

Московский физико-технический институт
(Государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

Магистерская диссертация

**Поглощение ультразвука и электрон-фононная теплопередача при
низких температурах**

Студента 6 курса
Штыка Александра Викторовича

Научный руководитель: Фейгельман М.В.
Консультант: Кравцов В. Е.

Москва, 2012г.

Содержание

I. Введение	3
II. Кинетическое уравнение для фононов	3
III. Гамильтониан системы	6
IV. Собственноэнергетическая часть фононов.	8
1. Поперечные фононы	8
2. Продольные фононы. Диаграммы с диффузоном	10
3. Продольные фононы. Диаграммы без диффузона	11
A. Влияние неуниверсальности Кулоновского взаимодействия. Рост взаимодействия электронов и продольных фононов.	11
V. Поток тепла.	13
VI. Влияние Куперовского взаимодействия	16
A. диаграммы МТ типа	16
B. Диаграммы DOS часть 1 (A-R-R-R тип)	18
C. диаграммы DOS часть 2 (A-R-A-R тип)	19
D. AL диаграммы	21
E. Полная вершина	21
VII. Диаграммы типа слабой локализации и поперечные фононы	23
VIII. Заключение	24
A. Электрон-фонон-примесная вершина.	25
B. Производная плотности состояний по энергии.	27
1. Функция Грина	27
2. Вершина фонон-диффузон	29
C. Некоторые интегралы	29
1.	29
2.	30
3.	30
D. Сверхпроводящий пропагатор	30
Список литературы	31

I. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы изучаем вопрос о потоке тепла между электронной и фононной системами в грязном металле. Во многих экспериментах об охлаждении перегретого электронного газа наблюдается существенное расхождение результатов с теорией. А именно, несмотря на реализацию одной и той же температурной зависимости для потока тепла, $J \sim T^6$ например, константа пропорциональности на 1-2 порядка больше^{1,2}, чем можно было бы ожидать³⁻⁵. Здесь мы обсудим сценарии, по которым может возникать такая ситуация. Подчеркнем, что все написанное ниже касается лишь *грязного* случая, когда $ql \ll 1$, где q есть импульс фонона, а l – длина свободного пробега электронов.

II. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФОНОНОВ

Для решения задачи о теплопередаче между электронной и фононной подсистемами обычно используют кинетическое уравнение для электронов:

$$2\pi\nu V \partial_t f_E(t) = \text{Tr} [\Delta \Sigma G^K - \Sigma^K \Delta G], \quad (1)$$

где V есть объем системы, f_E – электронная функция распределения, $\Delta G = G^R - G^A$, G^K есть электронная функция Грина, а Σ – соответственно собственноэнергетическая часть. Особенностью такого подхода является то, что в собственноэнергетическую часть электронов входят как электронные так и фононные функции Грина (с различными температурами):

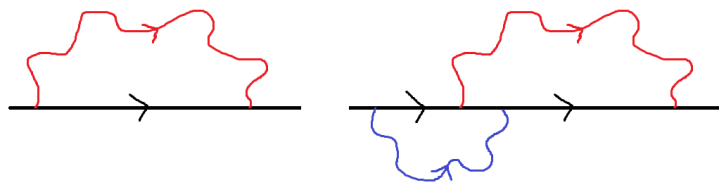


Рис. 1: Примеры вкладов в электронную собственноэнергетическую часть. На этом рисунке черная линия – электронный пропагатор, красная – фононный, а электрон-электронному взаимодействию отвечает синяя волнистая линия.

где изображена также одна из диаграмм, к которой приводит учет электрон-электронного взаимодействия. Это делает вычисления достаточно неудобными, в том числе принципиально заставляя нас использовать Келдышевскую технику. Тем не менее, для квазиравновесного случая в котором имеются хорошо определенные температуры подсистем T_e и T_{ph} , можно показать, что задача сводится к нахождению равновесных величин, которые, при желании, можно вычислять и в Мацубаровской технике, как мы увидим это ниже.

Исходные предположения нашей модели состоят в том, что есть сильное электрон-электронное взаимодействие и сильная связь фононов с термостатом. Эти условия необходимы для того, чтобы иметь оговоренные хорошо определенные температуры подсистем. Теперь же поставим вопрос – как именно получить уравнение на поток тепла в максимально удобном виде? Ответ может подсказать именно тот факт, что во всех диаграммах у нас имеется лишь одна петля по фононным переменным. Это значит, что если мы рассмотрим кинетическое уравнение для фононов, то можно ожидать, что оно будет устроено удобнее, чем электронное. Поэтому далее мы будем рассматривать замкнутую систему (электроны+фононы), оставляя вопрос о поддержании температуры фононной подсистемы в стороне. В этой системе будет действовать закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} E_{total} = \frac{d}{dt} E_e + \frac{d}{dt} E_{ph} \quad (2)$$

и фактически, решая кинетическое уравнение для электронов, мы решаем задачу об охлаждении электронного газа, вычисляя $(d/dt)E_e$. Но можно рассматривать процесс и с другой стороны, вычисляя нагрев

фононного газа, для чего мы и перейдем к решению кинетического уравнения для второй подсистемы, фононов. В безпетлевом по ним приближении окажется, что фононная собственно-энергетическая часть содержит функции Грина лишь электронной системы, так, что в итоге кинетическое уравнение будет сформулировано на языке квазиравновесных величин. Этот факт, в частности, заметно облегчит вычисление петлевых поправок по электронному взаимодействию.

На этом этапе мы стандартным образом получим кинетическое уравнение для фононов и преобразуем его к удобному при изучении потока тепла виду. Здесь мы используем Келдышевскую технику и стартуем с уравнения Дайсона:

$$\begin{pmatrix} 0 & D_0^{-1} - \Sigma^A \\ D_0^{-1} - \Sigma^R & -\Sigma^K \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} D^K & D^R \\ D^A & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad (3)$$

где " \circ " обозначает свертку двух матриц по координатам и времени. D_0 - затравочная функция Грина фононов, D - точная, а Σ есть собственноэнергетическая часть. Используя это уравнение переходим, как обычно, к уравнению на функцию распределения:

$$[F, D_0^{-1}]_- = \Sigma^K - (\Sigma^R \circ F - F \circ \Sigma^A). \quad (4)$$

Поскольку мы хотим вычислить полный поток тепла от одной системы к другой, нам нет необходимости рассматривать координатную зависимость в кинетическом уравнении. Чтобы от нее избавиться, проинтегрируем уравнение по всему объему системы (в процессе этого действия от коммутатора в левой части остается только производная по времени):

$$\int d\mathbf{r} (i\rho_m\omega\partial_t F) = \int d\mathbf{r} (\Sigma^K - (\Sigma^R \circ F - F \circ \Sigma^A)) \quad (5)$$

Понять, почему коммутация с D_0^{-1} дает $i\rho_m\omega\partial_t$ и не свелась просто к дифференцированию по времени, можно из выражения для функции Грина, которое мы приведем ниже (12). Уравнение (5) на самом деле еще обладает матричной структурой: пока что мы избавились от нее лишь в Келдышевском пространстве. Оставшееся пространство отвечает классификации продольные-поперечные фононы и формально возникает из-за того, что фононная функция Грина есть коррелятор двух векторных смещений взятых в различных точках пространства и различные моменты времени:

$$(D)_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle u_\alpha(\mathbf{r}) u_\beta(\mathbf{r}') \rangle \quad (6)$$

и, соответственно, является тензорной величиной. Для того, чтобы произвести разделение на продольные и поперечные фононы необходимо спроектировать уравнение на соответствующие подпространства, продольное и поперечное. Эту цель выполняют проекторы

$$\eta_{\alpha\beta}^l = \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}, \quad \eta_{\alpha\beta}^{tr} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}. \quad (7)$$

$$V \cdot i\partial_t f_{ph}(\omega) = V \cdot \int (d\mathbf{q}) \frac{1}{\rho_m\omega} [\Sigma_{\alpha\beta}^K(\omega, \mathbf{q}) - f_{ph}(\omega)\Delta\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})] \eta_{\beta\alpha}^{tr(l)}, \quad (8)$$

где функция распределения соответственно для поперечных или продольных фононов, в зависимости от того, какой проектор мы взяли. Как мы уже говорили, мы не будем учитывать петлевых поправок по электрон-фононному взаимодействию. Говоря проще, собственноэнергетическая часть фононов не будет содержать фононных пропагаторов, состоя из электронных функций Грина (и, возможно, электрон-электронного взаимодействия), и в этом случае окажется квазиравновесной и обладающей электронной температурой T_{el} . Следовательно:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^K(\omega, \mathbf{q}, T_{el}) = f_{ph}(\omega, T_{el}) [\Sigma^R(\omega, \mathbf{q}, T_{el}) - \Sigma^A(\omega, \mathbf{q}, T_{el})]_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

причем для ясности мы теперь часто будем уточнять, на какой температуре берется той или иной элемент:

$$\partial_t f_{ph}(\omega) = -i \int (d\mathbf{q}) [f_{ph}(\omega, T_{el}) - f_{ph}(\omega, T_{ph})] \cdot \left[\frac{1}{\rho_m \omega} \Sigma^R(\omega, \mathbf{q}, T_{el}) - \Sigma^A(\omega, \mathbf{q}, T_{el}) \right]_{\alpha\beta} \eta_{\beta\alpha}^{tr(l)}. \quad (10)$$

$$\partial_t f_{ph}(\omega) = 2 [f_{ph}(\omega, T_{el}) - f_{ph}(\omega, T_{ph})] \left[\frac{1}{\rho_m \omega} \text{Im} \Sigma^R(\omega, \mathbf{q}, T_{el})_{\alpha\beta} \eta_{\beta\alpha}^{tr(l)} \right]_{q=\omega/s}. \quad (11)$$

Во-первых, мы воспользовались здесь тем, что фононы являются хорошо определенными квазичастицами с законом дисперсии $\omega = sq$. Во вторых, задача о теплопередаче между электронной и фононной подсистемами сводится к вычислению мнимой части фононной Σ . Но что это за величина? Это не что иное, как время жизни фононов!

Чтобы привести для него явное выражение, приведем сперва голую функцию Грина фононов:

$$(D_0^R)_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{\rho_m} \frac{\eta_{\alpha\beta}}{-(\omega + i0)^2 + s^2 q^2}, \quad (12)$$

необходимо подчеркнуть, что для продольных и поперечных фононов скорости звука s различны, так что дробь $1/(-\omega^2 + s^2 q^2)$, содержащая ее в уравнении выше, на самом деле не скаляр а диагональная матрица в базисе продольные-поперечные фононы. Об этом несущественном разделении на продольные и поперечные фононы мы здесь забудем, опуская матричные индексы. Наконец, рассматривая влияние взаимодействия, мы сосредоточимся на мнимой части $\text{Im} \Sigma$:

$$D^R(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{\rho_m [-(\omega + i0)^2 + s^2 q^2] - \text{Im} \Sigma(\omega, q)}, \quad (13)$$

откуда мы можем видеть, что изначально полюс находится при $\omega = sq - i0$, а при включении не слишком сильного взаимодействия приобретает мнимую часть $\omega = sq - i(1/2\rho_m sq) \text{Im} \Sigma(sq, q)$. Слабость взаимодействия подразумевает выполнение условия малости мнимой части полюса по сравнению с его действительной частью, пользуясь чем мы и сделали разложение по малому параметру и пришли к выражению для обратного времени жизни фононов, характеризующего также поглощение ультразвука:

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{1}{\rho_m sq} [\text{Im} \Sigma(\omega, q)]_{\omega=sq}. \quad (14)$$

Как следует из сказанного ранее, в этом выражении Σ подразумевается свернутым с соответствующим проектором $\eta^{tr(l)}$.

