2T}}\operatorname{Im}\frac{f_{+p}(p)}{\omega + 2\imath \operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p)} \tag{74}$$

Из-за cosh в знаменателе, главный вклад происходит от $p \ll T$.

1. Интервал $p \ll \alpha^2 T$.

   Подставляя $f_{+,p}(p)$ из предыдущего параграфа, получим:

$$\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu}\int_0^{\alpha^2}\frac{pdp}{\omega^2 + 4(\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p))^2}$$
$$\Big((1-\sqrt{pT}\operatorname{Im}\tilde{g}(\omega))\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p) - \omega\sqrt{pT}\operatorname{Re}\tilde{g}(\omega)\Big) \tag{75}$$

   При $p \ll \alpha^2 T$

$$\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p) \sim \sqrt{pT}$$

   Проводимость

$$\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu} \sim \delta_{\mu\nu}\begin{cases} \alpha^3, & \omega \ll \alpha^2 T \\ \dfrac{\alpha^5 T^2}{\omega^2}, & \omega \gg \alpha^2 T \end{cases} \tag{76}$$

2. Интервал $\alpha^2 T \ll p \ll \alpha T$.

   Подставляя $f_{+,p}(p)$ из предыдущего параграфа, получим:

$$\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu}\int_{\sim\alpha^2 T}^{\sim\alpha T}\frac{pdp}{4\pi T}\alpha T \operatorname{Im}\frac{1}{(\omega + 2\imath\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p))(\omega + \imath\tau_{tr}^{-1}(p))} \tag{77}$$

   При $\alpha^2 T \ll p \ll \alpha T$

$$\operatorname{Im}\Sigma_+^R(p,p) \sim \tau_{tr}^{-1}(p) \sim \alpha T \tag{78}$$

   Проводимость

$$\operatorname{Re}\sigma_{\mu\nu} \sim \delta_{\mu\nu}\begin{cases} \dfrac{\omega}{\alpha^4 T}, & \omega \ll \alpha^2 T \\ \dfrac{\alpha^4 T^3}{\omega^3}, & \omega \gg \alpha^2 T \end{cases} \tag{79}$$

3. Интервал $\alpha T \ll p \ll T$.

Подставляя $f_{+,p}(p)$ из предыдущего параграфа, получим:

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega) = \delta_{\mu\nu} \int_{\sim\alpha T}^{\sim T} \frac{pdp}{2\pi} \frac{1}{2T} \frac{\tau_{tr}^{-1}(p)}{\omega^2 + \tau_{tr}^{-2}(p)} \tag{80}$$

На рассматриваемом интервале $\alpha T \ll p \ll T$

$$\tau_{tr}^{-1}(p) \sim \alpha^2 \frac{T^2}{p} \tag{81}$$

Проводимость тогда дается формулой

$$\sigma_{\mu\nu} \simeq \delta_{\mu\nu} \int_{\sim\alpha T}^{\sim T} \frac{\alpha^2 T p^2 dp}{\omega^2 p^2 + \alpha^4 T^4} \tag{82}$$

Оптическая проводимость в предельных случаях.

$$\sigma_{\mu\nu} \sim \delta_{\mu\nu} \begin{cases} \alpha^{-2}, & \omega \ll \alpha^2 T \\ \dfrac{\alpha^2 T^2}{\omega^2}, & \omega \gg \alpha^2 T \end{cases} \tag{83}$$

Вклады в проводимость от разных областей приведены в таблице.

$\mathrm{Re}\,\sigma_{xx}(\omega)$	$p \ll \alpha^2 T$	$\alpha^2 T \ll p \ll \alpha T$	$\alpha T \ll p \ll T$
$\omega \ll \alpha^2 T$	$\sim \alpha^3$	$\sim \frac{\omega}{\alpha^4 T}$	$\sim \alpha^{-2}$
$\alpha^2 T \ll \omega \ll T$	$\sim \frac{\alpha^5 T^2}{\omega^2}$	$\sim \frac{\alpha^4 T^3}{\omega^3}$	$\sim \frac{\alpha^2 T^2}{\omega^2}$

Видно, что на всех частотах наибольший вклад от интервала $\alpha T \ll p \ll T$.

Список литературы

[1] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, Phys. Rev. B 74, 235443, (2006)

[2] L.A. Falkovsky and A.A. Varlamov, Cond.Mat. 0606800, Eur. Phys. J. B 56, 281 (2007).

[3] Alexander B. Kashuba, Phys. Rev., B 78, 085415, (2008)

[4] L. Fritz, J. Schmalian, M. Muller, and S. Sachdev, Phys. Rev. B 78, 085416, (2008).

[5] M. Schuett, P.M. Ostrovsky, I.V. Gornyi, A.D. Mirlin, Phys.Rev. B 83, 155441, (2011)