

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Выпускная квалификационная работа на степень магистра
**Мезоскопические флуктуации времени
энергетической релаксации в квантовой точке**

Студент 724 гр. Козий Владислав Александрович

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Скворцов М.А.

Черноголовка 2013 г.

Содержание

1. Введение	2
2. Постановка задачи	5
3. Вывод выражения для $\gamma(\varepsilon, T)$	7
3.1. Техника Келдыша: функциональное представление	7
3.2. Кинетическое уравнение	8
3.3. Модификация келдышевской техники	10
4. Результат Сивана, Имри и Аронова	11
5. Мезоскопические флуктуации времени неупругого рассеяния	14
5.1. Дальнейшие вклады в собственно-энергетическую часть	14
5.2. Непертурбативное усреднение по беспорядку	16
5.2.1. Парный коррелятор $\langle \Delta G(\varepsilon) \Delta G(\varepsilon - \omega) \rangle$	17
5.2.2. Усреднение 8 функций Грина: интегрирование по быстрым модам	17
5.2.3. Интегрирование по медленным модам	20
5.3. Приводимая часть коррелятора $\langle \gamma(\varepsilon, T) \gamma(\varepsilon', T) \rangle$	24
5.4. Неприводимая часть коррелятора $\langle \gamma(\varepsilon, T) \gamma(\varepsilon', T) \rangle$	27
5.4.1. Качественная картина	27
5.4.2. Вычисления	31
5.4.3. Результат	34
6. Заключение	35
А. Выражения $Y_{abcd}(\varepsilon, \varepsilon', \omega, \mathbf{q})$	36
Б. Правила слияния для нульмерного случая	36
В. Упругий диффузон с учетом электрон-электронного взаимодействия	37
Список литературы	41

1. Введение

Рассмотрим маленькую металлическую гранулу с примесями при наличии электрон-электронного взаимодействия. Одночастичные состояния (которые определяются частью гамильтониана без взаимодействия) в такой грануле не являются собственными состояниями системы. В связи с этим представляет определенный интерес задача о нахождении времени жизни таких состояний. Впервые данный вопрос касательно нульмерных систем рассматривался в работе [1], где для времени неупругой релаксации возбуждения с энергией ε был получен следующий результат:

$$\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon) \equiv \frac{1}{\tau(\varepsilon)} = \frac{\Delta \varepsilon^2}{\pi E_2^2}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta = (\nu V)^{-1}$ — среднее расстояние между одночастичными уровнями (ν — плотность состояний на уровне Ферми, а V — объем гранулы), и в целях дальнейшего использования мы определили величины

$$E_n \equiv \left(\sum'_m \frac{1}{(Dq_m^2)^n} \right)^{1/n} \sim E_{\text{Th}}, \quad (2)$$

где D — коэффициент диффузии, а q_m^2 — ненулевые собственные значения оператора Лапласа в грануле, $-\nabla^2 \psi_m(\mathbf{r}) = q_m^2 \psi_m(\mathbf{r})$, с граничными условиями фон Неймана: $\mathbf{n} \nabla \psi|_{\Gamma} = 0$. Несложно заметить, что все E_n по порядку величины совпадают с энергией Таулесса $E_{\text{Th}} = \hbar D / L^2$ (обратным временем диффузии до границы гранулы с линейным размером L): $E_n = C_n E_{\text{Th}}$, где C_n — зависящий от геометрии образца численный коэффициент порядка 1.

Результат (1) справедлив для не слишком возбужденных уровней $\varepsilon \ll E_{\text{Th}}$ (что и означает, что система нульмерная). Отсюда видно, что для таких возбуждений спектр оказывается дискретным, т.е. $\gamma \ll \Delta$, что находится в полном соответствии с экспериментальными результатами [2].

Этот результат, однако, на первый взгляд не является самосогласованным, что было замечено в [3]. Действительно, вычисления [1] фактически опирались на золотое правило Ферми, которое справедливо в случае непрерывного спектра. Однако же полученный результат говорит о том, спектр системы является дискретным. Данное противоречие

было разрешено в [4]. В частности, авторами было указано, что золотое правило применимо, когда спектр **конечных** состояний является непрерывным. Но при распаде одночастичных возбуждений конечными состояниями являются трехчастичные состояния: две частицы и дырка (свободное состояние под уровнем Ферми). Среднее расстояние между соответствующими трехчастичными уровнями намного меньше:

$$\Delta_3(\varepsilon) \sim \Delta^3/\varepsilon^2 \ll \Delta \quad (3)$$

(рассматриваются возбуждения с энергиями $\varepsilon \gg \Delta$). Таким образом, золотое правило должно быть справедливо, покуда выполняется соотношение $\gamma(\varepsilon) \gg \Delta_3(\varepsilon)$. Исходя из этой оценки, формула (1) должна быть справедлива для энергий

$$\varepsilon > \varepsilon^* = \Delta\sqrt{g}, \quad (4)$$

где $g = E_{\text{Th}}/\Delta$ — безразмерный кондактанс гранулы. Поскольку рассматриваются системы с $g \gg 1$, то в интервале $\Delta < \varepsilon < \varepsilon^*$ все еще много состояний, которые не описываются золотым правилом Ферми.

Используя отображение на задачу о локализации на дереве Кейли [5], авторами [4] был сделан вывод, что на энергиях порядка ε^* (с точностью до логарифмического множителям) происходит фазовый переход между локализованным и делокализованным режимами в фоковском пространстве многочастичных состояний. Локализованный режим (при $\varepsilon \ll \varepsilon^*$) соответствует ситуации, когда слэтеровские детерминанты, составленные из точных одночастичных состояний, близки к точным многочастичным состояниям системы. В этом режиме практически не происходит перемешивания исходного одночастичного возбуждения с многочастичными состояниями в фоковском пространстве. Фактически, в этом случае одночастичные состояния имеют значительное перекрытие лишь с одним (или с несколькими) точными собственными многочастичными состояниями. Как следствие, ширины таких уровней равны нулю.

В противоположность этому, ширины уровней в делокализованной области (при $\varepsilon \gg \varepsilon^*$) отличны от нуля, и в этом случае одночастичные возбуждения эффективно перекрываются с большим числом точных многочастичных состояний, что приводит к формированию лоренцевского пика в плотности одночастичных состояний (см. рис. 1).

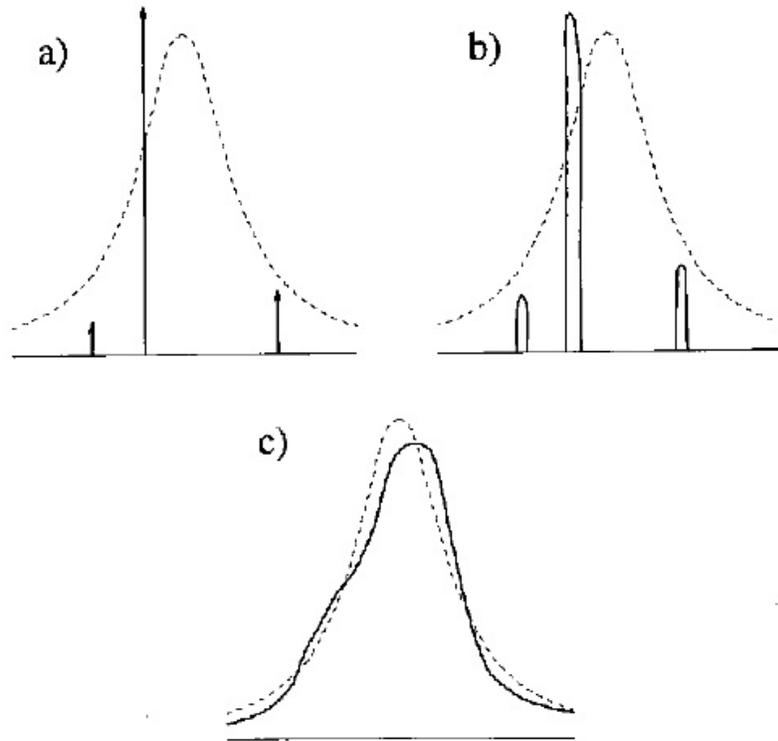


Рис. 1. Схематическое изображение одночастичной плотности состояний при различных энергиях, взятое из [6]. Штрихованная линия демонстрирует усредненную по реализациям беспорядка плотность состояний, имеющую форму лоренцевских пиков. (a) Локализованная область, в которой почти весь спектральный вес сконцентрирован в одном δ -пике. (b) Промежуточная область. (c) Делокализованная область, в которой плотность состояний лишь слегка отличается от лоренцевских пиков.

В дальнейших работах [6, 7, 8, 9] было показано, что в квантовой точке следует ожидать кроссовер, а не фазовый переход. Это связано с неприменимостью использованного в [4] приближения дерева Кейли для состояний в квантовой точке в силу зависимости числа ветвления K_n от номера поколения n . Кроме того, строго говоря, в конечной системе все состояния являются локализованными. Однако, в силу экспоненциально малого эффективного расстояния между многочастичными состояниями, которое может быть оценено как $\exp(-\pi\sqrt{2\varepsilon/3\Delta})$ [10], уже очень слабая связь с внешним резервуаром приводит к конечной ширине уровня. Таким образом, идея авторов [4] о том, что спектр одночастичных возбуждений имеет качественно разную картину при больших (лоренцевские пики) и при малых (отдельные δ -функциональные пики) энергиях, является качественно верной. Позже эта концепция была применена для описания фазового перехода металл-изолятор в бесконечных системах взаимодействующих электронов [11, 12].