III. ГАМИЛЬТониан СИСТЕМЫ

В отсутствие деформации решетки фононами электронный гамильтониан имеет обычный вид:

$$H_0 = \int (d\mathbf{r}) \bar{\psi}(\mathbf{r}) ([\varepsilon(p) - \varepsilon_F] + U(\mathbf{r})) \psi(\mathbf{r}), \quad (15)$$

где член в квадратных скобках есть кинетическая энергия, а $U(\mathbf{r})$ – случайный потенциал. Поэтому мы сосредоточимся здесь на взаимодействии с фононами

$$H_{int} = H_{e-ph-ion} + H_{e-ph-imp}, \quad (16)$$

которое возможно разделить на две части: одну, происходящую от смещения ионов, и вторую, происходящую от смещения примесей. Сперва подробно рассмотрим первое, электрон-фонон-ионное:

$$H_{e-ph-ion}^{bare} = \int (d\mathbf{r}') (d\mathbf{r}) \rho_{ion}(\mathbf{r}') [V_0(\mathbf{r}' + \mathbf{u}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}) - V_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r})] \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \quad (17)$$

$$= \int (d\mathbf{r}') (d\mathbf{r}) \rho_{ion} [\mathbf{u}(\mathbf{r}') \cdot \nabla V_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho_{ion}] \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = - \int (d\mathbf{r}') (d\mathbf{r}) \rho_{ion} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}') \mathbf{V}_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho_{ion} \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \quad (18)$$

$$= \int (d\mathbf{q})(d\mathbf{p}) [-iq_\alpha V_0(q) \rho_{ion}] u_\alpha(\mathbf{q}) \bar{\psi}(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (19)$$

Здесь $V_0(q)$ есть голое Кулоновское взаимодействие и в случае обычного трехмерного металла $V_0(q) = 4\pi e^2/q^2$, а ρ_{ion} – концентрация ионов. После экранирования электронами в статическом приближении (о динамической составляющей мы вспомним позже, при вычислении фононной Σ), мы получим

$$H_{e-ph-ion}^{screened} = \int (d\mathbf{q})(d\mathbf{p}) [-iq_\alpha V(q) \rho_{ion}] u_\alpha(\mathbf{q}) \bar{\psi}(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad V(q) = \frac{V_0(q)}{1 + 2\nu V_0(q)}, \quad (20)$$

где ν есть одноэлектронная плотность состояний на уровне ферми а двойка происходит от суммирования по спине. Перепишем в немного более удобном виде, выделяя явно ответ в случае достаточно сильного Кулоновского взаимодействия (в универсальном пределе), когда функция $g(q) = 1$:

$$H_{e-ph-ion}^{screened} = \int (d\mathbf{q})(d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{d} g(q) \right] u_\alpha(\mathbf{q}) \bar{\psi}(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad g(q) = \frac{1}{1 + [2\nu V_0(q)]^{-1}}. \quad (21)$$

Теперь остается рассмотреть оставшееся, электрон-фонон-примесное взаимодействие. Обычно в качестве электрон-фонон-примесного взаимодействия берется гамильтониан

$$H_{e-ph-imp} = \int (d\mathbf{r}) [-u_\alpha \partial_\alpha U(\mathbf{r})] \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (22)$$

что не совсем верно. Чтобы показать это, подробно рассмотрим, как возникает это взаимодействие при смещении примесей фононами:

$$H_{e-ph-imp} = \int (d\mathbf{r})(d\mathbf{r}') \rho_{imp}(\mathbf{r}') [U_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{u}(\mathbf{r}')) - U_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (23)$$

где U_0 есть потенциал одной примеси. Внимание следует обратить на то, что смещение \mathbf{u} следует брать именно в точке, где находится примесь, \mathbf{r}' , но не точке нахождения электронов \mathbf{r} . Производя дальнейшие преобразования:

$$H_{e-ph-imp} = \int (d\mathbf{r})(d\mathbf{r}') \rho_{imp}(\mathbf{r}') [-u_\alpha(\mathbf{r}') \partial_\alpha U_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \int (d\mathbf{r})(d\mathbf{r}') \rho_{imp}(\mathbf{r}') [u_\alpha(\mathbf{r}') U_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \partial_\alpha [\bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})], \quad (24)$$

только теперь следует вспомнить, что примеси у нас короткодействующие $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и снять в аргументе смещения штрих. В итоге получаем:

$$H_{e-ph-imp} = - \int (d\mathbf{r}) \partial_\alpha [u_\alpha(\mathbf{r}) U(\mathbf{r})] \bar{\psi}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \int (d\mathbf{q})(d\mathbf{p})(d\mathbf{p}') [ip_\alpha - ip'_\alpha] U(\mathbf{p}' + \mathbf{q} - \mathbf{p}) u_\alpha(\mathbf{q}) \bar{\psi}(\mathbf{p}') \psi(\mathbf{p}). \quad (25)$$

Разница с (22) состоит в том, что там отсутствует член с $\text{div} \mathbf{u}$.

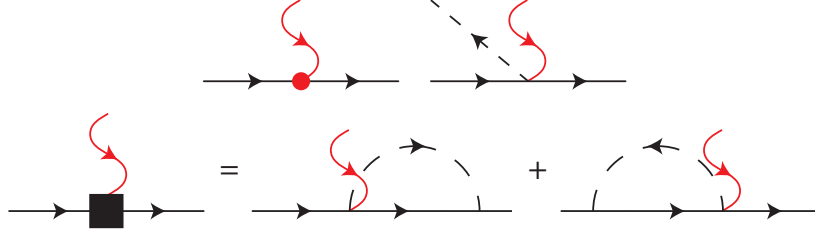


Рис. 2: Изображены электрон-фонон-ионная и примесная вершины. Для случая, когда примесная линия последней замыкается на близлежащую функцию Грина принято обозначение в виде квадрата.

IV. СОБСТВЕННОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ФОНОНОВ.

Как было указано во введении, в этой работе мы рассматриваем грязный случай, подразумевающий выполнение условия $ql \ll 1$ (напомним, что q – фоновый импульс, а l – длина свободного пробега электронов). Здесь мы переходим непосредственно к вычислению фоновый Σ , начиная с классического рассмотрения в универсальном пределе. Главное, о чем пойдет разговор – нарушение сильного сокращения диаграмм для продольных фононов (возникающего в грязном случае) по мере отклонения от универсального предела. Влиянию же петлевых поправок по взаимодействию мы отведем целый раздел несколько позже. Как будет видно, при классическом рассмотрении диаграммы с примесной лестницей

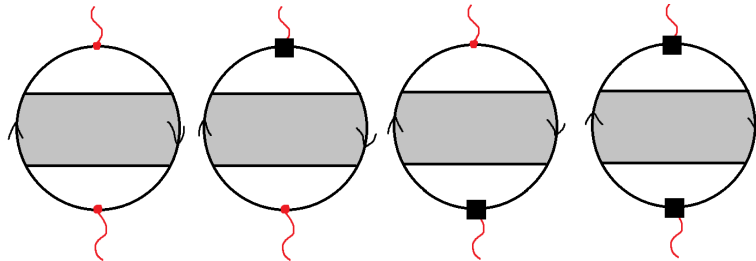


Рис. 3:

сокращают друг друга в главном порядке, хотя на первый взгляд могли бы дать значительный, параметрически усиленный диффузионный вклад в $\sim 1/(\omega\tau + q^2l^2)$ раз больший, чем диаграммы для поперечных фононов, для которых наличие примесной лестницы невозможно. Это сокращение становится приближенным в меру неуниверсальности Кулоновского взаимодействия и, кроме того, возникает ряд дополнительных диаграмм, которые оказываются важными при неуниверсальном, но еще не слишком слабом кулоне, или при низких температурах:

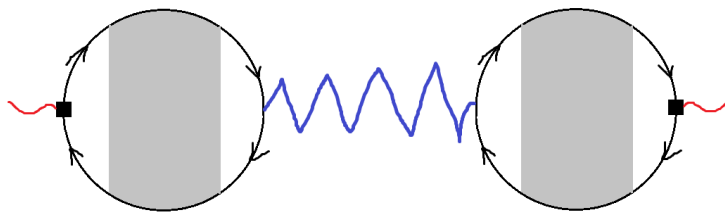


Рис. 4: Пример одной из диаграмм с Кулоновским взаимодействием, вставленным в диффузион. Между собой они будут отличаться лишь типом вершин (на этом рисунке обе примесные). Кроме того, здесь и всегда ниже ломаный зигзаг будет отвечать Кулоновскому взаимодействию.

Все это мы увидим далее.

1. Поперечные фононы

Рассмотрение мы начнем с поперечных фононов. Поскольку «обычное» взаимодействие, электрон-фононное, пропорционально фоновому вектору ($\sim q_\alpha \cdot u_\alpha$, т. е. сжатию решетки), то взаимодействия с поперечными фононами оно не обеспечивает. Для них остается лишь электрон-фонон-примесное:

Первая диаграмма:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -T \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int (d\mathbf{p})(d\mathbf{k}) \frac{(p-k)_\alpha (p-k)_\beta}{2\pi\nu\tau} G(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \quad (26)$$

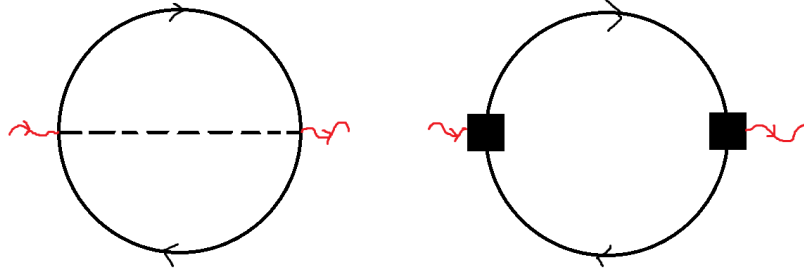


Рис. 5: Диаграммы для поперечных фононов.

$$\begin{aligned}
&= -T \sum_{l=-\infty}^{-n-1} \int (d\mathbf{p})(d\mathbf{k}) \frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\beta}{2\pi\nu\tau} G^A(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G^A(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \\
&\quad - T \sum_{l=-n}^{-1} \int (d\mathbf{p})(d\mathbf{k}) \frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\beta}{2\pi\nu\tau} G^A(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G^R(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \\
&\quad - T \sum_{l=0}^{\infty} \int (d\mathbf{p})(d\mathbf{k}) \frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\beta}{2\pi\nu\tau} G^R(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G^R(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad (27)
\end{aligned}$$

Здесь возникает некоторая формальная сложность при суммировании по энергии, которую удобнее всего анализировать в Келдышевской технике. Здесь же мы условились пользоваться Мацубаровской, поэтому вычислим только зависящую от частоты часть диаграммы. Это проблем не вызовет и, как легко видеть, ответ окажется равным удвоенной $\ll A - R \gg$ части суммирования, где знаки энергий функций Грина различны:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -2 \cdot T \sum_{l=-n}^{-1} \int (d\mathbf{p})(d\mathbf{k}) \frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\beta}{2\pi\nu\tau} G^A(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G^R(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = \quad (28)$$

$$-2T \sum_{l=-n}^{-1} \int (d\mathbf{p})(d\mathbf{k}) \frac{(p-k)_\alpha(p-k)_\beta}{2\pi\nu\tau} G^A(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G^R(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) = -2nT \cdot 2 \cdot \frac{p_F^2}{d} \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{i}{2\tau} \cdot (-i\pi\nu) = -\frac{1}{d} \frac{\nu p_F^2}{\tau} \omega_n \delta_{\alpha\beta}, \quad (29)$$

где d есть размерность электронного газа (обычный металл $d=3$, для гетероструктуры $d=2$). При нулевом импульсе вторая диаграмма полностью сокращает первую. Весь ответ происходит от разложения второй диаграммы по импульсам:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(i\omega_n, \mathbf{q} = 0) = -T \sum_{l=-n}^{-1} \int (d\mathbf{p}) \frac{p_\alpha}{\tau} \left(-\frac{p_\beta}{\tau} \right) G^A(\varepsilon_l, \mathbf{p}) G^R(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{p}) = \frac{1}{d} \frac{\nu p_F^2}{\tau} \omega_n \delta_{\alpha\beta}. \quad (30)$$

$$\delta\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -T \sum_{l=-n}^{-1} \int (d\mathbf{p}) \frac{p_\alpha}{\tau} \left(-\frac{p_\beta}{\tau} \right) G^A(\varepsilon_l, \mathbf{p} - \mathbf{q}/2) G^R(\varepsilon_{l+n}, \mathbf{p} + \mathbf{q}/2) - \Sigma^{(2)}(\omega_n, \mathbf{q} = 0) = \quad (31)$$

$$= Tn \int (d\mathbf{p}) \frac{p_\alpha p_\beta}{\tau^2} \left[G^A (G^R)^3 - (G^A)^2 (G^R)^2 + (G^A)^3 G^R \right] \left(\frac{v_\gamma q_\gamma}{2} \right) \left(\frac{v_\delta q_\delta}{2} \right) = \quad (32)$$

$$= \omega_n \frac{p_F^2 v_F^2}{8\pi d(d+2)\tau^2} (q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) \cdot (-8\pi\nu\tau^3) = -\omega_n \nu \frac{p_F^2 v_F^2}{d(d+2)} \tau (q^2 \delta_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta) \quad (33)$$

Таким образом, вспоминая еще о спине электронов, что даст дополнительный фактор 2 и обращая внимание на то, что слагаемое типа $q_\alpha q_\beta$ для поперечных фононов можно выбросить:

$$\delta\Sigma_0^{tr}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -\frac{2\nu p_F^2}{d(d+2)\tau}\omega_n (q^2 l^2) \quad (34)$$

2. Продольные фононы. Диаграммы с диффузором

Здесь мы сперва рассмотрим упомянутое сокращение диаграмм, которые могли бы дать ответ параметрически больший, чем в случае поперечных фононов. Это диаграммы с диффузором:

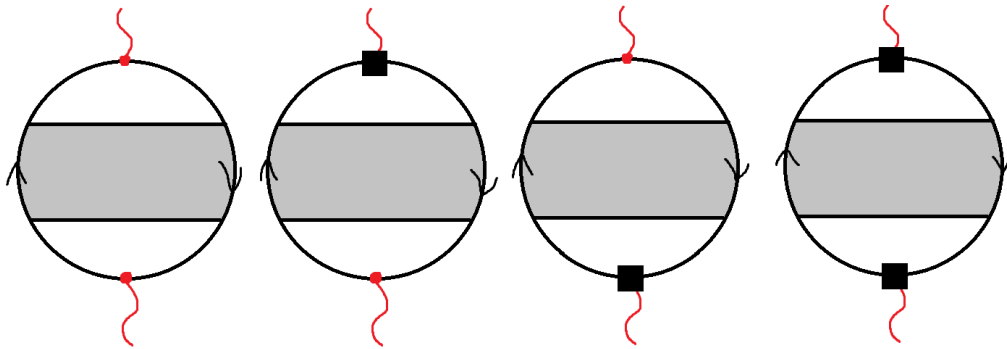


Рис. 6: Кандидаты на главный вклад

В приведенных диаграммах можно выделить вершину «фонон-диффузон», так что все они представимы в виде двух таких вершин и диффузона между ними. Вместо того, чтобы вычислять вклад каждой диаграммы по отдельности, мы вычислим именно описанную вершину и увидим, что сокращение происходит на уровне этого блока, расположенного между фононом и диффузором. Конечно, если бы мы говорили о системе, где примеси не движутся вместе с решеткой, а например закреплены на подложке, то это сокращение исчезло бы и именно эти диаграммы давали бы ведущий вклад для продольных фононов.



Рис. 7: Вершина фонон-диффузон

$$\Lambda_\alpha^{ion} = \int (d\mathbf{p}) \left[-i \frac{p_F v_F}{d} q_\alpha \cdot 1 \right] G^A \left(\varepsilon_l, \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \right) G^R \left(\varepsilon_l + \omega_n, \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \right) = -2i\pi\nu\tau \frac{p_F v_F}{d} q_\alpha \left(1 - \omega_n \tau - \frac{1}{d} q^2 l^2 \right) \quad (35)$$

$$\Lambda_\alpha^{imp} = \int (d\mathbf{p}) \frac{p_\alpha}{\tau} G^A \left(\varepsilon_l, \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \right) G^R \left(\varepsilon_l + \omega_n, \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \right) = 2i\pi\nu\tau \frac{p_F v_F}{d} q_\alpha \left(1 - 2\omega_n \tau - \frac{3}{d+2} q^2 l^2 \right) \quad (36)$$

как видно, мы провели дополнительные разложения по импульсу и частоте, т.к. можно видеть, что ведущие члены сокращаются. Полная вершина в итоге

$$\Lambda_\alpha(i\omega_n, \mathbf{q}) = 2i\pi\nu\tau \frac{p_F v_F}{d} q_\alpha \left(-\omega_n \tau - \frac{2d-2}{d(d+2)} q^2 l^2 \right). \quad (37)$$

Диффузное усиление обеспечило бы усиление фактором $(\omega_n\tau + \tau Dq^2)^{-1}$ по сравнению с диаграммами без диффузона, которые мы будем рассматривать ниже, но возникающие в вершинах сокращения с избытком подавляют это усиление малостью типа $(\omega_n\tau + \tau Dq^2)^2$. Таким образом, диаграммы с диффузоном в универсальном пределе оказываются полностью несущественными.

3. Продольные фононы. Диаграммы без диффузона

Мы увидели, что построение примесной лестницы в универсальном пределе действительно запрещено. Те же диаграммы, что дают ответ для продольных фононов, ее не содержат и изображены ниже:

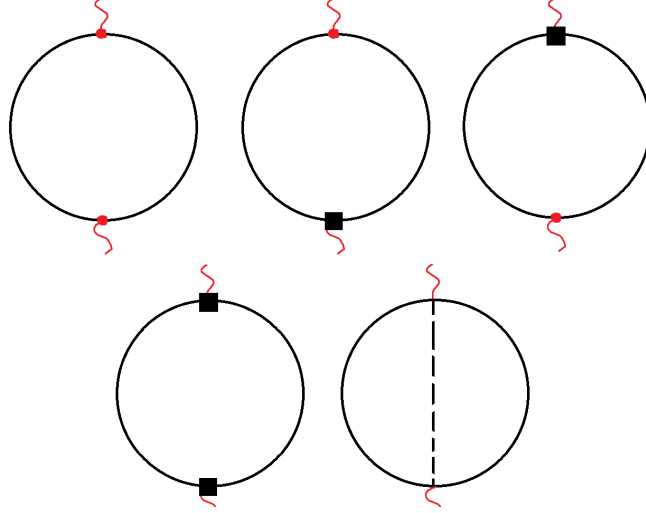


Рис. 8: Диаграммы, которые на самом деле дают главный вклад.

В новых диаграммах, по сравнению со случаем поперечных фононов, особых сложностей нет. Опуская несложные выкладки, получим для продольных фононов

$$\Sigma_0^l(i\omega_n, \mathbf{q}) \cong -\frac{2(d-1)}{d^2(d+2)} \frac{\nu p_F^2}{\tau} \omega_n (q^2 l^2), \quad (38)$$

А. Влияние неуниверсальности Кулоновского взаимодействия. Рост взаимодействия электронов и продольных фононов.

Как мы уже указывали, поляризационный оператор для поперечных фононов содержит только электрон-фонон-примесное взаимодействие и поэтому не зависит от особенностей Кулоновского взаимодействия. Именно поэтому ниже мы сосредоточимся на рассмотрении продольных фононов, которые будут прямо чувствовать эти особенности, причем рассматривать мы будем главные диаграммы, диффузные, для чего снова возвращаемся к вершине «фонон-диффузон»:

Примесная ее часть

$$\Lambda_\alpha^{imp} = \int (d\mathbf{p}) \frac{p_\alpha}{\tau} G^A \left(\varepsilon_l, \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{q} \right) G^R \left(\varepsilon_l + \omega_n, \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} \right) = \int (d\mathbf{p}) \frac{p_\alpha}{\tau} \cdot \frac{\nu_\beta q_\beta}{2} \left[(G^R)^2 G^A - G^R (G^A)^2 \right] = \quad (39)$$

$$= -i \frac{p_F \nu_F}{d} q_\alpha \cdot 2\pi\nu\tau = -2i\pi\nu\tau \frac{p_F \nu_F}{d} q_\alpha. \quad (40)$$

часть же происходящая от смещения ионов зависит от характера экранировки:

$$\Lambda_\alpha^{ion} = \int (d\mathbf{p}) \left[ig(q) \frac{p_F \nu_F}{d} q_\alpha \right] G^A \left(\varepsilon_l, \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{q} \right) G^R \left(\varepsilon_l + \omega_n, \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} \right) = 2i\pi\nu\tau g(q) \frac{p_F \nu_F}{d} q_\alpha. \quad (41)$$

$$\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^{ion} + \Lambda_\alpha^{imp} = 2i\pi\nu\tau [g(q) - 1] \frac{p_F v_F}{d} q_\alpha. \quad (42)$$

Составляя полную диаграмму для собственно-энергетической части фононов, содержащую два блока «фонон-диффузон» и «диффузон-фонон», получаем:

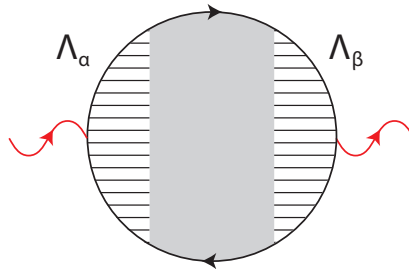


Рис. 9:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(i\omega_n, \mathbf{q}) = 2 \cdot T \cdot n \cdot \Lambda_\alpha(\mathbf{q}) \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \frac{1}{\omega_n + Dq^2} \cdot \Lambda_\beta(-\mathbf{q}) = -2[1 - g(q)]^2 \nu \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} q_\alpha q_\beta, \quad (43)$$

здесь целочисленный множитель n возникает при суммировании по Мацубаровским частотам, ω_n – энергия фонона. Теперь самое время вспомнить о том, что Кулоновское взаимодействие пока учтено не полностью. Следует учесть еще ряд диаграмм:

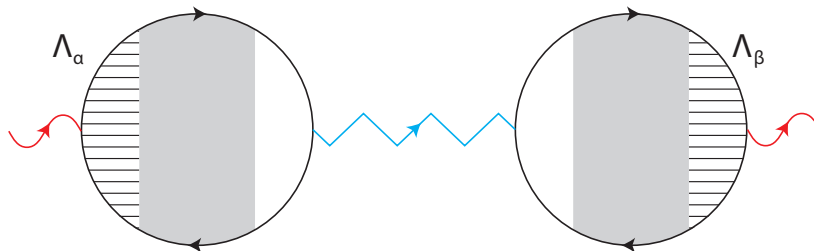


Рис. 10:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(2)}(i\omega_n, \mathbf{q}) = \Lambda_\alpha(\mathbf{q}) \cdot \left[\frac{2 \cdot 2\pi\nu\tau \cdot T \cdot n}{2\pi\nu\tau^2} \frac{1}{\omega_n + Dq^2} \cdot \mathbf{V}(\omega_n, \mathbf{q}) \cdot \frac{2 \cdot 2\pi\nu\tau \cdot T \cdot n}{2\pi\nu\tau^2} \frac{1}{\omega_n + Dq^2} \right] \cdot \Lambda_\beta(-\mathbf{q}), \quad (44)$$

где $\mathbf{V}(\omega_n, \mathbf{q})$ – полный пропагатор Кулоновского взаимодействия. Заметим, что две петли на рисунке всегда с диффузоном. Петля без примесных линий включена в определение экранированной электрон-фонон-примесной вершины, рассмотренной в приложении.

$$\Sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -2[1 - g(q)]^2 \nu \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \left[1 + \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \cdot 2\nu V(\omega_n, q) \right] q_\alpha q_\beta = \quad (45)$$

$$-2[1 - g(q)]^2 \nu \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \left[1 + \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \cdot \frac{2\nu V_0(q)}{1 + 2\nu \frac{Dq^2}{\omega_n + Dq^2} V(q)} \right] q_\alpha q_\beta. \quad (46)$$

Используя выражение (21) для $g(q)$ и преобразуя ответ, получаем:

$$\Sigma_{\alpha\beta}(i\omega_n, \mathbf{q}) = -2 \left[1 - \frac{1}{1 + [2\nu V_0(q)]^{-1}} \right]^2 \nu \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \left[1 + \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \cdot \frac{2\nu V_0(q)}{1 + 2\nu \frac{Dq^2}{\omega_n + Dq^2} V_0(q)} \right] q_\alpha q_\beta = \quad (47)$$

$$= -2 \left[\frac{1}{1 + 2\nu V_0(q)} \right]^2 \nu \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \left[1 + \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \cdot \frac{2\nu V_0(q)}{1 + 2\nu \frac{Dq^2}{\omega_n + Dq^2} V_0(q)} \right] q_\alpha q_\beta = \quad (48)$$

$$= -2 \left[\frac{1}{1 + 2\nu V_0(q)} \right]^2 \nu \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{\omega_n}{\omega_n + Dq^2} \left[\frac{[1 + 2\nu V_0(q)] (\omega_n + Dq^2)}{[1 + 2\nu V_0(q)] Dq^2 + \omega_n} \right] q_\alpha q_\beta = \quad (49)$$

$$= -2\nu \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{1}{1 + 2\nu V_0(q)} \cdot \left[\frac{\omega_n}{[1 + 2\nu V_0(q)] Dq^2 + \omega_n} \right] q_\alpha q_\beta. \quad (50)$$

Аналитическое продолжение удобно сделать именно сейчас.

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = -2\nu \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{1}{1 + 2\nu V_0(q)} \cdot \frac{-i\omega}{[1 + 2\nu V_0(q)] Dq^2 - i\omega} q_\alpha q_\beta = \quad (51)$$

$$= -2\nu \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{1}{1 + 2\nu V_0(q)} \cdot \frac{-i\omega ([1 + 2\nu V_0(q)] Dq^2 + i\omega)}{[1 + 2\nu V_0(q)]^2 (Dq^2)^2 + \omega^2} q_\alpha q_\beta. \quad (52)$$

Мы интересуемся лишь мнимой составляющей Σ , так что ее действительную часть отбросим:

$$i \operatorname{Im} \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) \simeq 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \frac{1}{\tau} \frac{Dq^2}{[1 + 2\nu V_0(q)]^2 (Dq^2)^2 + \omega^2} = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \frac{1}{[1 + 2\nu V_0(q)]^2 \left(\frac{1}{d} q^2 l^2 \right) + \frac{d \cdot \omega^2}{q^2 l^2}}, \quad (53)$$

$$\boxed{i \operatorname{Im} \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \frac{d}{[1 + 2\nu V_0(q)]^2 (q^2 l^2) + (d \cdot s/v_F)^2}}. \quad (54)$$

При переходе к последнему уравнению мы использовали связь частоты и импульса фононов $\omega = sq$. Для удобства мы также выделили в ответе выражение подобное тому, что получается для продольных фононов в универсальном пределе, сразу подчеркнув возникающий безразмерный множитель.