2. Постановка задачи

Нашей задачей является обнаружение признаков описанных выше эффектов со стороны высоких энергий. В частности, нас будут интересовать мезоскопические флуктуации обратного времени неупругого рассеяния (ширины соответствующего одночастичного уровня) в той области, где все еще применимо золотое правило. Следует ожидать, что при приближении к некоторой пороговой энергии (предположительно, это энергия ε^*) среднеквадратичные флуктуации будут порядка средней ширины уровня, предсказываемой формулой (1). Это и будет означать, что ширина уровней перестает быть самоусредняемой величиной. Для большей общности мы будем рассматривать систему при ненулевой температуре T . Мы будем интересоваться регионом, где температура и энергия возбуждения не превосходят энергию Таулесса: $\max\{\varepsilon, T\} \ll E_{\text{Th}}$.

В отличие от предложенного в работе [4] «решеточного» подхода, основанного на работе с точными состояниями в неупорядоченной системе, которые перемешиваются кулоновским взаимодействием, мы будем работать в рамках кинетического уравнения для электронов в грязном металле. В рамках такого подхода, усредняя по быстрым пространственным модам, мы сможем точно вывести выражения, которые в «решеточ-

ном» подходе имеют смысл корреляторов матричных элементов кулоновского взаимодействия и считаются заданными.

Применяемый нами подход, основанный на использовании кинетического уравнения с последующим усреднением по беспорядку, в рассматриваемой области энергий $\max\{\varepsilon, T\} \ll E_{\text{Th}}$ сталкивается с существенными трудностями. Проблема заключается в том, что учет дискретности уровней, которые хорошо разрешены в этом пределе ($\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon) \ll \Delta$), требует непertурбативного усреднения по беспорядку. Эта часть вычислений будет проделана в рамках суперсимметричной сигма-модели [13].

Логика вычислений заключается в следующем. В нулевом приближении уровни получают неупругую ширину, даваемую формулой (1). Соответственно, нульмерные (с нулевым импульсом) диффузоры приобретают затухание порядка $\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon)$. Далее, при учете петлевых поправок, эта ширина войдет в знаменатель, аналогично тому, как это происходило в задаче о кинетике невзаимодействующей квантовой точки во внешнем поле [14, 15]. Таким образом, при уменьшении энергии вклад петлевой поправки к квазиклассическому результату будет расти и при некоторой энергии окажется порядка затравочного. Как мы увидим ниже, эта энергия по порядку величины совпадает с ε^* .

В заключение, перечислим предположения относительно квантовой точки. Для простоты мы будем интересоваться случаем унитарной симметрии (не рассматриваем куперовские степени свободы). Мы считаем, что электрон-электронное взаимодействие описывается кулоновским экранированным потенциалом (в приближении случайных фаз) в универсальном пределе (10), (11). Важно иметь в виду, что в силу электронейтральности гранулы, кулоновские моды имеют ненулевой импульс (нулевая мода нейтрализуется положительным фоном). Это означает, что, хоть мы и интересуемся нульмерной геометрией, нам необходимо будет аккуратно учесть вклад от диффузных мод, имеющих ненулевой импульс. С учетом последующего непertурбативного учета нулевых мод, процедура пертурбативного учета ненулевых мод концептуально аналогична примененной в работе [16]. Наконец, мы будем рассматривать общий случай произвольного спинового вырождения s .

3. Вывод выражения для $\gamma(\varepsilon, T)$

3.1. Техника Келдыша: функциональное представление

Мы будем пользоваться келдышевской техникой [17] в представлении функционального интеграла [18]. Действие системы после келдышевского поворота имеет вид

$$S = \int dt \left\{ \int d\mathbf{r} \psi^+(\mathbf{r}) \left(\hat{G}_0^{-1} + \phi_a \gamma^a \right) \psi(\mathbf{r}) + \int (d\mathbf{q}) V_0^{-1}(\mathbf{q}) \phi^T(\mathbf{q}) \sigma_1 \phi(-\mathbf{q}) \right\}. \quad (5)$$

Здесь

$$\hat{G}_0^{-1} = \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta_{\mathbf{r}}}{2m} - U_{\text{dis}}(\mathbf{r}) \right) \sigma_0 \equiv G_0^{-1} \sigma_0, \quad \gamma^1 = \sigma_0, \quad \gamma^2 = \sigma_1, \quad (d\mathbf{q}) = \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}, \quad (6)$$

а V_0 — затравочное кулоновское взаимодействие (везде положено $\hbar = 1$). Мы не рассматриваем каких-либо эффектов, связанных со спином частицы, поэтому все матрицы подразумеваются единичными в спиновом пространстве.

Далее введем функции Грина:

$$\hat{G}(1, 2) = -i \langle \psi(1) \psi^+(2) \rangle = -i \int D\psi^* D\psi D\phi e^{iS} \psi(1) \psi^+(2), \quad (7)$$

$$\hat{V}(1, 2) = -2i \langle \phi(1) \phi^T(2) \rangle = -2i \int D\psi^* D\psi D\phi e^{iS} \phi(1) \phi^T(2) \quad (8)$$

(Здесь 1 означает совокупность \mathbf{r}_1, t_1 и т.д.). Отметим, что конкретную реализацию беспорядка мы включили в затравочную функцию Грина G_0 . Усреднение по беспорядку будет проведено в самую последнюю очередь. Фермионный пропагатор имеет вид

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix}, \quad G^R \circ F - F \circ G^A, \quad (9)$$

где F — фермионная функция распределения, а под символом \circ подразумевается свертка по промежуточным индексам. Когда система однородна и находится в тепловом равновесии с температурой T , имеем $F(\varepsilon) = \tanh(\varepsilon/2T)$.

Пропагатор неэкранированного кулоновского взаимодействия имеет вид $\hat{V}_0(\omega, \mathbf{q}) = V_0(q) \sigma_1$. Но так как кулоновский потенциал является дальнедействующим, на малых

импульсах необходимо просуммировать всю последовательность поляризационных операторов, усредненных по беспорядку. В результате, в универсальном пределе $V_0 \rightarrow \infty$ получим

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V^K & V^R \\ V^A & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$V^{R(A)}(\omega, q) = \frac{Dq^2 \mp i\omega}{s\nu Dq^2}, \quad V^K = V^R \circ B - B \circ V^A, \quad (11)$$

B — бозонная функция распределения. По определению она равна

$$B_\omega = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_{\varepsilon'} F_{\varepsilon' - \omega}) d\varepsilon'. \quad (12)$$

Несложно заметить, что в тепловом равновесии $B(\omega) = \coth(\omega/2T)$.

3.2. Кинетическое уравнение

Продемонстрируем вывод кинетического уравнения, который можно найти, например, в [19]. Запишем уравнение Дайсона для электронной функции Грина \hat{G} при наличии взаимодействия:

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \circ \hat{\Sigma} \circ \hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G} \circ \hat{\Sigma} \circ \hat{G}_0. \quad (13)$$

Здесь $\hat{\Sigma}$ — неприводимая собственно-энергетическая часть. Она имеет ту же структура в келдышевском пространстве, что и электронная функция Грина:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma^R & \Sigma^K \\ 0 & \Sigma^A \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Теперь умножим первое из этих равенств на \hat{G}_0^{-1} слева, а второе — справа. Вычитая из одного равенства другое, получим

$$[\hat{G}_0^{-1}, \hat{G}] = [\hat{\Sigma}, \hat{G}], \quad (15)$$

где $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. Поскольку мы интересуемся медленной динамикой, перейдем к вигнеровскому представлению

$$f_\varepsilon(t) = \int d\tau f\left(t + \frac{\tau}{2}, t - \frac{\tau}{2}\right) e^{i\varepsilon\tau}. \quad (16)$$

В равновесии все функции в правой части (15) будут зависеть только от энергий (но не от времени). Чтобы вывести кинетическое уравнение, мы будем рассматривать слабо неравновесную ситуацию, то есть поправки к равновесным функциям распределения предполагаются малыми. Мы будем рассматривать уравнение (15) в линейном порядке по этим поправкам, зависящим от времени.

Далее берем от (15) келдышевскую компоненту и след в координатном пространстве. В итоге, получим

$$\int d\mathbf{r} [G_0^{-1}, G^K]_{\mathbf{r},\mathbf{r}} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left\{ (\Sigma^R - \Sigma^A)_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} G_{\mathbf{r}',\mathbf{r}}^K - \Sigma_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}^K (G^R - G^A)_{\mathbf{r}',\mathbf{r}} \right\}. \quad (17)$$

В правой части все берется на энергии ε в момент времени t (напомним, что это уравнение справедливо только в линейном порядке по малым неравновесным поправкам).

Далее, считая функцию распределения не зависящей от координат, получаем

$$[G_0^{-1}, G^K]_{\mathbf{r},\mathbf{r}} = i (G^R - G^A)_{\mathbf{r},\mathbf{r}} \partial_t F. \quad (18)$$

Здесь мы опустили члены, возникающие от коммутаторов $[G_0^{-1}, G^{R(A)}]_{\mathbf{r},\mathbf{r}}$, так как они равны нулю. Чтобы это заметить, достаточно воспользоваться соответствующими компонентами уравнения (15).