V. ПОТОК ТЕПЛА.

Используя найденные выражения для собственноэнергетической части фононов мы покажем, чему в рассмотренных случаях равен поток тепла между электронной и фононной подсистемами. Для этого продвинемся далее с написанного кинетического уравнения, а именно, нам необходимо будет проинтегрировать его по энергии:

$$dE_{ph}/dt \equiv J = \int d\omega [\nu(k(\omega)) \partial_t f_{ph}(\omega)] = 2 \int d\omega \left(\nu(k(\omega)) [f_{ph}(\omega, T_{el}) - f_{ph}(\omega, T_{ph})] \left[\frac{1}{\rho_m \omega} \operatorname{Im} \Sigma^R(\omega, \mathbf{q}, T_{el})_{\alpha\beta} \eta_{\beta\alpha} \right]_{q=\omega/s} \right), \quad (55)$$

где $\nu(k(\omega))$ – плотность состояний для продольных или поперечных фононов, а J – поток тепла к этой подсистеме. Для продольных фононов в универсальном пределе (используя выражение (38)) получаем

$$J_0^l(T_{el}, T_{ph}) = \frac{18(d-1)\zeta(6)}{(d+2)} \nu \frac{\beta l}{p_F^2 s^3} \cdot [T_{el}^6 - T_{ph}^6], \quad \beta = \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{\nu s^2}{\rho_m}, \quad (56)$$

где мы использовали принятое обозначение для безразмерной постоянной β . Среди рассмотренных неуниверсальных случаев один оказывается не очень интересным, а именно трехмерный. В большинстве

ситуаций отклонения от универсального Кулона будут слишком малы, даже если допустить наличие диэлектрической проницаемости за счет присутствия заполненных зон:

$$V_0^{3d}(q) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon q^2}, \quad (57)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{3d}(\omega, \mathbf{q}) = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \frac{d\varepsilon^2 q^2}{(8\pi\nu e^2 l)^2} = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \left[d \left(\frac{\varepsilon p_F^2}{8\pi\nu e^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(p_F l)^4} \cdot q^2 l^2 \right]. \quad (58)$$

Гораздо более значительное влияние неуниверсальности для двумерных и квазидвумерных систем. Начнем мы со случая обычного двумерного Кулона, но с учетом возможного наличия ε :

$$V_0^{2d}(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q}, \quad (59)$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{2d}(\omega, \mathbf{q}) = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \frac{d}{(4\pi\nu e^2 l/\varepsilon)^2 + (d \cdot s/v_F)^2}. \quad (60)$$

Ответ в этом случае отличается от обычного лишь числовым параметром, воспроизводя температурную зависимость в универсальном пределе. Поток тепла принимает вид

$$J_{2d}^l(T_{el}, T_{ph}) = \frac{d(d+2)}{d-1} \frac{d}{(4\pi\nu e^2 l/\varepsilon)^2 + (d \cdot s/v_F)^2} \cdot J_0(T_{el}, T_{ph}) \quad (61)$$

Вторая интересная реализация взаимодействия это наличие внешней экранировки, например в присутствии затвора, когда кулон можно заменить на эффективную постоянную:

$$V_0^{2ds}(q) = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon q} [1 - e^{-qb}] \approx \frac{2\pi e^2 b}{\varepsilon}, \quad (62)$$

где b есть расстояние до затвора. Конечно, необходимо также удовлетворение неравенства $bq \ll 1$, что считается выполненным.

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{2ds}(\omega, \mathbf{q}) = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d}\right)^2 \omega q_\alpha q_\beta \cdot \frac{d}{(4\pi\nu e^2 b/\varepsilon)^2 q^2 l^2 + (d \cdot s/v_F)^2}. \quad (63)$$

Взаимодействие мы считаем все же достаточно сильным, так что единицей по сравнению с $\nu V(q)$ можно пренебречь. Особенностью этого случая есть наличие характерной температуры T^* , разделяющей различные режимы температурного поведения для потока тепла:

$$\tau T^* = \left(\frac{s}{v_F}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{4\pi\nu e^2 b}\right), \quad (64)$$

$$J \sim T^4, T \gg T^*; \quad J \sim T^6, T \ll T^*. \quad (65)$$

Точный же ответ принимает следующий вид:

$$J_{2ds}^l(T_{el}, 0) = \frac{2\zeta(4)}{15\zeta(6)} \frac{d^2(d+2)}{d-1} \frac{1}{(4\pi\nu e^2 b/\varepsilon)^2} \frac{s^2}{v_F^2} \frac{1}{\tau^2 T^2} \cdot J_0(T_{el}, 0), T \gg T^*, \quad (66)$$

$$J_{2ds}^l(T_{el}, 0) = \frac{(d+2)}{d-1} \frac{v_F^2}{s^2} \cdot J_0(T_{el}, 0), T \ll T^*. \quad (67)$$

Здесь мы умышленно указали лишь поток тепла к *фононной подсистеме*, поток *от нее* будет даваться теми же выражениями, но с фононной температурой. Дело в том, что эти два потока при сильном перегреве могут находиться в областях разных температур, малых и больших, так, что один из них будет подчиняться закону T^4 , а второй T^6 .

Во всех формулах мы предполагали, что имеет место сильное смешивание фононов образца и подложки, так что если даже образец двумерный, то фононы все равно трехмерные. Приведем ответы и для обратного случая чисто двумерных фононов, в отсутствие смешивания:

$$J_0^l(T_{el}, T_{ph}) = \frac{18\pi(d-1)}{5(d+2)} \zeta(5) \nu \frac{\beta_l l}{p_F^2 s^3} \cdot [T_{el}^5 - T_{ph}^5], \quad \beta = \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{\nu s}{b \rho_m}, \quad (68)$$

$$J_{2d}^l(T_{el}, T_{ph}) = \frac{d(d+2)}{d-1} \frac{d}{(4\pi\nu e^2 l / \varepsilon)^2 + (d \cdot s / v_F)^2} \cdot J_0(T_{el}, T_{ph}), \quad (69)$$

$$J_{2ds}^l(T_{el}, 0) = \frac{2\zeta(3)}{9\zeta(5)} \frac{d^2(d+2)}{d-1} \frac{1}{(4\pi\nu e^2 b / \varepsilon)^2} \frac{s^2}{v_F^2} \frac{1}{\tau^2 T^2} \cdot J_0(T_{el}, 0), \quad T \gg T^*, \quad (70)$$

$$J_{2ds}^l(T_{el}, 0) = \frac{(d+2)}{d-1} \frac{v_F^2}{s^2} \cdot J_0(T_{el}, 0), \quad T \ll T^*, \quad (71)$$

снова напоминая, что d здесь есть электронная размерность. Приведем оценки для InAs, считая, что $p_F \approx 10^7 \text{cm}^{-1}$, $m_{eff} \approx 0.025m_0$, $\varepsilon \approx 15$, $p_F l \approx 1$, $s \approx 4 \cdot 10^5 \text{cm/s}$, $b \approx 20 \text{nm}$:

$$J_{2d}^l(T_{el}, T_{ph}) = 10^2 \cdot J_0(T_{el}, T_{ph}), \quad (72)$$

$$T^* \sim 1\text{K}, \quad (73)$$

$$J_{2ds}^l(T_{el}, 0) = 10^4 \left(\frac{T^*}{T} \right)^2 \cdot J_0(T_{el}, 0), \quad T \gg T^*, \quad (74)$$

$$J_{2ds}^l(T_{el}, 0) = 10^4 \cdot J_0(T_{el}, 0), \quad T \ll T^*. \quad (75)$$

VI. ВЛИЯНИЕ КУПЕРОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Как и прежде, мы сосредоточимся на продольных фононах и будем рассматривать вершину фонон-диффузон (напомним, что для поперечных фононов она всегда равна нулю, поскольку пропорциональна q_α). Мы будем рассматривать однопетлевое приближение для вершины, в универсальном пределе, рассматривая при этом сверхпроводящие флуктуации. В результате будет показано, что ответ для вершины оказывается отличным от нуля и связан с коротковолновыми и высокоэнергетическими флуктуациями, а также асимметрией пропагатора $L(\omega_n, \mathbf{q}) \neq L(-\omega_n, \mathbf{q})$.

Все диаграммы можно разделить на типы MT, DOS, AL и это разделение достаточно очевидно:

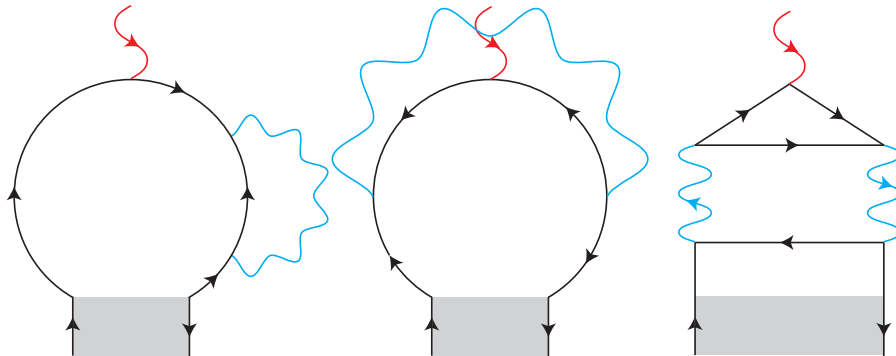
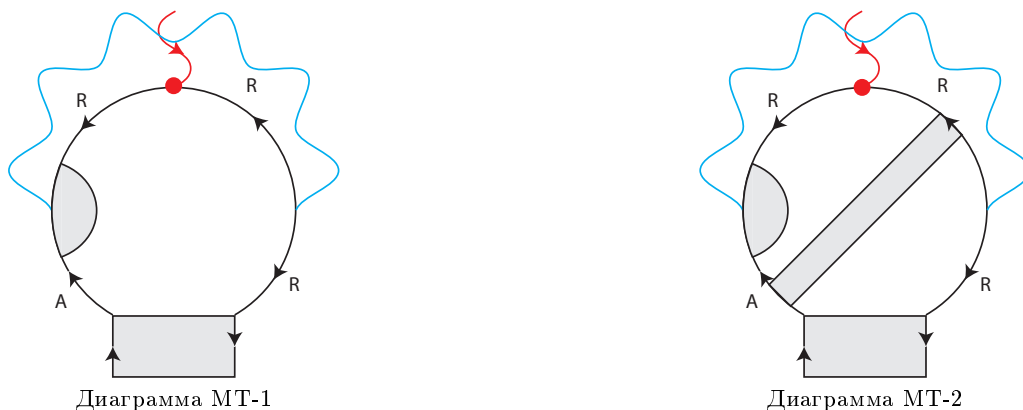


Рис. 11:

Менее очевидными будут приставки типа A-R-A-R у DOS диаграмм, – они будут характеризовать знаки энергий Гриновских функций: положительному отвечает R, отрицательному A. Ниже при вычислении MT и DOS диаграмм мы не будем рассматривать возникающих членов пропорциональных $Q_\alpha Q_\beta q_\beta$, как выясняется, они сократятся между собой. Кроме того, мы будем предполагать Дебаевскую частоту $\omega_D \ll \tau^{-1}$ и интегралы будут набираться в области «умеренных» частот и импульсов, таких, что $1 \gg \Omega_k$, $DQ^2 \lesssim \omega_D$.

А. диаграммы MT типа

Кроме того, вычисления мы проведем для случая двумерных электронов, переход к трехмерному случаю тонкой пленки сведется к замене плотности состояний на эффективную $b\nu$ (b – толщина пленки). Для удобства будем рассматривать пока что большие положительные Ω_k , можно проверить, что для больших отрицательных частот лишь изменяется знак итогового выражения. В связи с этим при вычислении вершины мы всегда будем пренебрегать электронной энергией ε_l и фононной частотой ω_n по сравнению с большой Ω_k .



$$B_1^{MT} = D(i\Omega_k, \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = 2iq_\alpha \pi \nu \tau^3 \varepsilon_F A_2 D(i\Omega_k, \mathbf{Q}). \quad (76)$$

Здесь и везде ниже $\mathcal{D}(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = (\Omega_k\tau + \tau DQ^2)^{-1}$ есть отсуммированная примесная лестница, причем при больших частотах и импульсах протекающих через нее оказывается не важно, куперон это или диффузон.