В итоге получаем определяющее кинетику системы выражение, которое мы и будем использовать в дальнейшем:

$$\partial_t F \int d\mathbf{r} \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \varepsilon) = -i \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left\{ \Delta \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) G^K(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon) - \Sigma^K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) \Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon) \right\}, \quad (19)$$

где

$$\Delta G = G^R - G^A, \quad \Delta \Sigma = \Sigma^R - \Sigma^A. \quad (20)$$

Мы опустили временной индекс в правой части (19).

Теперь, если наша задача вывести кинетическое уравнение, усредненное по реализациям беспорядка, нам достаточно воспользоваться соотношением

$$\int d\mathbf{r} \langle \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \varepsilon) \rangle = -2\pi i \nu V = -\frac{2\pi i}{\Delta}. \quad (21)$$

После этого кинетическое уравнение принимает привычный вид

$$\partial_t F_\varepsilon(t) = \frac{\Delta}{2\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \Delta \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) G^K(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon) - \Sigma^K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) \Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon) \rangle \equiv \text{St}[F_\varepsilon], \quad (22)$$

где $\text{St}[F_\varepsilon]$ — интеграл столкновений, а угловые скобки означают усреднение по реализациям беспорядка. Отсюда средняя $\langle \gamma(\varepsilon, T) \rangle$ извлекается стандартным образом:

$$\langle \gamma(\varepsilon, T) \rangle = -\frac{\delta \text{St}[F_\varepsilon]}{\delta F_\varepsilon}. \quad (23)$$

Если же нас интересуют среднеквадратичные флуктуации $\gamma(\varepsilon, T)$, то нам понадобятся два кинетических уравнения. Но тогда появляется необходимость использовать именно уравнение (19), поскольку в этом случае возникают нетривиальные корреляции между функциями Грина в левой части равенства. К этому вопросу мы вернемся несколько позже (см. разделы 5.1 и 5.2.1).

3.3. Модификация келдышевской техники

Для дальнейшего удобства мы несколько модифицируем исходную келдышевскую технику. А именно, избавимся от келдышевской компоненты электронной функции Грина, то есть перейдем к описанию системы в терминах лишь запаздывающих и опережающих функций Грина. Для этого заметим, что в случае слабого неравновесия можно записать $G_\varepsilon^K(t) = F_\varepsilon(t)\Delta G_\varepsilon(t)$. В связи с этим, мы можем диагонализировать функцию Грина

$$\hat{G} = U^{-1}(\varepsilon)gU(\varepsilon), \quad g = \begin{pmatrix} G^R & 0 \\ 0 & G^A \end{pmatrix}, \quad U(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & F_\varepsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

и строить теорию возмущений в терминах g . В результате такой процедуры у нас в вершинах взаимодействия будут стоять новые эффективные γ -матрицы:

$$\Gamma^k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = U(\varepsilon_1)\gamma^k U^{-1}(\varepsilon_2), \quad (25)$$

$$\Gamma_{ij}^1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 1 & F_{\varepsilon_2} - F_{\varepsilon_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} F_{\varepsilon_1} & -1 + F_{\varepsilon_1}F_{\varepsilon_2} \\ -1 & -F_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Данная модификация позволяет существенно облегчить вычисления, поскольку электронные функции Грина g теперь диагональны в келдышевском пространстве. При этом линии взаимодействия определяются следующим образом:

$$Y_{abcd}(\varepsilon, \varepsilon', \omega, \mathbf{q}) = \begin{array}{c} \varepsilon - \omega \quad \varepsilon' - \omega \\ \begin{array}{ccc} b \nearrow & \text{---} & \nwarrow c \\ \varepsilon \nearrow & & \nwarrow \varepsilon' \\ a \nearrow & & \nwarrow d \end{array} \\ \varepsilon \end{array} = \Gamma_{ab}^k(\varepsilon, \varepsilon - \omega)\Gamma_{cd}^l(\varepsilon' - \omega, \varepsilon')V_{kl}(\omega, \mathbf{q}), \quad (27)$$

где индексы a, b, c, d принимают значения R, A , и подразумевается соответствие $R \rightarrow 1, A \rightarrow 2$. Нетрудно найти, чему именно равны Y_{abcd} (см. приложение А).

Следующим важным шагом является запись кинетического уравнения в рамках нашей модифицированной теории. По сути, мы должны лишь выполнить замену базиса в келдышевском пространстве (именно это и подразумевает преобразование (24)). В итоге, получим следующее соответствие:

$$\Sigma^R = \Sigma^{RR}, \quad \Sigma^A = \Sigma^{AA}, \quad \Sigma^K = (\Sigma^{RR} - \Sigma^{AA}) F_\varepsilon - \Sigma^{RA}, \quad \Sigma^{AR} = 0. \quad (28)$$

Здесь запись Σ^{ij} обозначает неприводимую собственно-энергетическую часть в нашей модифицированной теории, у которой внешними линиями подразумеваются i -тая и j -тая электронные функции Грина соответственно (все функции берутся на энергии ε).

В итоге, кинетическое уравнение (19) принимает вид

$$\partial_t F \int d\mathbf{r} \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \varepsilon) = -i \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Sigma^{RA}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) \Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon). \quad (29)$$

Соответственно, для времени неупругого рассеяния получаем выражение

$$\gamma(\varepsilon, T) \int d\mathbf{r} \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \varepsilon) = i \frac{\delta}{\delta F_\varepsilon} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Sigma^{RA}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) \Delta G(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \varepsilon). \quad (30)$$

Подчеркнем, что везде в дальнейшем мы пользуемся именно данной модификацией (то есть в дальнейшем у нас больше не встречается келдышевская компонента электронной функции Грина).

4. Результат Сивана, Имри и Аронова

В этом разделе мы воспроизведем вывод кинетического уравнения в грязном металле в квазиклассическом приближении (например, см. [19]), а также получим обобщение результата Сивана, Имри и Аронова для нульмерной геометрии на случай произвольной температуры T и спинового вырождения s .

Простейшая диаграмма для Σ изображена на рис. 2. В действительности, на данной диаграмме изображено именно произведение $\Sigma(\varepsilon) \Delta G(\varepsilon)$ в формуле (29) (электронная функция Грина на энергии ε возникает из-за множителя ΔG).

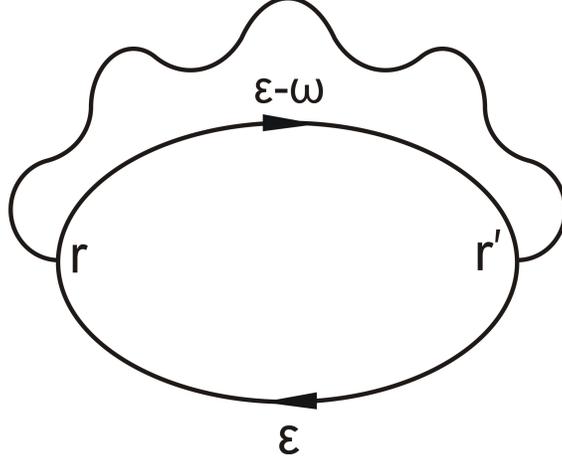


Рис. 2. Простейший вклад в собственно-энергетическую часть.

Соответствующий вклад в собственно-энергетическую часть равен

$$\Sigma_1^{RA}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) = \frac{i}{2} \int (d\omega) \{G_{\varepsilon-\omega}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Y_{RR,RA}(\varepsilon, \varepsilon, \omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + G_{\varepsilon-\omega}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Y_{RA,AA}(\varepsilon, \varepsilon, \omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\}, \quad (31)$$

где $(d\omega) = d\omega/2\pi$, а множитель $i/2$ возникает из определения кулоновской функции Грина (8). Напомним, что кулоновские пропагаторы подразумеваются усредненными по беспорядку, в то время как электронные функции Грина берутся точные в данной реализации беспорядка. Для дальнейших преобразований мы воспользуемся свойствами аналитичности

$$\int G_{\varepsilon-\omega}^R V_{\omega}^A d\omega = \int G_{\varepsilon-\omega}^A V_{\omega}^R d\omega = 0. \quad (32)$$

Применяя теперь формулы (A2), (A8) с учетом этих свойств, получим

$$\Sigma_1^{RA}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) = \frac{i}{2} \int (d\omega) \{G_{\varepsilon-\omega}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{\varepsilon-\omega}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \{(F_{\varepsilon} - F_{\varepsilon-\omega})V_{\omega}^K - (1 - F_{\varepsilon}F_{\varepsilon-\omega})\Delta V_{\omega}\}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}, \quad (33)$$

где $\Delta V = V^R - V^A$. Подставляя данное выражение для собственно-энергетической части в (29) с учетом (20), получаем при усреднении

$$\text{St}[F_{\varepsilon}] = \frac{i\Delta}{4\pi} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' (d\omega) \langle \Delta G_{\varepsilon}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Delta G_{\varepsilon-\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle \{(F_{\varepsilon} - F_{\varepsilon-\omega})B_{\omega} - (1 - F_{\varepsilon}F_{\varepsilon-\omega})\} \Delta V_{\omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (34)$$

Простейший способ усреднить функции Грина в правой части — провести между ними диффузон (напомним, что мы рассматриваем унитарный класс симметрии, а значит

считаем, что купероны отсутствуют)

$$\frac{1}{2\pi\nu\tau^2}D_0^R(\omega, \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{2\pi\nu\tau^2} \frac{1}{Dq^2 - i\omega}, \quad (35)$$

где τ — время свободного пробега. С учетом этого, получаем

$$\text{St}[F_\varepsilon] = 2 \int (d\mathbf{q})(d\omega) \text{Re } D_0^R(\omega, \mathbf{q}) \text{Im } V^R(\omega, \mathbf{q}) \Phi(\varepsilon, \omega), \quad (36)$$

где

$$\Phi(\varepsilon, \omega) = (F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})B_\omega - (1 - F_\varepsilon F_{\varepsilon-\omega}). \quad (37)$$

Подставляя сюда формулы (11) и (35), находим

$$\text{St}[F_\varepsilon] = -\frac{2}{s\nu} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) \frac{\omega}{(Dq^2)^2 + \omega^2} \Phi(\varepsilon, \omega), \quad (38)$$

что есть хорошо известный результат для кинетического уравнения.

В нульмерной геометрии, предполагающей $\omega \ll E_{\text{Th}}$ (это следует из того, что интеграл по частоте сходится на масштабе $\omega \sim \max\{\varepsilon, T\} \ll E_{\text{Th}}$),

$$\text{St}[F_\varepsilon] = -\frac{\Delta}{s} \sum'_m \int (d\omega) \frac{2\omega}{(Dq_m^2)^2 + \omega^2} \Phi(\varepsilon, \omega) = -\frac{2\Delta}{sE_2^2} \int (d\omega) \omega \Phi(\varepsilon, \omega), \quad (39)$$

где E_2 определено согласно (2).

Легко заметить, что в равновесии выполняется соотношение

$$B_\omega = \frac{1 - F_\varepsilon F_{\varepsilon-\omega}}{F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega}}. \quad (40)$$

Это обстоятельство обеспечивает зануление интеграла столкновений в равновесии (чего и следовало ожидать).

Чтобы извлечь теперь время энергетической релаксации, воспользуемся формулой (23):

$$\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon, T) = \frac{2\Delta}{sE_2^2} \int (d\omega) \omega \left\{ \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{\varepsilon - \omega}{2T}\right) \right\}. \quad (41)$$

Беря интеграл по ω , получаем результат Сивана, Имри и Аронова для случая произвольной температуры T и спинового вырождения s :

$$\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon, T) = \frac{\Delta(\varepsilon^2 + \pi^2 T^2)}{s\pi E_2^2}. \quad (42)$$

5. Мезоскопические флуктуации времени неупругого рассеяния

5.1. Дальнейшие вклады в собственно-энергетическую часть

В этом разделе мы представим основной результат данной работы.

Рассмотрим вклады в Σ с двумя кулоновскими линиями. Такие вклады изображены на рис. 3.

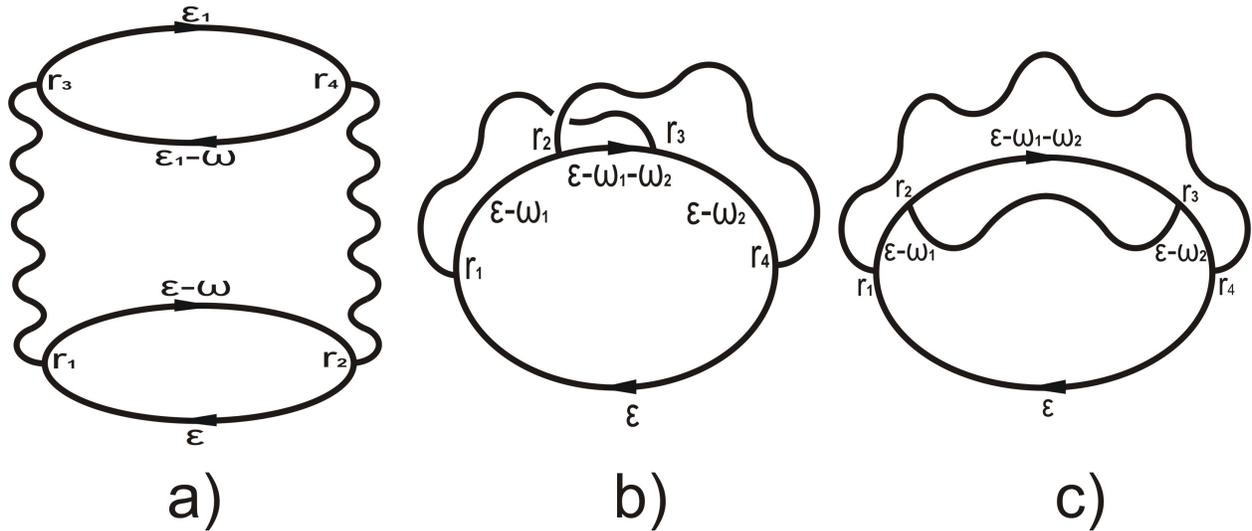


Рис. 3. Вклады в собственно-энергетическую часть с двумя кулоновскими линиями.

Существенный вклад в мезоскопические флуктуации создается диаграммами на рис. 3а и 3б, поэтому мы и заострим свое внимание именно на этих диаграммах. Отметим, что здесь мы используем идею, изложенную в [11], так как именно эти диаграммы вычислялись для расчета мезоскопических флуктуаций при больших температурах.

Для начала исследуем диаграмму, изображенную на рис. 3а. Заметим, что при независимом усреднении петель по беспорядку эта диаграмма есть то же самое, что и диаграмма на рис. 2, в которой явно выделили один поляризационный оператор. Для нас это, однако, будет крайне важно, так как в данном месте мы выйдем за рамки приближения случайных фаз. Кроме того, данная диаграмма является более наглядной. Если посередине мы проведем сечение, то получим как раз процесс распада электрона

с энергией ε на электрон с энергией $\varepsilon - \omega$ и электрон-дырочную пару с энергиями ε_1 и $\varepsilon_1 - \omega$.

Соответствующий вклад в собственно-энергетическую часть от данной диаграммы можно записать в следующем виде

$$\Sigma_2^{RA} = (-s) \left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum_{abc} G_{\varepsilon-\omega}^a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_{\varepsilon_1-\omega}^b(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) G_{\varepsilon_1}^c(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) Y_{Rabc}(\varepsilon, \varepsilon_1, \omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) Y_{cbaA}(\varepsilon_1, \varepsilon, \omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4), \quad (43)$$

где множитель $(-s)$ появляется из-за наличия замкнутой фермионной петли. После довольно громоздких преобразований с использованием свойств (32), из (30) получаем:

$$\gamma_1(\varepsilon, T) \int d\mathbf{r} \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = -\frac{i}{4s\nu^2} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4 \int (d\varepsilon_1)(d\omega) (F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1-\omega})(F_{\varepsilon-\omega} + B_\omega) X_4, \quad (44)$$

где

$$X_4 = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Delta G_{\varepsilon-\omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Delta G_{\varepsilon_1-\omega}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Delta G_{\varepsilon_1}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4). \quad (45)$$

Аналогичная формула была получена в [20].

Здесь не будет лишним отметить следующую деталь. С точностью до членов порядка ω/E_{Th} ($\omega \propto T$) кулоновские линии в данной диаграмме даются выражением $\text{Re } V^R = 1/s\nu$, то есть учитывается лишь статическая экранировка (отсюда и δ -функции в выражении для X). Это означает, что в случае $\omega \ll E_{\text{Th}}$ эффекты динамической экранировки учитываются в главном порядке единственным поляризационным оператором.

Получить общее выражение, аналогичное (5.1), для диаграммы на рис. 3b не получается. Однако, это и не является необходимым, поскольку, как мы увидим далее, нам будут нужны далеко не все возможные варианты перестановок опережающих и запаздывающих функций Грина (см. разделы 5.4.1 и 5.4.2).

Если мы теперь интересуемся вкладом в мезоскопические флуктуации, который происходит из квадрата диаграммы на рис. 3a, то приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & \langle \gamma(\varepsilon, T) \gamma(\varepsilon', T) \rangle_1 \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \Delta G_{\varepsilon'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle = -\frac{1}{16s^2\nu^4} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_8 \times \\ & \times \int (d\varepsilon_1)(d\varepsilon_2)(d\omega_1)(d\omega_2) (F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1-\omega_1})(F_{\varepsilon-\omega_1} + B_{\omega_1})(F_{\varepsilon_2} - F_{\varepsilon_2-\omega_2})(F_{\varepsilon'-\omega_2} + B_{\omega_2}) X_8, \quad (46) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
X_8 = & \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)\delta(\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_7)\delta(\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_8)\langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\Delta G_{\varepsilon-\omega_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \\
& \times \Delta G_{\varepsilon_1-\omega_1}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3)\Delta G_{\varepsilon_1}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)\Delta G_{\varepsilon'}(\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_5)\Delta G_{\varepsilon'-\omega_2}(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6)\Delta G_{\varepsilon_2-\omega_2}(\mathbf{r}_8, \mathbf{r}_7)\Delta G_{\varepsilon_2}(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) \rangle.
\end{aligned} \tag{47}$$

Как обычно, здесь угловые скобки означают усреднение по реализациям беспорядка.

5.2. Непертурбативное усреднение по беспорядку

Теперь наша задача состоит в том, чтобы усреднить (46) и (47) по беспорядку. Это есть самая технически сложная часть данной работы.