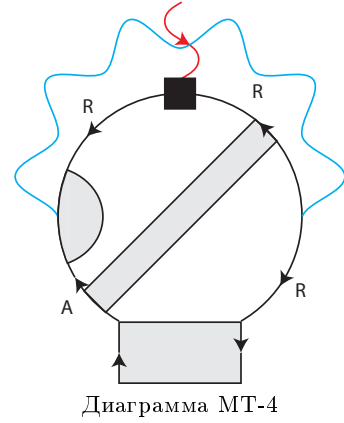
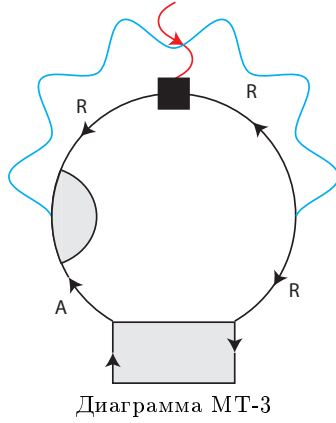
$$B_2^{MT} = \mathcal{D}(i\Omega_k, \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] G^A G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau} \mathcal{D}(i\Omega_k, \mathbf{Q}) \cdot G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \quad (77)$$

$$B_2^{MT} = -2q_\alpha \pi \nu \tau^2 \varepsilon_F A_2 \frac{\mathcal{D}^2}{2\pi\nu\tau} (-2i\pi\nu\tau^2 A_1) = 2iq_\alpha \pi \nu \tau^3 \varepsilon_F A_2 A_1 \mathcal{D}^2 \quad (78)$$

Складываем с первой диаграммой и получаем:

$$B_{1+2}^{MT} = 2iq_\alpha \pi \nu \tau^3 \varepsilon_F A_2 (A_1 \mathcal{D}^2 + \mathcal{D}) = 2i\pi \nu \tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_2 \mathcal{D}^2 \quad (79)$$

Третья и четвертая диаграммы совершенно подобны первой и второй:



$$B_3^{MT} = \mathcal{D}(i\Omega_k, \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[\frac{q_\alpha}{2\tau} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = -2\pi\nu\tau^3 \left[\frac{q_\alpha}{2\tau} \right] A_2 \mathcal{D} \quad (80)$$

$$B_4^{MT} = \mathcal{D}(i\Omega_k, \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[\frac{q_\alpha}{2\tau} \right] G^A G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau} \mathcal{D}(i\Omega_k, \mathbf{Q}) \cdot G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = \quad (81)$$

$$= -2q_\alpha \pi \nu \tau^3 \left[\frac{q_\alpha}{2\tau} \right] A_2 A_1 \mathcal{D}^2. \quad (82)$$

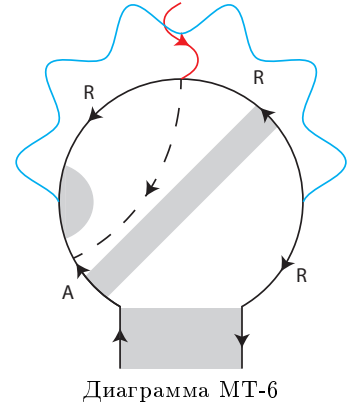
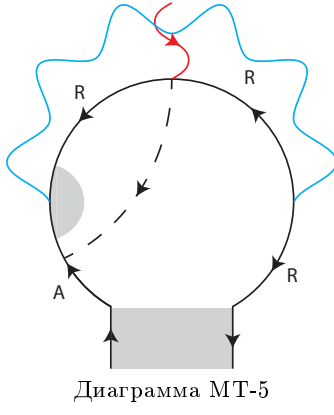
$$B_{3+4}^{MT} = -\pi \nu \tau^2 q_\alpha A_2 \mathcal{D}^2 \quad (83)$$

Аналогично:

$$B_5^{MT} = -\mathcal{D} \cdot 2\pi\nu\tau A_1 \int (d\mathbf{p}) \frac{ip_\alpha}{2\pi\nu\tau} G^A(p+q) G^R G^R(p+Q) = -\mathcal{D} \cdot A_1 \int (d\mathbf{p}) ip_\alpha v_\beta q_\beta [G^A]^2 [G^R]^2 = \quad (84)$$

$$= -2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1 (A_1 + A_1') \mathcal{D} + \pi\nu\tau^2 q_\alpha A_1 (A_1 - A_1') \quad (85)$$

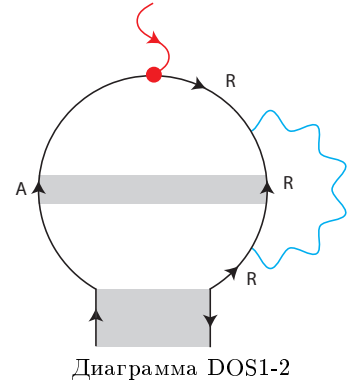
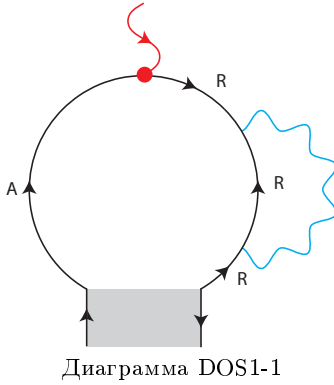
$$B_6^{MT} = -\mathcal{D} \cdot 2\pi\nu\tau A_1 \int (d\mathbf{p}) \frac{ip_\alpha}{2\pi\nu\tau} G^A(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G^R(\mathbf{p} + \mathbf{Q}) \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau} \mathcal{D} \int (d\mathbf{p}') G^A(\mathbf{p}' + \mathbf{q}) G^R G^R(\mathbf{p}' + \mathbf{Q}) = \quad (86)$$



$$= -2i\pi\nu\tau^3\varepsilon_F q_\alpha A'_1 A_1^2 \mathcal{D}^2 + \pi\nu\tau^2 q_\alpha (2A_1 - A'_1) A_1^2 \mathcal{D}^2 \quad (87)$$

Можно обратить внимание, что мы везде оставляли лишь члены со структурой $p_\alpha v_\beta q_\beta$. На самом деле мы часть членов опустили, а именно члены типа $Q_\alpha v_\beta q_\beta$, возникающие в 5й и 6й диаграммах. Дело в том, что когда мы соберем все такие члены, возникающие в диаграммах МТ(5,6) и DOS2(7,8) типа, то они сократятся между собой.

В. Диаграммы DOS часть 1 (A-R-R-R тип)



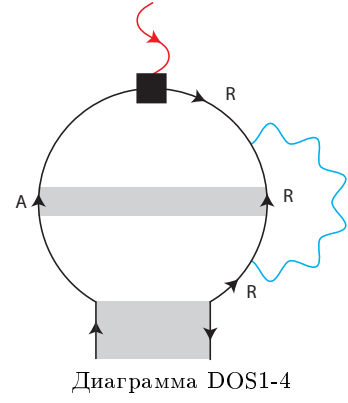
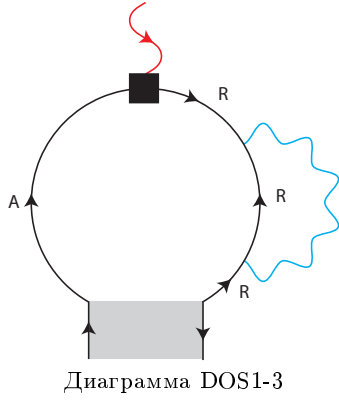
$$B_1^{DOS1} = \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] G^A [G^R]^2 G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1 \quad (88)$$

$$B_2^{DOS1} = \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau} \mathcal{D} \int (d\mathbf{k}) G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1^2 \mathcal{D} \quad (89)$$

$$B_{1+2}^{DOS1} = 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1 \mathcal{D} \quad (90)$$

$$B_3^{DOS1} = \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha}{\tau} \right] G^A [G^R]^2 G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = \quad (91)$$

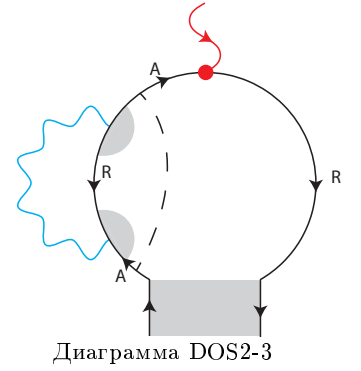
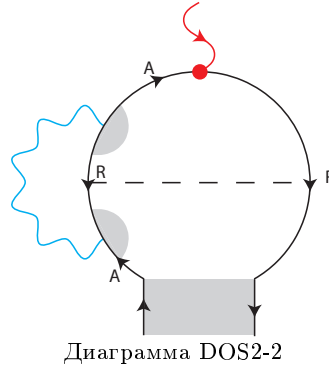
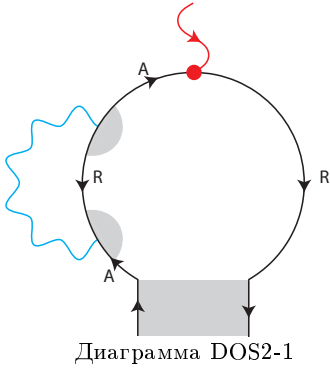
$$= -2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha (2A_1 + A'_1) - \pi\nu\tau^2 q_\alpha (A_1 + A'_1) \quad (92)$$



$$B_4^{DOS1} = \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha}{\tau} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau} \mathcal{D} \cdot \int (d\mathbf{k}) G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = \quad (93)$$

$$= -2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1 (A_1 + A'_1) \mathcal{D} - \pi\nu\tau^2 q_\alpha A_1 A'_1 \mathcal{D} \quad (94)$$

С. диаграммы DOS часть 2 (A-R-A-R тип)



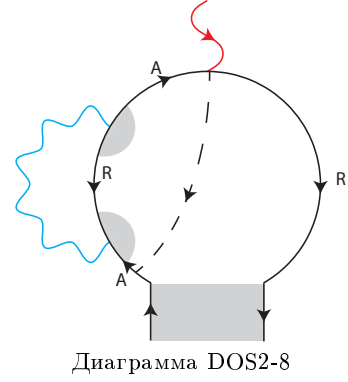
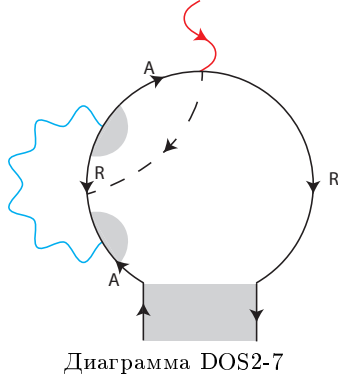
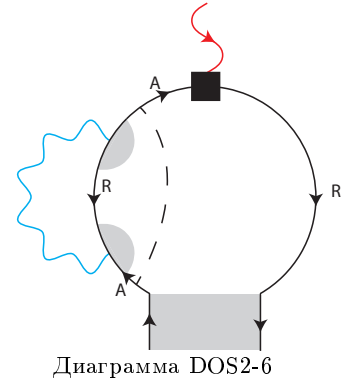
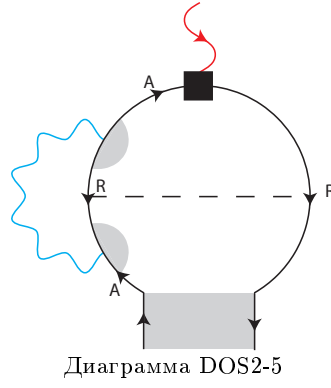
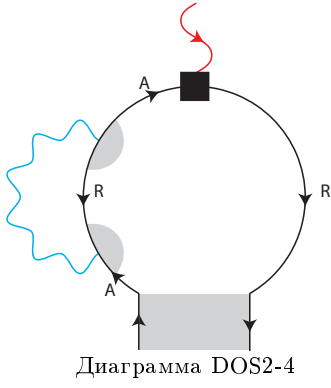
$$B_1^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] [G^A]^2 G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = -2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha (A_1 + A'_1) \mathcal{D}^2 \quad (95)$$

$$B_2^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}') G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}) = 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1^2 \mathcal{D}^2 \quad (96)$$

$$B_3^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}') (G^A)^2 G^R(i\Omega_k, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[-iq_\alpha \frac{p_F v_F}{2} \right] (G^A)^2 G^R = 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1' \mathcal{D}^2 \quad (97)$$

$$B_4^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha}{\tau} \right] [G^A]^2 G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha (2A_1 + A'_1) \mathcal{D}^2 - \pi\nu\tau^2 q_\alpha A_1 \mathcal{D}^2 \quad (98)$$

$$B_5^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha}{\tau} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}') G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}) = -2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1^2 \mathcal{D}^2 \quad (99)$$



$$B_6^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}') (G^A)^2 G^R(i\Omega_k, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha}{\tau} \right] (G^A)^2 G^R = -4i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1' \mathcal{D}^2 + \pi\nu\tau^2 q_\alpha A_1' \mathcal{D}^2 \quad (100)$$

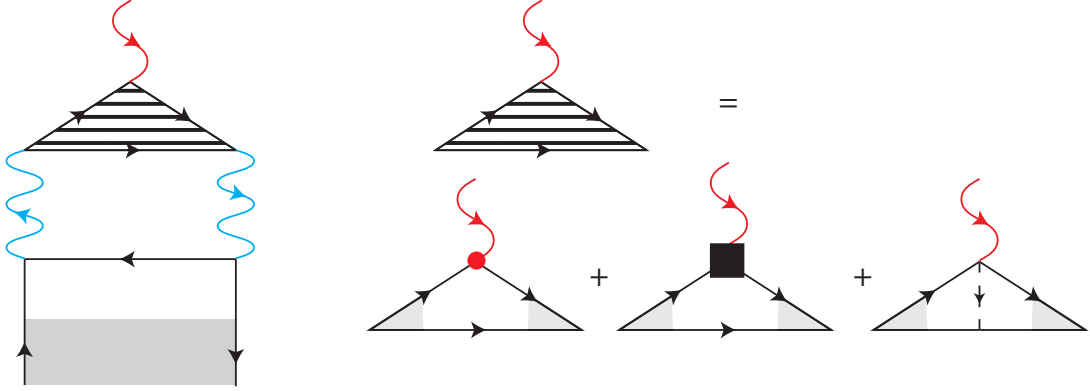
$$B_7^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \cdot 2\pi\nu\tau A_1 \cdot \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha - q_\alpha}{\tau} \right] G^A G^R G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = -2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1^2 \mathcal{D}^2 + \pi\nu\tau^2 A_1^2 \mathcal{D}^2 \quad (101)$$

$$B_8^{DOS2} = \mathcal{D}^2 \int (d\mathbf{p}') (G^A)^2 G^R(i\Omega_k, \mathbf{p}' + \mathbf{Q}) \int (d\mathbf{p}) \left[-\frac{p_\alpha - q_\alpha}{2\pi\nu\tau} \right] G^A(-\mathbf{p}) G^R(-\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \quad (102)$$

$$= 2i\pi\nu\tau^3 \varepsilon_F q_\alpha A_1' \mathcal{D}^2 - \pi\nu\tau^2 q_\alpha A_1' \mathcal{D}^2 \quad (103)$$

Д. AL диаграммы

Здесь мы лишь изобразим диаграммы, которые следует вычислить для получения ответа:



При этом, если пренебречь производной производной плотности состояний по энергии в электронном блоке, но учесть асимметрию в пропагаторе флуктуаций, то получим несущественный вклад, в нем будет содержаться лишняя малость типа $Q^2 l^2$. Главный вклад здесь возникает от учета $d\nu/dE$ в электронном блоке (подобно вычислению сверхпроводящего пропагатора в [6] и приложении (D)) и, как оказывается, он сокращает половину вклада MT+DOS в вершину фонон-диффузон.