Основная трудность заключается в том, что в (47) нам необходимо усреднить очень большое количество (а именно 8) функций Грина. Но кроме того, возникает дополнительная сложность. Поскольку ширины одночастичных уровней меньше расстояния между уровнями, $\gamma < \Delta$, то в данной задаче неприменима стандартная крестовая диаграммная техника. Конкретные примеры, в которых будет видна необходимость пертурбативного усреднения, будут приведены ниже (см. разделы 5.2.1, 5.2.3 и 5.4.1).

Мы будем проводить усреднение по беспорядку с помощью нелинейной суперсимметричной сигма-модели [13]. Мы следуем стандартному выводу Ефетова. Единственным тонким моментом при выводе будет лишь то, что мы изначально всем уровням энергии ε_j припишем ширины $\gamma(\varepsilon_j)$. Технически это означает, что мы сделаем везде замену

$$\varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_j + \frac{i\gamma(\varepsilon_j)}{2}, \quad \varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_j - \frac{i\gamma(\varepsilon_j)}{2} \tag{48}$$

для запаздывающих и для опережающих функций Грина соответственно, а в качестве $\gamma(\varepsilon_j)$ мы здесь для краткости обозначили квазиклассический результат $\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_j, T)$ из (42). На языке диаграммной техники это означает, что при вычислении нульмерного диффузона мы учитываем в низшем порядке упругую часть (энергии на обеих функциях Грина, образующих диффузон, сохраняются) электрон-электронного взаимодействия (см. раздел 5.2.3 и приложение В).

5.2.1. Парный коррелятор $\langle \Delta G(\varepsilon) \Delta G(\varepsilon - \omega) \rangle$

Впервые необходимость непертурбативного усреднения у нас возникает при вычислении парного коррелятора в левой части (46). Как известно [13], в нульмерном случае его можно найти точно. В случае унитарной симметрии этот коррелятор равен:

$$R_0(x) = \langle \Delta G(\varepsilon) \Delta G(\varepsilon - \omega) \rangle = -4\pi^2 \nu^2 \left(1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} + \pi \delta(x) \right), \quad x = \frac{\pi \omega}{\Delta}. \quad (49)$$

Если же добавить уровням ширины согласно (48), то эта формула переходит в

$$R_y(x) = \langle \Delta G(\varepsilon) \Delta G(\varepsilon - \omega) \rangle = -4\pi^2 \nu^2 \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1 - e^{2i(x+iy)}}{(x+iy)^2} \right), \quad (50)$$

$$x = \frac{\pi \omega}{\Delta}, \quad y = \frac{\pi(\gamma(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon - \omega))}{2\Delta}. \quad (51)$$

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$) γ выполняет лишь роль регуляризатора, и воспроизводится результат для $R_0(x)$.

Если же мы теперь ширину уровня оставляем малой ($y \ll 1$), но конечной, то δ -функция в (49) приобретает ширину y . В случае, когда рассматриваются близкие энергии ($\omega \ll \Delta$), для $R_y(x)$ получаем лоренцевский пик

$$R_y(x) \approx \frac{y}{y^2 + x^2} \quad (52)$$

Как видим, при достаточно близких энергиях коррелятор $\langle \Delta G(\varepsilon) \Delta G(\varepsilon - \omega) \rangle$ сильно отличается от приводимого $\langle \Delta G(\varepsilon) \rangle \langle \Delta G(\varepsilon - \omega) \rangle$. Именно по этой причине при расчете мезоскопических флуктуаций мы изначально используем формулу (19) вместо (22).

5.2.2. Усреднение 8 функций Грина: интегрирование по быстрым модам

Теперь займемся усреднением в (47). Как видим, наша следующая задача — усреднить 8 функций Грина. Эта проблема намного более серьезная. Фактически, теперь нам надо усреднить по беспорядку диаграмму, изображенную на рис. 4.

Как мы увидим в дальнейшем (см. раздел 5.4.1), для вычисления флуктуаций нам понадобятся лишь те члены, в которых содержится по четыре опережающих и запаздывающих функций Грина. Рассмотрим для примера коррелятор

$$K = \langle G_\varepsilon^R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) G_\varepsilon^A(\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_5) G_{\varepsilon-\omega_2}^R(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) G_{\varepsilon-\omega_1}^A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \times G_{\varepsilon_1-\omega_1}^R(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) G_{\varepsilon_2-\omega_2}^A(\mathbf{r}_8, \mathbf{r}_7) G_{\varepsilon_2}^R(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) G_{\varepsilon_1}^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle \quad (53)$$

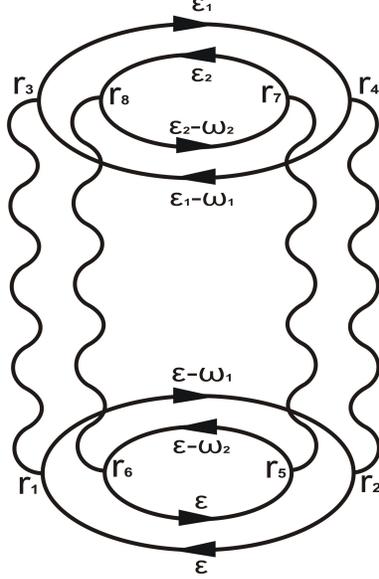


Рис. 4. Диаграмма из (47), которую необходимо усреднить по беспорядку.

Концептуально наш вывод абсолютно аналогичен представленному в [13], но с небольшим нюансом: теперь мы рассматриваем не две, а восемь функций Грина. Этот факт несколько усложняет нашу задачу.

Для адекватного описания разобьем наши 8 функций Грина на 4 пары: 1 — $(\varepsilon, \varepsilon)$, 2 — $(\varepsilon - \omega_2, \varepsilon - \omega_1)$, 3 — $(\varepsilon_1 - \omega_1, \varepsilon_2 - \omega_2)$, 4 — $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$. В скобках здесь указаны энергии соответствующих пропагаторов. Фактически, мы ввели дополнительное пространство 1234. То, что в каждой паре имеется одна опережающая и одна запаздывающая функции Грина — не случайность. Данный выбор пар будет ясен в дальнейшем (см. раздел 5.4.1).

В связи с вышесказанным, наше Q -многообразие теперь будет описываться суперматрицами размера 16×16 , которые действуют в прямом произведении пространств $\text{FB} \otimes \text{RA} \otimes 1234$. Как обычно, на это многообразие накладывается ограничение $Q^2 = 1$.

Далее, следуя полностью выводу из [13], получаем

$$K = (\pi\nu)^8 \int Q_{21}^{\text{AR}}(\mathbf{r}_1) Q_{12}^{\text{RA}}(\mathbf{r}_2) Q_{21}^{\text{RA}}(\mathbf{r}_5) Q_{12}^{\text{AR}}(\mathbf{r}_6) Q_{43}^{\text{AR}}(\mathbf{r}_3) Q_{34}^{\text{RA}}(\mathbf{r}_4) Q_{43}^{\text{RA}}(\mathbf{r}_7) Q_{34}^{\text{AR}}(\mathbf{r}_8) e^{-S[Q]} DQ, \quad (54)$$

где действие дается формулой

$$S[Q] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \text{str} \left(D (\nabla Q(\mathbf{r}))^2 + 4i\hat{E}Q(\mathbf{r}) \right), \quad (55)$$

а матрица \hat{E} является диагональной с элементами — энергиями (с учетом ширин) соответствующих функций Грина:

$$\hat{E} = \text{diag} \left\{ \varepsilon + \frac{i\gamma(\varepsilon)}{2}, \varepsilon - \omega_2 + \frac{i\gamma(\varepsilon - \omega_2)}{2}, \varepsilon_1 - \omega_1 + \frac{i\gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}{2}, \varepsilon_2 + \frac{i\gamma(\varepsilon_2)}{2}, \right. \\ \left. \varepsilon - \frac{i\gamma(\varepsilon)}{2}, \varepsilon - \omega_1 - \frac{i\gamma(\varepsilon - \omega_1)}{2}, \varepsilon_2 - \omega_2 - \frac{i\gamma(\varepsilon_2 - \omega_2)}{2}, \varepsilon_1 - \frac{i\gamma(\varepsilon_1)}{2} \right\} \otimes \mathbf{1}_{\text{FB}}. \quad (56)$$

Также отметим, что в формуле (54) все элементы Q -матриц в предэкспоненте берутся из ВВ сектора. Мы опустили этот индекс для краткости записи. Для удобства мы запишем $Q_{21}^{\text{AR}}(\mathbf{r}_1) = \text{str} P_{21}^{\text{AR}} Q(\mathbf{r}_1)$ и т.д., где P_{21}^{AR} — соответствующий проектор (опять мы подразумеваем, что он является проектором на ВВ сектор в FB пространстве):

$$P_{21}^{\text{AR}} = \begin{pmatrix} 0 & P^{\text{AR}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{1234}, \quad P^{\text{AR}} = \begin{pmatrix} 0 & P^{\text{BB}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\text{RA}}, \quad P^{\text{BB}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\text{FB}}. \quad (57)$$