Е. Полная вершина

Сперва выпишем полный электронный блок, сложив все MT и DOS диаграммы:

$$B^{MT+DOS}(\Omega_k > 0, Q) = -\pi\nu\tau^2 q_\alpha \mathcal{D}^2 [4A_1^2 - 3A_1 - 2A_1 + (1 + \Omega\tau)A_2] = 2\pi\nu\tau^2 q_\alpha \mathcal{D}, \quad (104)$$

где мы сделали разложение по импульсам, предполагая, что релевантные частоты и импульсы $\Omega_k\tau, Q^2 l^2 \ll 1$. Как мы указали, учет AL диаграмм ополовинивает ответ. Таким образом, полная вершина:

$$\Lambda^{total} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\nu\tau^2 q_\alpha T \sum_k \int (d\mathbf{Q}) \mathcal{D}(\Omega_k, Q) L(\Omega_k, Q) = \pi\nu\tau^2 q_\alpha \int_0^{\omega_D} (d\Omega_k) \int (d\mathbf{Q}) \frac{1}{\Omega_k\tau + \tau D Q^2} [L(\Omega_k, Q) - L(-\Omega_k, Q)] = \quad (105)$$

$$= \pi\nu\tau^2 q_\alpha \frac{1}{\nu\tau l^2} \int_0^{\omega_D} (d\Omega_k\tau) \int l^2(d\mathbf{Q}) \frac{1}{\Omega_k\tau + \tau D Q^2} \nu [L(\Omega_k, Q) - L(-\Omega_k, Q)] = \quad (106)$$

$$= \frac{\nu\tau q_\alpha}{4\pi\nu l^2} \int_0^{\omega_D} d(\Omega_k\tau) \int d(\tau D Q^2) \frac{1}{\Omega_k\tau + \tau D Q^2} \nu [L(\Omega_k, Q) - L(-\Omega_k, Q)]. \quad (107)$$

Для анализа выделенной безразмерной функции необходимо использовать явный вид пропагатора ([6], приложение (D)):

$$L(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = -\frac{1}{\nu \ln(\Omega_k\tau + \tau D Q^2)/(4\pi\tau T_c) + i\gamma\Omega_k}, \quad (108)$$

где $\gamma = \lambda^{-1} d \ln \nu / dE$. Это выражение справедливо при $T \ll \Omega, D Q^2 \ll \omega_D$ и $(\Omega_k d \ln \nu / dE) \ll 1$. Ниже мы обрезаем интегрирование по частоте на Дебаевской ω_D , считая, что на больших частотах сверхпроводящее взаимодействие отсутствует:

$$\int_0^{\omega_D \tau} d(\Omega_k \tau) \int d(\tau D Q^2) \frac{1}{\Omega_k \tau + \tau D Q^2} \nu [L(\Omega_k, Q) - L(-\Omega_k, Q)] = \int_0^{\omega_D \tau} dx \int dy \frac{1}{x+y} \cdot \frac{2i\gamma}{\tau} \frac{x}{\ln^2(x+y)/(4\pi\tau T_c)} = \quad (109)$$

$$= \frac{2i\gamma}{\tau} \int_0^{\omega_D \tau} \frac{x dx}{\ln(x+y)/(4\pi\tau T_c)} \cong \frac{2i\gamma}{\tau} \cdot \frac{(\omega_D \tau)^2}{2 \ln \omega_D / (4\pi T_c)} = \frac{i\gamma}{\tau} \frac{(\omega_D \tau)^2}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)}. \quad (110)$$

$$\Lambda^{total} = 2i\pi\nu\tau\varepsilon_F q_\alpha \cdot \frac{\gamma\omega_D^2}{2\varepsilon_F p_{Fl} \ln \omega_D / (4\pi T_c)} = 2i\pi\nu\tau\varepsilon_F q_\alpha \cdot \frac{1}{p_{Fl}} (\gamma\varepsilon_F) \frac{1}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)} \left(\frac{\omega_D}{\varepsilon_F} \right)^2. \quad (111)$$

$$\Lambda^{total} = 2i\pi\nu\tau \frac{p_F v_F}{d} q_\alpha \cdot \frac{1}{2g} (\gamma\varepsilon_F) \frac{1}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)} \left(\frac{\omega_D}{\varepsilon_F} \right)^2, \quad (112)$$

последняя формула приведена для двумерного (d=2) и квазидвумерного случая (d=3, в кондактанс входит толщина пленки) и в ней g есть безразмерный кондактанс системы в единицах e^2/h . Если асимметрия пропагатора связана с производной плотности состояний по энергии, то $\gamma = \lambda^{-1}(d \ln \nu / dE)$, где λ есть константа сверхпроводящего взаимодействия. Теперь составляя из двух вершин и диффузона непосредственно собственноэнергетическую часть (смотрите рис. 9):

$$\Sigma = -2 \cdot \Lambda(\mathbf{q}) \cdot T \cdot n \cdot \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{1}{\tau\omega_n + \tau D q^2} \Lambda(-\mathbf{q}) = -2\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{\omega_n}{\tau\omega_n + \tau D q^2} q_\alpha q_\beta \cdot \left[\frac{1}{g} (\gamma\varepsilon_F) \frac{1}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)} \left(\frac{\omega_D}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]^2. \quad (113)$$

Добавление также диаграммы со вставленным в диффузон Кулоновским пропагатором, как на рис. 10 (здесь мы ограничиваемся универсальным пределом) приводит эффективно к исчезновению члена $\omega_n \tau$ знаменателе. Кроме этого, аналитически продолжим и свернем с проектором на подпространство продольных фононов:

$$\Sigma = 2i\nu\tau \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \frac{\omega}{\tau D q^2} q^2 \cdot \left[\frac{1}{g} (\gamma\varepsilon_F) \frac{1}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)} \left(\frac{\omega_D}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]^2 = 2i \frac{\nu}{D} \omega \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \left[\frac{1}{g} (\gamma\varepsilon_F) \frac{1}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)} \left(\frac{\omega_D}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]^2. \quad (114)$$

Вклад в поток тепла будет пропорционален температуре в четвертой степени:

$$J_{int}(T_{el}, 0) = \frac{2\zeta(4)}{15\zeta(6)} \frac{d^2(d+2)}{d-1} \left[\frac{1}{g} (\gamma\varepsilon_F) \frac{1}{\ln \omega_D / (4\pi T_c)} \left(\frac{\omega_D}{\varepsilon_F} \right)^2 \right]^2 \frac{s^2}{v_F^2} \frac{1}{\tau^2 T_{el}^2} \cdot J_0(T_{el}, 0) \quad (115)$$

поток от фононов к электронам получается сменой электронной температуры на фононную, как и раньше, такая форма записи определяется лишь удобством. Полученный ответ определенно является оценкой, но в приложении (D) изложены соображения, оправдывающие такое грубое обращение со столь сильной расходимостью. Напомним, что J_0 дается формулой (56).

Заметим, что выше мы считали асимметрию пропагатора малой. Если это не так, например при достаточно большой $d\nu/E$, зависимость от ω_D становится логарифмической:

$$\int_0^{\omega_D} d(\Omega_k \tau) \int d(\tau D Q^2) \frac{1}{\Omega_k \tau + \tau D Q^2} \nu [L(\Omega_k, Q) - L(-\Omega_k, Q)] = \\ = \int_0^{\omega_D \tau} dx \int dy \frac{1}{x+y} \cdot \frac{2i\gamma}{\tau} \frac{x}{\ln^2(x+y)/(4\pi\tau T_c) + (\gamma/\tau)^2 x^2} \approx \frac{4i\pi\tau}{\gamma} \ln \gamma \omega_D. \quad (116)$$

$$\Sigma = 2i \frac{\nu}{D} \omega \left(\frac{p_F v_F}{d} \right)^2 \left[\frac{2\pi}{g} \frac{1}{\gamma \varepsilon_F} \ln \gamma \omega_D \right]^2, \quad (117)$$

$$J_{int}(T_{el}, 0) = \frac{2\zeta(4)}{15\zeta(6)} \frac{d^2(d+2)}{d-1} \left[\frac{2\pi}{g} \frac{1}{\gamma \varepsilon_F} \ln \gamma \omega_D \right]^2 \frac{s^2}{v_F^2} \frac{1}{\tau^2 T_{el}^2} \cdot J_0(T_{el}, 0). \quad (118)$$

Эти выражения следует использовать вместо (115) при условии $\gamma \omega_D \gg 1 \leftrightarrow d\nu/dE \gg \lambda\nu/\omega_D$

VII. ДИАГРАММЫ ТИПА СЛАБОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ФОНОНЫ

Везде выше шла речь в основном о продольных фононах. Но в самом конце мы отметим особенность и для поперечных фононов, возникающую в грязном металле. Эта поправка возникает от верных диаграмм, аналогичных тем, что дают слабую локализацию для проводимости и изображены они на рис. 12.

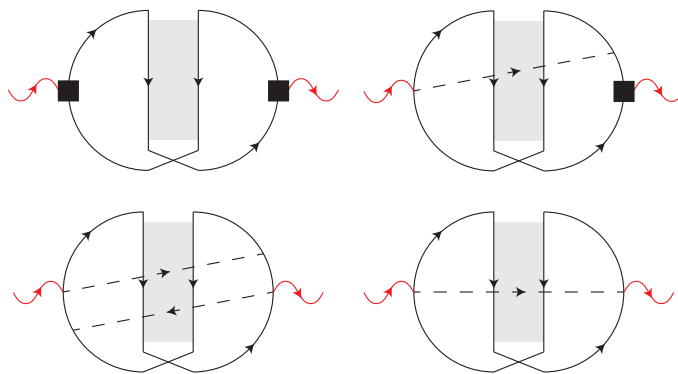


Рис. 12: Развернутые верные диаграммы. У второй диаграммы три симметричных партнера, а у третьей один.

Отличие от диаграмм, в которые вставляется диффузон, состоит в том, что верная диаграмма не расщепляет интегрирования по импульсам у двух вершин на два независимых. После простых вычислений, получим ответ:

$$\Sigma^{tr}(\omega, \mathbf{q}) = \Sigma_0^{tr}(\omega, \mathbf{q}) \cdot \frac{1}{2\pi g} \ln \frac{1}{\omega \tau}, \quad (119)$$

$$J_{fan}^{tr}(T_{el}, 0) = \frac{1}{2\pi g} \ln \frac{1}{\tau T_{el}} \cdot J_0^{tr}(T_{el}, 0), \quad (120)$$

где g есть безразмерный кондактанс системы. Подчеркнем, что поправка того же знака, что и обычный ответ в безпетлевом приближении. Ответы справедливы для любой размерности как электронов, так и фононов, – меняется лишь выражение для J_0 , которое следует использовать. Тем не менее мы рассматриваем только двумерный или квазидвумерный случай по отношению к куперону, при котором его можно считать двумерным. Для этого толщина пленки b должна быть $b \ll \sqrt{D/T}$, D – коэффициент диффузии, а сама поправка имеет логарифмический характер. J_0^{tr} дается выражением, указанным в [5] а Σ_0^{tr} – формулой (34).

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы показали, что в грязном металле при низких температурах может возникать значительное усиление потока тепла между электронной и фононной подсистемами. Кроме того, было показано, что поглощение ультразвука и поток тепла связаны с одной и той же величиной, – мнимой частью фононной собственноэнергетической части (14,56). Таким образом, зная одну величину, возможно делать выводы о второй. Усиление потока тепла (и ультразвука) может возникать в следующих случаях:

- Отклонения Кулоновского взаимодействия от универсального предела, в котором последнее равно обратному поляризованному оператору (формулы (61), (66), (67) например).
- Наличие взаимодействия в Куперовском канале (115).

В отдельных случаях усиление достигает значений $v_F^2/s^2 \sim 10^4$. Все эти случаи касаются лишь продольных фононов и связаны с описанной в тексте вершиной «фонон-диффузон». Отдельно стоит обнаруженное

- явление для поперечных фононов, подобное слаболокализационной поправке к проводимости.