Теперь мы должны учесть, что кулоновские линии имеют ненулевой импульс. Это означает, что мы не можем сразу перейти в выражении (54) к нульмерному случаю, но должны выделить минимальное количество быстрых мод, то есть мод, имеющих ненулевой импульс (каждая быстрая мода дает малый множитель $1/g$). Это должно быть сделано способом, предложенным в [16]. А именно, мы должны отынтегрировать быстрые моды по теории возмущений, после чего получить точное нульмерное выражение (интегрирование по нулевой моде будет непертурбативным). Для этого запишем:

$$Q(\mathbf{r}) = T^{-1} \bar{Q}(\mathbf{r}) T, \quad (58)$$

где матрица T пространственно однородная, а $\bar{Q}(\mathbf{r})$ описывает все моды с ненулевым импульсом. Далее мы должны учесть флуктуации в $\bar{Q}(\mathbf{r})$ относительно седловой точки $\Lambda = \text{diag}\{1, -1\}_{\text{RA}}$:

$$\bar{Q}(\mathbf{r}) = \Lambda \left(1 + W(\mathbf{r}) + \frac{W^2(\mathbf{r})}{2} + \dots \right), \quad \{W(\mathbf{r}), \Lambda\} = 0. \quad (59)$$

Последнее условие говорит о том, что $W(\mathbf{r})$ — «оффдиагональная» в RA пространстве. Теперь мы должны разложить все $Q(\mathbf{r})$ -матрицы до первого порядка по $W(\mathbf{r})$, подста-

вить это разложение в (54) и усреднить по быстрым модам с гауссовым весом

$$S_W[Q] = \frac{\pi\nu D}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(\nabla Q)^2 = -\frac{\pi\nu D}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(\nabla W(\mathbf{r}))^2 + O(W^3). \quad (60)$$

Здесь мы пренебрегли квадратичным по $W(\mathbf{r})$ членом, возникающим из второго слагаемого в (55), поскольку он мал в сравнении с главным членом в отношении $\max\{\varepsilon, T\}/E_{\text{Th}}$.

Далее, поскольку усреднение проводится с гауссовым весом, то, согласно теореме Вика, полученный коррелятор восьми W -матриц распадается на сумму всевозможных произведений из четырех попарных корреляторов, которые вычисляются согласно правилам слияния:

$$\langle \operatorname{str} P W(\mathbf{r}) \operatorname{str} R W(\mathbf{r}') \rangle_W = D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \operatorname{str}(P \Lambda R \Lambda - P R), \quad D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi\nu} \int (d\mathbf{q}) \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{Dq^2}, \quad (61)$$

где P, R – произвольные суперматрицы. Конечно, в результате такой процедуры, мы получим в выражении для K сумму из $7!! = 105$ различных членов; однако, как мы вскоре увидим (см. раздел 5.2.3), нам понадобятся далеко не все из них. Чтобы понять, какие именно слагаемые нас интересуют, мы должны разобраться, как выполняется интегрирование по нульмерной моде. Напомним, что Q -матрица имеет размер 16×16 , а значит, запараметризовать и взять интеграл по такому многообразию точно представляется непосильной задачей. Значит, нам предстоит выделить наиболее существенные вклады.

5.2.3. Интегрирование по медленным модам

В общем случае, когда энергии всех функций Грина находятся далеко друг от друга ($\varepsilon_i - \varepsilon_j \gg \Delta$), мы не должны учитывать нульмерные корреляции между различными пропагаторами. Действительно, в этом случае медленные диффузоры (диффузоры, у которых импульс равен нулю) вносят лишь фактор порядка $\Delta/(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \ll 1$. Однако, как мы видели в разделе 5.2.1, корреляции становятся существенными, если разность энергий меньше расстояния между уровнями. В связи с этим мы будем усреднять по медленным модам в следующем приближении. Мы будем считать, что энергии функций Грина, составляющих пару (речь идет о тех парах, которые были выбраны при введении пространства 1234 в разделе 5.2.2), подходят достаточно близко друг к другу

(на расстояние меньше Δ). Как увидим далее, это приведет к появлению резонансного знаменателя, который даст большой вклад в мезоскопические флуктуации (см. раздел 5.4.1). В то же время, разности энергий между функциями Грина из различных пар мы будем считать довольно большими (больше Δ). В противном случае мы бы получили лишь ненужную редукцию фазового пространства. Забегая вперед отметим, что данный способ разбить 8 функций Грина на пары — не единственный; существуют и другие способы спаривания, дающие соизмеримый вклад в мезоскопические флуктуации (см. раздел 5.4.2 и рис. 8).

Иными словами, мы учитываем нульмерные корреляции только между пропагаторами, составляющими пару в пространстве 1234. Нетрудно понять, что в этом случае Q -матрица становится диагональной в 1234 (это можно проверить непосредственным вычислением), что существенно упрощает задачу.

Такое попарное усреднение по медленным модам схематически изображено на рис. 5. Штрихованные линии как раз и показывают, между какими функциями Грина мы проводим нульмерные диффузоры.

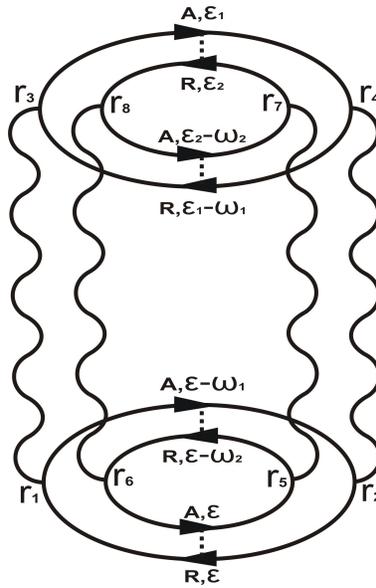


Рис. 5. Схематическое изображение попарного усреднения по медленным модам.

После того, как мы пришли к выводу, что Q -матрица имеет диагональный вид в пространстве 1234, дальнейшее вычисление выполняется довольно просто.

Во-первых, несложно убедиться, что почти все из 105 слагаемых, которые получаются после применения теоремы Вика для вклада в K с выбранным нами способом усреднения по медленным модам, зануляются. В действительности, остается только 4 ненулевых члена, которые после применения правил (61) дают:

$$\begin{aligned} \frac{K_0}{(\pi\nu)^8} = & \langle \{ D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)D(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) \text{str} (P_{21}^{\text{AR}} Q P_{12}^{\text{RA}} Q - P_{21}^{\text{AR}} P_{12}^{\text{RA}}) \text{str} (P_{21}^{\text{RA}} Q P_{12}^{\text{AR}} Q - P_{21}^{\text{RA}} P_{12}^{\text{AR}}) + \\ & + D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_6)D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5) \text{str} (P_{21}^{\text{AR}} Q P_{12}^{\text{AR}} Q - P_{21}^{\text{AR}} P_{12}^{\text{AR}}) \text{str} (P_{12}^{\text{RA}} Q P_{21}^{\text{RA}} Q - P_{12}^{\text{RA}} P_{21}^{\text{RA}}) \} \times \\ & \times \{ D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)D(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) \text{str} (P_{43}^{\text{AR}} Q P_{34}^{\text{RA}} Q - P_{43}^{\text{AR}} P_{34}^{\text{RA}}) \text{str} (P_{43}^{\text{RA}} Q P_{34}^{\text{AR}} Q - P_{43}^{\text{RA}} P_{34}^{\text{AR}}) + \\ & + D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_8)D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_7) \text{str} (P_{43}^{\text{AR}} Q P_{34}^{\text{AR}} Q - P_{43}^{\text{AR}} P_{34}^{\text{AR}}) \text{str} (P_{34}^{\text{RA}} Q P_{43}^{\text{RA}} Q - P_{34}^{\text{RA}} P_{43}^{\text{RA}}) \} \rangle \quad (62) \end{aligned}$$

(K_0 — вклад в K , соответствующий выбранному нами способу усреднения по медленным модам). Здесь уже угловые скобки означают интегрирование по нульмерному Q -многообразию, $Q = T^{-1} \Lambda T$, с нульмерным действием, оставшимся после интегрирования по быстрым модам:

$$S_0[Q] = \frac{\pi i}{\Delta} \text{str} \hat{E} Q. \quad (63)$$

Рассмотрим какой-либо один из этих четырех членов. Остальные вычисляются аналогично. Итак, возьмем

$$\begin{aligned} L_1 = & \langle \text{str} (P_{21}^{\text{AR}} Q P_{12}^{\text{RA}} Q - P_{21}^{\text{AR}} P_{12}^{\text{RA}}) \text{str} (P_{21}^{\text{RA}} Q P_{12}^{\text{AR}} Q - P_{21}^{\text{RA}} P_{12}^{\text{AR}}) \times \\ & \times \text{str} (P_{43}^{\text{AR}} Q P_{34}^{\text{RA}} Q - P_{43}^{\text{AR}} P_{34}^{\text{RA}}) \text{str} (P_{43}^{\text{RA}} Q P_{34}^{\text{AR}} Q - P_{43}^{\text{RA}} P_{34}^{\text{AR}}) \rangle. \quad (64) \end{aligned}$$

Поскольку теперь Q -матрица диагональна в пространстве 1234, обозначим соответствующие ее компоненты как $Q_1 \equiv Q_{11}$, $Q_2 \equiv Q_{22}$ и т.д. В итоге получаем

$$\begin{aligned} L_1 = & \langle \text{str} (P_{21}^{\text{AR}} Q_2 P_{12}^{\text{RA}} Q_1 - P_{21}^{\text{AR}} P_{12}^{\text{RA}}) \text{str} (P_{21}^{\text{RA}} Q_2 P_{12}^{\text{AR}} Q_1 - P_{21}^{\text{RA}} P_{12}^{\text{AR}}) \times \\ & \times \text{str} (P_{43}^{\text{AR}} Q_4 P_{34}^{\text{RA}} Q_3 - P_{43}^{\text{AR}} P_{34}^{\text{RA}}) \text{str} (P_{43}^{\text{RA}} Q_4 P_{34}^{\text{AR}} Q_3 - P_{43}^{\text{RA}} P_{34}^{\text{AR}}) \rangle. \quad (65) \end{aligned}$$

В свою очередь действие (63) распадается на сумму действий четырех независимых ефетовских сигма-моделей:

$$S_0[Q] = \sum_{j=1}^4 S_{0j}[Q_j] = \frac{\pi i}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \text{str} \hat{E}_j Q_j, \quad (66)$$

где элементами диагональной матрицы \hat{E}_j являются энергии функций Грина, образующих соответствующий блок Q_j . Как видим, усреднение по всем Q_j теперь происходит независимо. Значит, для дальнейших вычислений мы можем записать все Q_j в стандартной ефетовской параметризации.