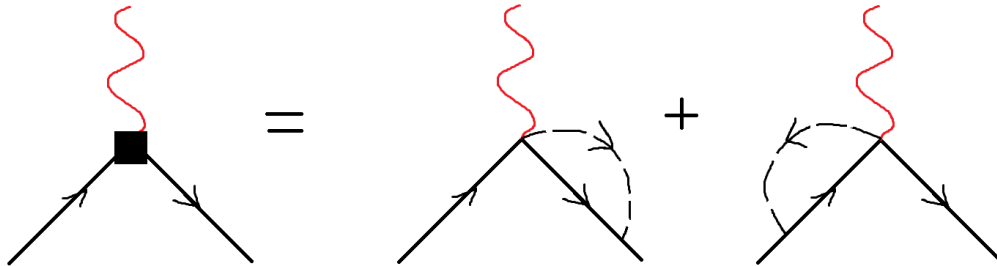
Но существенное отличие состоит в том, что для $\text{Im} \Sigma$ логарифмическая поправка *положительна*. В дипломе вычислен лишь однопетлевой вклад, но ввиду знака эффекта большой интерес составляет изучение дальнейшей эволюции поправки по мере увеличения беспорядка. Это будет являться предметом дальнейших исследований.

Приложение А: ЭЛЕКТРОН-ФОНОН-ПРИМЕСНАЯ ВЕРШИНА.

Как было уже указано ранее, гамильтониан электрон-фонон-примесного взаимодействия (25):

$$H_{e-ph-imp} = - \int (d\mathbf{r}) \partial_\alpha [u_\alpha(\mathbf{r})U(\mathbf{r})] \bar{\psi}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (\text{A1})$$

Среди всех возможных корреляций примесного потенциала в диаграммах есть два особых случая. Первым есть тот, который мы везде выше обозначали как черный квадрат:



Он отвечает присоединению примесной линии на одну из ближайших функций Грина, входящую и исходящую из вершины. Ответ для нее зависит от знаков энергии Гриновских функций:

$$\Gamma_\alpha^{AR} = \frac{i}{2\pi\nu\tau} [(p_\alpha - q_\alpha/2)G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - (p_\alpha + q_\alpha/2)G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r})] = \quad (\text{A2})$$

$$= \frac{i}{\pi\nu\tau} [p_\alpha i \text{Im} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - (iq_\alpha/2) \text{Re} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r})] = \frac{p_\alpha}{\tau} - \frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} \text{Re} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (\text{A3})$$

$$\Gamma_\alpha^{RA} = -\frac{p_\alpha}{\tau} - \frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} \text{Re} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (\text{A4})$$

$$\Gamma_\alpha^{RR(AA)} = -\frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} G^{R(A)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \quad (\text{A5})$$

Как видим, везде в эту вершину входит $\text{Re} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r})$, но эта величина, как станет ясно ниже, сокращается при учете экранировки.

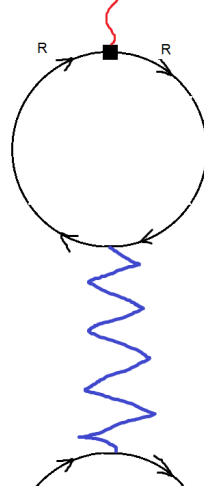
Для вычисления этой экранированной электрон-фонон-примесной вершины мы воспользуемся Келдышевой техникой, поскольку нам необходимо аккуратно обойтись с интегралами от трех G^R функций. Выражение для статической петли предшествующей Кулоновскому пропагатору:

$$-\frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} \int (d\varepsilon) f(\varepsilon) \int (d\mathbf{r}) [G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r})G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G^A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r})G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)], \quad (\text{A6})$$

где $f(\varepsilon)$ есть функция распределения электронов. Легко увидеть, что следующее уравнение является тождеством:

$$\int (d\mathbf{r}_1) G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = -\frac{d}{d\varepsilon} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{A7})$$

Эквивалентно, учитывает все возможные усреднения по беспорядку, в том числе диаграммы с пересекающимися примесными линиями. Чтобы это равенство применить, нам необходимо выполнить простой трюк, а именно усреднить уравнение (A6) по свободной координате:



$$\frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} \int (d\varepsilon) f(\varepsilon) \frac{1}{V} \int (d\mathbf{r}_1) \int (d\mathbf{r}) [G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G^A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}) G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)] = \quad (\text{A8})$$

$$= -\frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} \int (d\varepsilon) f(\varepsilon) \frac{1}{V} \int (d\mathbf{r}) [G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \partial_E G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \partial_E G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r})] = \quad (\text{A9})$$

$$= \frac{iq_\alpha}{8\pi^2\nu\tau} \frac{1}{V} \int (d\mathbf{r}) [(G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}))^2 - (G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}))^2]_{\varepsilon=0} \quad (\text{A10})$$

где мы проинтегрировали по частям. Несложно проверить, что Кулоновский пропагатор есть $-1/2\nu(0)$ (двойка от спина, но она сократится со спиновой двойкой, опущенной в вычисляемой петле). Также

$$\langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0} - \langle G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0} = -2i\pi\nu(0), \quad (\text{A11})$$

где $\nu(0)$ есть точная плотность состояний на уровне ферми. Таким образом, усредняя ответ для экранированной электрон-фонон-примесной вершины, состоящей из описанной петли и кулоновского пропагатора, получаем:

$$\Gamma_{e-ph-imp-scr} = \frac{iq_\alpha}{8\pi^2\nu\tau} \langle [G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r})]^2 - [G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r})]^2 \rangle_{\varepsilon=0} \cdot \left(-\frac{1}{\nu(0)} \right). \quad (\text{A12})$$

Ограничиваясь теперь приближением без самопересечений, среднее квадрата функции Грина представим как квадрат среднего, получая:

$$\Gamma_{e-ph-imp-scr} = \frac{iq_\alpha}{8\pi^2\nu\tau} [\langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0} - \langle G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0}] [\langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0} + \langle G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0}] \cdot \left(-\frac{1}{\nu(0)} \right) = \quad (\text{A13})$$

$$= \frac{iq_\alpha}{8\pi^2\nu\tau} [-2i\pi\nu(0)] [\langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0} + \langle G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0}] \cdot \left(-\frac{1}{\nu(0)} \right) = \frac{iq_\alpha}{2\pi\nu\tau} \text{Re} \langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \rangle_{\varepsilon=0}. \quad (\text{A14})$$

В этом ответе ν и τ – привычная плотность состояний и время рассеяния на уровне ферми для достаточно чистого металла.

Теперь мы видим, что полученный ответ говорит об отсутствии плохо определенной действительной части функции Грина в полном ответе для электрон-фонон-примесной вершины, сумме (A4,A5) и (A14):

$$(\Gamma_{scr}^{RA})_{\alpha} = -\frac{p_{\alpha}}{\tau}, \quad (A15)$$

$$(\Gamma_{scr}^{RR(AA)})_{\alpha} = \mp \frac{q_{\alpha}}{2\tau}. \quad (A16)$$

Следует заметить, что сокращение имеет место только в универсальном пределе и формально это приводит к тому, что при рассмотрении вершины фонон-диффузон появляются члены, не описанные нами в основном тексте, но как легко убедиться, они имеют дополнительную малость по параметру $(pFl)^{-1}$ и мы их не рассматриваем.

Приложение В: ПРОИЗВОДНАЯ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ПО ЭНЕРГИИ.

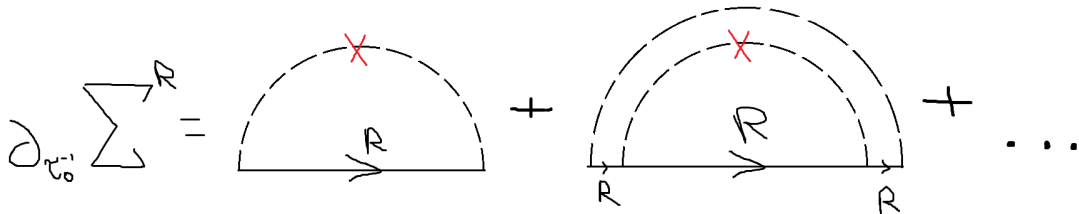
1. Функция Грина

С одной стороны, перенормировка химпотенциала для электронов обычно не существенна и ее просто выбрасывают из рассмотрения, полагая

$$G^R = \frac{1}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau}} \quad (B1)$$

с $\xi = p^2/2m - p_F^2/2m$. С другой стороны, как выясняется, рассматриваемая задача не из таких. После включения примесного потенциала возникнет поправка к химпотенциалу и она существенна: она обеспечивает *сохранение плотности частиц*.

Чтобы получить функцию Грина в грязном металле (в универсальном пределе), найдем для нее уравнение эволюции по мере изменения беспорядка. Для этого продифференцируем по нему, предполагая, что мы меняем коррелятор $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = 1/(2\pi\nu\tau_0)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, меняя время рассеяния τ_0 :



причем на рисунке приведена лишь собственноэнергетическая часть. Как и в приложении А мы будем рассматривать лишь непересекающиеся диаграммы.

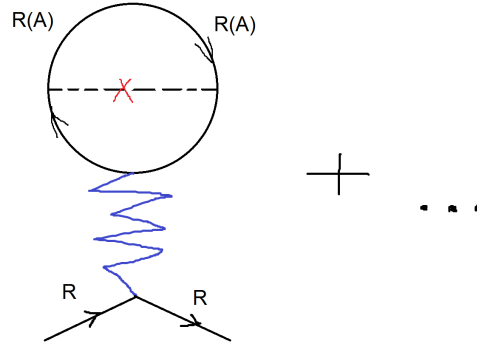
$$\partial_{\tau_0^{-1}} \Sigma = \frac{1}{2\pi\nu} \int (d\mathbf{p}) G^R(\mathbf{p}) \cdot \left[1 + \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int (d\mathbf{k}) G^R(\mathbf{k}) G^R(\mathbf{k}) \right] \quad (B2)$$

Расходимость же, возникающую при взятии интеграла от одной функции Грина, мы выбрасывать не будем. Вместо этого мы покажем, что она исчезает при учете экранировки воздействия примесного потенциала, подобно тому, как исчезала расходимость в экранированной электрон-фонон-примесной вершине:

Вычисления идентичны проведенным в приложении А и сводятся к тому, что в уравнении на Σ мы должны оставить лишь мнимую часть функции Грина:

$$\partial_{\tau_0^{-1}} \Sigma = \frac{1}{4\pi\nu} \int (d\mathbf{p}) [G^R(\mathbf{p}) - G^A(\mathbf{p})] \cdot \left[1 + \frac{1}{2\pi\nu\tau} i\pi \frac{d\nu}{dE} \right] \quad (B3)$$

Предполагая дальше, что функция Грина имеет вид



$$G^R = \frac{1}{\varepsilon - \xi - a + \frac{i}{2\tau}} \quad (\text{B4})$$

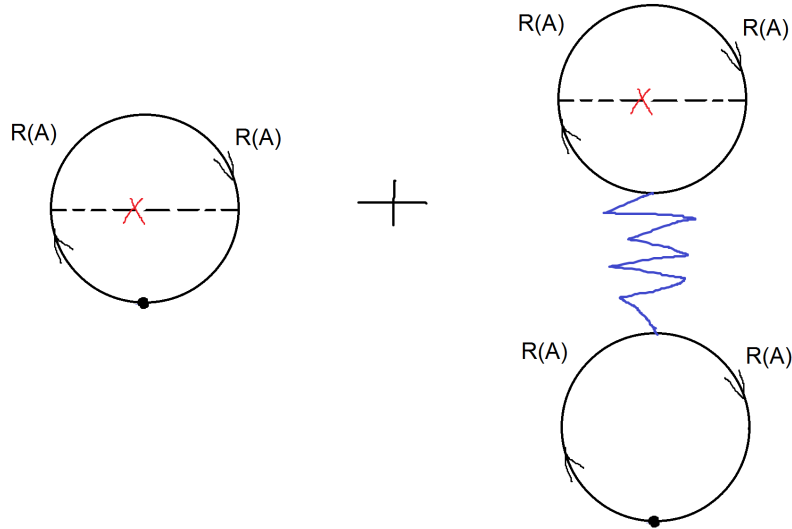
и вычисляя ее при $\varepsilon = 0$, получим

$$\frac{d}{d\tau_0^{-1}} \frac{1}{\tau} = i, \quad (\text{B5})$$

$$\frac{da}{d\tau_0^{-1}} = \frac{1}{4\nu\tau_0} \frac{d\nu}{dE}, \quad (\text{B6})$$

$$G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \left[\varepsilon - \frac{1}{8\nu\tau_0^2} \frac{d\nu}{d\varepsilon} - \xi - \frac{i}{2\tau} \right], \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon \right) \quad (\text{B7})$$

где мы добавили главную энергетическую зависимость. Следует сказать, что функцию Грина можно было бы вычислить и отсуммировав весь ряд из R-R блоков, охватив таким образом все непересекающиеся диаграммы, но мы ограничились линейным по $d\nu/dE$ порядком. Концентрация электронов не меняется, – если мы изобразим соответствующие диаграммы, то увидим, что они действительно себя сокращают:



вторая диаграмма отличается наличием обычного поляризационного оператора и Кулоновского пропагатора, которые вместе дают знак $(-)$, приводя к сокращению диаграмм. И последнее: в найденной функции Грина мы рассматривали лишь поправки связанные с наличием $d\nu/dE$, по сути предполагая ее большой. Различные диаграммы с пересечениями примесных линий могут дать вклад в том же порядке по pFl , но они не будут связаны с параметром $d\nu/dE$.