Нетрудно заметить, что конкретно в выбранном нами примере усреднение распадается на два независимых усреднения по парам (Q_1, Q_2) и (Q_3, Q_4) , то есть мы можем записать

$$L_1 = \langle \text{str}(P^{\text{AR}}Q_2P^{\text{RA}}Q_1 - P_{21}^{\text{AR}}P_{12}^{\text{RA}}) \text{str}(P^{\text{RA}}Q_2P^{\text{AR}}Q_1 - P_{21}^{\text{RA}}P_{12}^{\text{AR}}) \rangle \times \\ \times \langle \text{str}(P^{\text{AR}}Q_4P^{\text{RA}}Q_3 - P_{43}^{\text{AR}}P_{34}^{\text{RA}}) \text{str}(P^{\text{RA}}Q_4P^{\text{AR}}Q_3 - P_{43}^{\text{RA}}P_{34}^{\text{AR}}) \rangle. \quad (67)$$

Отметим, однако, что такое разделение происходит далеко не во всех членах, которые будут нами рассмотрены в дальнейшем. Ни к каким принципиальным трудностям этот факт не приводит, только лишь к несколько более громоздким вычислениям.

Для получения окончательного результата нам еще необходимо вывести правила слияния для нульмерного усреднения, т. е. необходимо получить выражение для величин

$$\langle \text{str}(PQ) \text{str}(RQ) \rangle = \int DQ \text{str}(PQ) \text{str}(RQ) e^{-S_0[Q]}, \quad (68)$$

$$\langle \text{str}(PQRQ) \rangle = \int DQ \text{str}(PQRQ) e^{-S_0[Q]}, \quad (69)$$

где под Q уже подразумевается матрица 4×4 . Отметим, что в отличие от правил (61) для ненулевых мод, здесь интегрирование выполняется точно, а не по теории возмущений.

В ефетовской параметризации действие при усреднении двух функций Грина $G_{\varepsilon_1}^R$ и $G_{\varepsilon_2}^A$ принимает вид

$$S_0 = \frac{\pi}{\Delta} (\lambda_{\text{B}} - \lambda_{\text{F}}) \left\{ -i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{\gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_2)}{2} \right\}. \quad (70)$$

Заметим, что объект, стоящий в фигурных скобках, есть обращенный нульмерный упругий диффузон с учетом электрон-электронного взаимодействия (см. приложение В). В частности, коэффициент перед добавкой $i\gamma$ в (48) выбирался как раз из тех соображений, чтобы получающийся объект совпадал с диффузоном, полученным из крестовой техники.

Общие выражения для корреляторов (68) и (69) приведены в приложении Б. Применяя их последовательно к (67), получим

$$L_1 = (4 + 2X_0 + 2X_1 + 4X_0X_1)(4 + 2X_2 + 2X_3 + 4X_2X_3), \quad (71)$$

где

$$X_0 = X \left(\frac{\pi\gamma(\varepsilon)}{\Delta} \right), \quad X_1 = X \left(\frac{\pi}{\Delta} \left\{ -i(\omega_1 - \omega_2) + \frac{\gamma(\varepsilon - \omega_2) + \gamma(\varepsilon - \omega_1)}{2} \right\} \right), \quad (72)$$

$$X_2 = X \left(\frac{\pi}{\Delta} \left\{ -i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega_1 + \omega_2) + \frac{\gamma(\varepsilon_2 - \omega_2) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}{2} \right\} \right), \quad (73)$$

$$X_3 = X \left(\frac{\pi}{\Delta} \left\{ -i(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{\gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_2)}{2} \right\} \right), \quad (74)$$

а $X(a)$ дается формулой (Б5):

$$X(a) = \frac{1 - e^{-2a}}{2a^2}. \quad (75)$$

Стоит отметить, что второе слагаемое в выражении для $X(a)$, которое очень важно в дальнейших вычислениях, есть вклад от южного полюса фермионной сферы, а значит не может быть получено по теории возмущений.

Соответственно, искомый вклад в K равен

$$\begin{aligned} \frac{K_0}{(\pi\nu)^8} &= \{D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)D(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6)(4 + 2X_0 + 2X_1 + 4X_0X_1) + 4D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_6)D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_5)Z_0Z_1\} \times \\ &\times \{D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)D(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8)(4 + 2X_2 + 2X_3 + 4X_2X_3) + 4D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_8)D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_7)Z_2Z_3\}, \quad (76) \end{aligned}$$

где все Z_j подразумеваются функциями тех же аргументов, что и соответствующие X_j , и даются формулой (Б6):

$$Z(a) = \frac{1}{a}. \quad (77)$$

5.3. Приводимая часть коррелятора $\langle \gamma(\varepsilon, T)\gamma(\varepsilon', T) \rangle$

Очевидно, что коррелятор $\langle \gamma(\varepsilon)\gamma(\varepsilon') \rangle$ должен содержать в себе член, равный произведению $\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon, T)\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon', T)$, где $\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon, T)$ определено в (42) (конечно же, нас интересуют близкие энергии $|\varepsilon - \varepsilon'| \ll \Delta$). Задача этого раздела как раз заключается в том, чтобы получить этот член из общей формулы (46). Для простоты выкладок мы рассмотрим

случай $\varepsilon' = \varepsilon$. Обобщение на случай различных энергий выполняется тривиальным образом и будет приведено в конце раздела.

На первый взгляд, искомый результат можно получить, вообще не проводя усреднения по медленным модам. В этом случае, диаграмма на рис. За ничем не будет отличаться от изображенной на рис. 2, поэтому ее квадрат должен дать квадрат результата (42).

В действительности, это утверждение является неверным из-за множителя $\langle \Delta G_\varepsilon \Delta G_\varepsilon \rangle$ в левой части (46). Этот множитель, как было показано ранее, вовсе не равен $-4\pi^2\nu^2$, что приводит к необходимости частичного усреднения и правой части по медленным диффузным модам. Собственно, вполне естественно ожидать, что в правой части (46) медленные диффузоры должны быть рассмотрены лишь между функциями Грина, имеющими энергию ε . В связи с этим нет необходимости извлекать нужные члены из общей формулы (46), поскольку фактически мы не выходим за рамки приближения случайных фаз. Вместо этого мы можем обратиться напрямую к формуле (33). Соответствующий вклад в мезоскопические флуктуации тогда можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle \gamma(\varepsilon, T) \gamma(\varepsilon, T) \rangle_{\text{SIA}} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \rangle \\ &= \frac{1}{4} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4 (d\omega_1)(d\omega_2) (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon-\omega_1}) (B_{\omega_2} + F_{\varepsilon-\omega_2}) \Delta V_{\omega_1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Delta V_{\omega_2}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \times \\ & \quad \times \langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Delta G_{\varepsilon-\omega_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Delta G_{\varepsilon-\omega_2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle, \quad (78) \end{aligned}$$

где усреднение в правой части подразумевает, что мы проводим два быстрых диффузора, а медленные диффузные моды учитываются только между функциями $G_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ и $G_\varepsilon(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3)$. Диаграмма, описывающая такое усреднение, изображена на рис. 6.

Вычисляется такая диаграмма способом, изложенным в предыдущем разделе. Здесь, однако, имеется один тонкий момент. Если бы усреднения по беспорядку в каждой из петель рис. 6 производились совершенно независимо (без медленного диффузора между G_ε и G_ε), то из всей суммы $\langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Delta G_{\varepsilon-\omega_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Delta G_{\varepsilon-\omega_2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle = \langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \Delta G_{\varepsilon-\omega_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle \langle \Delta G_\varepsilon(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) \Delta G_{\varepsilon-\omega_2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle$ осталось бы только четыре члена: $RARA$, $RAAR$, $ARRA$, $ARAR$ (энергетические и координатные индексы расставлены в том же порядке, что и в (78)). Это связано с необходимостью провести быстрые диффузоры в каждой из петель. Если же теперь мы хотим усреднить по медленным модам

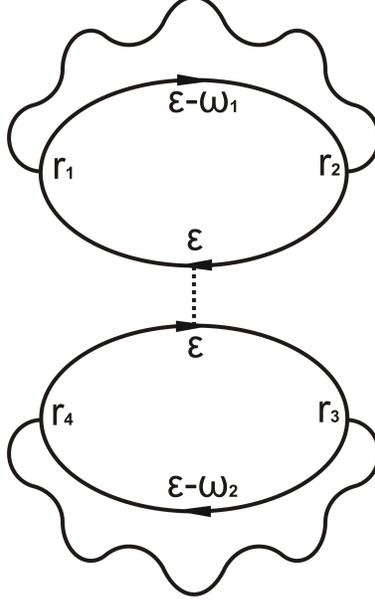


Рис. 6. Диаграмма, воспроизводящая результат Сивана, Имри и Аронова из мезоскопических флуктуаций.