2. Вершина фонон-диффузон

Если попробовать вычислить эту вершину при наличии $d\nu/dE$ и не считаться с описанной поправкой к химпотенциалу, то будет конечный ответ, который мог бы дать значительный вклад в поток тепла от электронов к фононам. Но как можно догадаться, это не верно, – учет описанной поправки приводит к занулению вершины в главном порядке, как было без $d\nu/dE$. Ниже мы приведем правильный способ найти эту вершину; как пример будет использован трехмерный случай, но это не существенно.

Электрон-ионная часть имеет знакомое уже нам выражение, не получая поправок от наличия производной плотности состояний по энергии:

$$\Lambda_{\alpha}^{ion} = \int (dp) [-iq_{\alpha}] G^A(\mathbf{p}) G^R(\mathbf{p}) = \frac{p_F v_F}{3} [-iq_{\alpha}] \cdot 2\pi\nu\tau, \quad (\text{B8})$$

В электрон-фонон-примесной части мы выделили красным цветом члагаемые, происходящие от сдвига химпотенциала:

$$\Lambda_{\alpha}^{imp} = \int (dp) \left[\frac{p_{\alpha}}{\tau} u_{\alpha} \right] G^A(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) G^R(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2) = \quad (\text{B9})$$

$$= \frac{iq_{\alpha}}{12\pi^2\tau^2} \int d\xi p^3 \cdot \frac{1}{[(\xi+a)^2 + 1/4\tau^2]^2} = \frac{iq_{\alpha}}{12\pi^2\tau^2} \int d\xi \frac{p_F^3 + 6\pi^2\nu\xi + 3\pi^2\frac{d\nu}{d\varepsilon}\xi^2}{[(\xi+a)^2 + 1/4\tau^2]^2} = \quad (\text{B10})$$

$$= \frac{iq_{\alpha}}{12\pi^2\tau^2} \int d\xi \frac{p_F^3 + 6\pi^2\nu(\xi-a) + 3\pi^2\frac{d\nu}{d\varepsilon}(\xi-a)^2}{[\xi^2 + 1/4\tau^2]^2} = \frac{iq_{\alpha}}{12\pi^2\tau^2} \int d\xi \frac{p_F^3 + 6\pi^2\nu(\xi-a) + 3\pi^2\frac{d\nu}{d\varepsilon}\xi^2}{[\xi^2 + 1/4\tau^2]^2} = \quad (\text{B11})$$

$$= \frac{iq_{\alpha}}{12\pi^2\tau^2} \left[p_F^3 \cdot (2\tau)^3 \frac{\pi}{2} - 6\pi\nu a \cdot (2\tau)^3 \frac{\pi}{2} + 3\pi^2 \frac{d\nu}{d\varepsilon} \cdot \pi\tau \right] = iq_{\alpha} \frac{p_F^3}{3\pi} \tau - 2iq_{\alpha}\nu\tau a + \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} = \quad (\text{B12})$$

$$= \frac{iq_{\alpha} p_F \cdot 2\pi^2\nu v_F}{3\pi} \tau - 2iq_{\alpha}\nu\tau a + \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} = iq_{\alpha} \frac{p_F v_F}{3} \cdot 2\pi\nu\tau - 2iq_{\alpha}\nu\tau a + \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon}. \quad (\text{B13})$$

И весь блок:

$$\Lambda_{\alpha} = -iq_{\alpha} \frac{p_F v_F}{3} \cdot 2\pi\nu\tau + \left[iq_{\alpha} \frac{p_F v_F}{3} \cdot 2\pi\nu\tau - 2iq_{\alpha}\nu\tau a + \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} \right] = \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} - 2iq_{\alpha}\nu\tau a \quad (\text{B14})$$

Вспоминая, что $a = (1/8\nu\tau_0^2)(d\nu/d\varepsilon)$

$$\Lambda_{\alpha} = \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} - 2i\nu q_{\alpha}\tau a = \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} - \frac{i\pi q_{\alpha}}{4\tau} \frac{d\nu}{d\varepsilon} = 0 \quad (\text{B15})$$

Приложение С: НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.

$$A_1(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{1 + \Omega_k\tau + iQ^2 l^2 / 2p_F l + iQl(1 + i/p_F l) \cos \varphi}, \quad (\text{C1})$$

$$A_1(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Omega_k\tau + iQ^2 l^2 / 2p_F l)^2 + Q^2 l^2 (1 + i/p_F l)^2}}. \quad (\text{C2})$$

В части случаев мы захотим оставить лишь ведущую по $p_F l$ составляющую:

$$A_1^0(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \Omega_k\tau)^2 + Q^2 l^2}}. \quad (\text{C3})$$

К этой величине сводятся например интегралы

$$\int (d\mathbf{p}) G^A(\mathbf{p}) G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = 2\pi\nu\tau A_1, \quad \int (d\mathbf{p}) G^A(\mathbf{p}) G^R(\mathbf{p}) G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = -2i\pi\nu\tau^2 A_1. \quad (\text{C4})$$

2.

$$A_2(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{[1 + \Omega_k\tau + iQ^2l^2/2p_Fl + iQl(1 + i/p_Fl) \cos \varphi]^2}, \quad (\text{C5})$$

$$A_2(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \frac{1 + \Omega_k\tau + iQ^2l^2/2p_Fl}{[(1 + \Omega_k\tau + iQ^2l^2/2p_Fl)^2 + Q^2l^2(1 + i/p_Fl)^2]^{3/2}}. \quad (\text{C6})$$

$$A_2^0(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \frac{1 + \Omega_k\tau}{[(1 + \Omega_k\tau)^2 + Q^2l^2]^{3/2}}. \quad (\text{C7})$$

К этой величине сводится например интеграл

$$\int (d\mathbf{p}) G^A(\mathbf{p}) [G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q})]^2 = -2i\pi\nu\tau A_2. \quad (\text{C8})$$

3.

$$A'_1(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1 + (1/p_Fl)Ql \cos \varphi}{[1 + \Omega_k\tau + iQ^2l^2/2p_Fl + iQl(1 + i/p_Fl) \cos \varphi]^2}, \quad (\text{C9})$$

$$A'_1(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = \frac{1 + \Omega_k\tau + iQ^2l^2/2p_Fl}{[(1 + \Omega_k\tau + iQ^2l^2/2p_Fl)^2 + Q^2l^2(1 + i/p_Fl)^2]^{3/2}}. \quad (\text{C10})$$

$$(A'_1)^0(i\Omega_k, \mathbf{Q}) = A_2^0(i\Omega_k, \mathbf{Q}). \quad (\text{C11})$$

К этой величине сводится например интеграл

$$\int (d\mathbf{p}) [G^A(\mathbf{p})]^2 G^R(i\Omega_k, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) = 2i\pi\nu\tau^2 A'_1. \quad (\text{C12})$$

Приложение D: СВЕРХПОВОДЯЩИЙ ПРОПАГАТОР

Суммируя Куперовскую лестницу получается стандартное выражение. Что мы сделаем здесь более подробно, так это вычислим поляризационный оператор с учетом наличия производной плотности состояний по энергии. В работе [6] имеется опечатка, – чтобы получить найденное для пропагатора выражение необходимо учесть $d\nu/dE$ везде, не только в зависимости времени рассеяния $\tau(\varepsilon)$ от энергии, что они на самом деле и сделали.

$$L(i\Omega_n, \mathbf{Q}) = \frac{1}{-\lambda^{-1} + \Pi(i\Omega_n, \mathbf{Q})} \quad (\text{D1})$$

Для вычисления поляризационного оператора Π главным образом нам необходимо аккуратно сосчитать куперон:

$$C(i\varepsilon_l + i\Omega_n, -i\varepsilon_l, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \left[1 - \frac{1}{2\pi\nu\tau} \int (d\mathbf{p}) G^A(-i\varepsilon_l, -\mathbf{p}) G^R(i\varepsilon_l + i\Omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \right] \quad (\text{D2})$$

Получим мы уже указанное в [] выражение:

$$C(i\varepsilon_l + i\Omega_n, -i\varepsilon_l, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \frac{1 + \frac{i}{2\nu} \frac{d\nu}{dE} \Omega_n}{|2\varepsilon_l + \Omega_n| + DQ^2}, \quad (\text{D3})$$

наиболее важное в этом выражении это то, что в числителе Ω_n входит без модуля. В итоге поляризационный оператор:

$$\begin{aligned} \Pi(i\Omega_n, \mathbf{Q}) = T \sum_{l(-\infty, -n-1] \cup [0, +\infty)} \int (d\mathbf{p}) \langle G^M(-i\varepsilon_l, -\mathbf{p}) G^M(i\varepsilon_l + i\Omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \rangle_{disorder} + \\ + T \sum_{l[-n, 0)} \int (d\mathbf{p}) \langle G^M(-i\varepsilon_l, -\mathbf{p}) G^M(i\varepsilon_l + i\Omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{Q}) \rangle_{disorder}. \end{aligned} \quad (\text{D4})$$

Для ясности мы предположили, что $\Omega_n > 0$. В записанном выражении выделена вторая сумма, для которой функции Грина будут иметь одинаковые знаки энергий (для $\Omega_n > 0$ это $R - R$, для $\Omega_n < 0$ $A - A$). Такие интегралы, как мы теперь знаем, отличны от нуля и пропорциональны $d\nu/dE$. Но поскольку в этой работе мы сосредоточены на анализе «умеренных» импульсов и частот, то это слагаемое окажется неважным, оно не будет содержать логарифмического усиления $\ln(\omega_D/T)$, поскольку суммирование в нем ограничивается частотой Ω_n и не требует регуляризации. В итоге:

$$\Pi(i\Omega_n, \mathbf{Q}) = - \left(1 + \frac{i}{2\nu} \frac{d\nu}{dE} \Omega_n \right) \left[\ln \frac{|\Omega_n| + DQ^2}{4\pi T_c} - \frac{1}{\lambda} \right] \quad (\text{D5})$$

$$L(i\Omega_n, \mathbf{Q}) = -\frac{1}{\nu} \left[\ln \frac{\Omega_n + DQ^2}{4\pi T_c} + \frac{i}{2\nu} \frac{d\nu}{dE} \Omega_n \left(\frac{1}{\lambda} - \ln \frac{\Omega_n + DQ^2}{4\pi T_c} \right) \right]^{-1}, \quad (\text{D6})$$

Записанное выражение указывает на то, что при импульсах и частотах $\Omega_n \sim \omega_D$, $Q \sim \sqrt{\omega_D/D}$ коэффициент при асимметричной части значительно уменьшается, если не обращается в нуль. Тем не менее, в этой области необходимо учитывать как опущенный вклад от $R - R$ интегрирований, так и $d\nu/dE$ в электронном блоке. Кроме того, в этой области мы явно сталкиваемся с обрезкой по частотам, выходя за пределы игрушечной модели, где мы просто ставим верхний предел равным ω_D (это прекрасно работает только пока $\Omega_n, DQ^2 \ll \omega_D$). Подводя итог – в вершине фонон-диффузон мы использовали «умеренно-частотную» асимптотику пропагатора:

$$L(i\Omega_n, \mathbf{Q}) = -\frac{1}{\nu} \left[\ln \frac{|\Omega_n| + DQ^2}{4\pi T_c} + \frac{i}{2\lambda\nu} \frac{d\nu}{dE} \Omega_n \right]^{-1}, \quad T \ll \Omega, DQ^2 \ll \omega_D, \quad (\text{D7})$$

но видно, что возникшая в вычислениях основного текста сильная квадратичная расходимость действительно должна исчезать на частотах порядка Дебаевской. В этом смысле наш результат, конечно, есть лишь оценка, для более точного ответа необходим точный вид пропагатора, с выбором вполне конкретной физической модели для сверхпроводящего взаимодействия.

¹ M. E. Gershenson, Yu. B. Khavin, D. Reuter, P. Schafmeister, and A. D. Wieck, Hot-electron effects in two-dimensional hopping conductivity with a large localization length, Phys. Rev. Lett. 85, 1718 (2000).

- ² M. Oviaia, B. Sacepe, and D. Shahar, Electron-Phonon Decoupling in Disordered Insulators, *Phys. Rev. Lett.* 102, 176802 (2009).
- ³ A. Schmid, *Z. Phys.* 259, 421, 1973.
- ⁴ M. Yu. Reizer and A. V. Sergeev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 92, 2291 1987, *Sov. Phys. JETP* 65 6, 1291, 1987.
- ⁵ Jumps in Current-Voltage Characteristics in Disordered Films Boris L. Altshuler, Vladimir E. Kravtsov, Igor V. Lerner, and Igor L. Aleiner, *Phys. Rev. Lett.* 102, 176803 (2009).
- ⁶ Karen Michaeli, Konstantin S. Tikhonov, Alexander M. Finkel'stein, The Hall Effect in Superconducting Films, arXiv:1203.6121 (2012)