функции Грина G_ϵ и $G_{\epsilon-\omega}$, то из этих четырех вкладов останутся только два: $RAAR$ и $ARRA$. Однако, в этом случае мы также должны рассмотреть еще шесть вкладов: $RRAR$, $RAAA$, $RRAA$, $ARRR$, $AARA$, $AARR$. Оказывается, что в каждом из этих восьми случаев можно провести два быстрых диффузора, и все эти члены дают одинаковый вклад в приводимую часть $\langle \gamma(\epsilon, T) \gamma(\epsilon, T) \rangle_{\text{SIA}}$.

Проводя теперь усреднение так, как это предложено в предыдущем разделе (4 функции Грина мы, естественно, разбиваем на пары $(G_\epsilon, G_{\epsilon-\omega_1})$ и $(G_{\epsilon-\omega_2}, G_\epsilon)$), получаем

$$\langle G^R G^R G^A G^R \rangle = -2(\pi\nu)^2 X_0 D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4), \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \langle G^R G^A G^A G^R \rangle &= (\pi\nu)^2 (4 + 2X_0 + 2X_1 + 4X_0 X_1) D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \\ &\quad + 4(\pi\nu)^2 Z_0 Z_1 D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \langle G^R G^R G^A G^A \rangle &= (\pi\nu)^2 (4 + 2X_0 + 2X_1^* + 4X_0 X_1^*) D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \\ &\quad + 4(\pi\nu)^2 Z_0 Z_1^* D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \end{aligned} \quad (81)$$

$$\langle G^R G^A G^A G^A \rangle = -2(\pi\nu)^2 X_0 D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) D(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4), \quad (82)$$

где опять-таки индексы во всех функциях Грина расставлены в том же порядке, что и в (78). Здесь вновь

$$X_0 = X \left(\frac{\pi\gamma(\varepsilon)}{\Delta} \right) \approx \frac{\Delta}{\pi\gamma(\varepsilon)}, \quad X_1 = X \left(\frac{\pi}{\Delta} \left\{ i(\omega_1 - \omega_2) + \frac{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon - \omega_2)}{2} \right\} \right), \quad (83)$$

$$Z_0 = Z \left(\frac{\pi\gamma(\varepsilon)}{\Delta} \right) = \frac{\Delta}{\pi\gamma(\varepsilon)}, \quad Z_1 = Z \left(\frac{\pi}{\Delta} \left\{ i(\omega_1 - \omega_2) + \frac{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon - \omega_2)}{2} \right\} \right). \quad (84)$$

Кроме того, имеются еще четыре члена, которые являются комплексно-сопряженными к (79)-(82) (получаются из (79)-(82) заменой $R \leftrightarrow A$).

Далее мы должны оставить только члены с X_0 . Члены с X_0X_1 и Z_0Z_1 содержат дополнительную малость $\Delta/\max\{\varepsilon, T\}$ и должны быть опущены. Это находится в полном соответствии со сказанным выше, так как эти члены подразумевают наличие медленных диффузонов еще и между $G_{\varepsilon-\omega_1}$, $G_{\varepsilon-\omega_2}$.

Итак, каждый из этих членов в лидирующем порядке дает вклад, равный $\gamma_{\text{SIA}}^2(\varepsilon, T)/8$, а их сумма, соответственно, равна

$$\langle \gamma(\varepsilon, T)\gamma(\varepsilon, T) \rangle_{\text{SIA}} = \frac{\Delta^2}{s^2\pi^2 E_2^4} \left(\int d\omega \omega (B_\omega + F_{\varepsilon-\omega}) \right)^2 = \gamma_{\text{SIA}}^2(\varepsilon, T). \quad (85)$$

Конечно же, если бы мы рассматривали коррелятор $\langle \gamma(\varepsilon, T)\gamma(\varepsilon', T) \rangle$, то его приводимая часть вычислялась бы совершенно аналогично и давала бы

$$\langle \gamma(\varepsilon, T)\gamma(\varepsilon', T) \rangle_{\text{SIA}} = \gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon, T)\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon', T) \quad (86)$$

5.4. Неприводимая часть коррелятора $\langle \gamma(\varepsilon, T)\gamma(\varepsilon', T) \rangle$

Теперь мы готовы перейти к подсчету непосредственно мезоскопических флуктуаций времени неупругого рассеяния. Опять же, продемонстрируем для простоты вывод для $\langle \delta\gamma(\varepsilon, T)\delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle$, а в конце приведем ответ для различных, но достаточно близких энергий ($|\varepsilon - \varepsilon'| \ll \Delta$).

5.4.1. Качественная картина

Для начала покажем из размерных соображений, каков будет порядок этих флуктуаций. Для этого вспомним, что корреляции рассчитываются из формулы (46). Чтобы,

однако, воспользоваться этим соотношением, надо разобраться, как себя ведет коррелятор (53). Рассмотрим для примера вклад (76). Напомним, что каждый диффузионный пропагатор $D(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ дает множитель $1/g = \Delta/E_{\text{Th}}$.

Далее разберемся с произведением различных X_i, Z_i из (74). Нам нужны будут члены, содержащие $X_0X_1X_2X_3, X_0X_1Z_2Z_3, Z_0Z_1X_2X_3$ и $Z_0Z_1Z_2Z_3$. Именно поэтому в разделе 5.2.2 мы выбирали пары таким образом, чтобы каждая из них содержала одну опережающую и одну запаздывающую функции Грина. Можно заметить, что, поскольку в "правильных" переменных (в (74) это $x = \omega_1 - \omega_2$ и $y = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$) все интегралы от различных X_i сходятся на масштабах γ , то величины аргументов всех X_i много меньше единицы, а потому можно в главном порядке смело написать

$$X(a) \approx Z(a) = \frac{1}{a}. \quad (87)$$

Легко увидеть, что множитель $X_0 \approx Z_0 = \Delta/\pi\gamma(\varepsilon, T)$ сократится с аналогичной величиной из левой части (46).

Теперь посмотрим на произведение $Z_1Z_2Z_3$ (произведения $X_1X_2X_3, X_1Z_2Z_3, Z_1X_2X_3$ в главном порядке будут равны тому же самому). Поскольку это произведение входит в (46) вместе с различными функциями распределения, которые на масштабе энергий порядка γ являются константой, то можно записать

$$Z_1Z_2Z_3 \sim \frac{\Delta^3\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\delta(\omega_1 - \omega_2)}{\gamma}. \quad (88)$$

Здесь δ -функции подразумеваются уширенными на величину порядка γ , что, однако, в главном порядке совершенно несущественно.

Как видим, в (88) появился большой множитель Δ/γ . Именно об этом резонансном множителе и шла речь в разделе 5.2.3. Его происхождение можно объяснить следующим образом: величины Z_1 и Z_3 обеспечивают совпадение (с точностью до γ) энергий ω_1 с ω_2 и ε_1 с ε_2 (как раз играют роль тех самых $\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\delta(\omega_1 - \omega_2)$). После этого аргумент Z_2 становится порядка γ , то есть Z_2 играет роль нульмерного (с нулевым импульсом) диффузона на нулевой частоте. Отсюда и берется множитель Δ/γ . Наглядно эта ситуация изображена на рис. 7.

В этом месте проявляется очередная необходимость непертурбативного усреднения по беспорядку. Действительно, если работать в рамках крестовой техники, то возника-

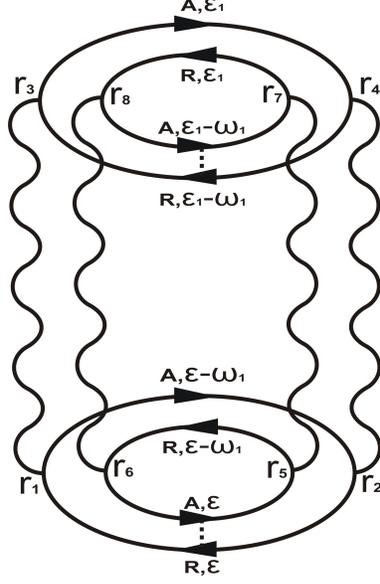


Рис. 7. Диаграмма на рис. 5 после интегрирования по промежуточным энергиям ε_2 и ω_2 . Пунктирной линией изображены оставшиеся диффузные моды, образованные между функциями Грина с совпадающими энергиями. Эти моды дают большой множитель Δ/γ .

ет следующая проблема. Между функциями Грина на совпадающих (с точностью до γ) энергиях можно провести бесконечно много диффузонов, каждый из которых дает большой множитель Δ/γ . Таким образом, все более сложные конфигурации дают все больший вклад, и не представляется возможным каким-либо образом отсуммировать все такие вклады. Как мы видим, однако, в рамках сигма-модели такой проблемы не возникает. При усреднении по медленным диффузным модам вклад от функций Грина на совпадающих энергиях остается конечным.

Замечая далее, что интегралы по оставшимся после интегрирования δ -функций частотам в (46) сходятся на энергиях порядка $\max\{\varepsilon, T\}$, получаем оценку для мезоскопических флуктуаций

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T) \delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle \sim \frac{\Delta^5 \max^2\{\varepsilon, T\}}{\gamma E_{\text{Th}}^4} \sim \frac{\Delta^4}{E_{\text{Th}}^2}. \quad (89)$$

Отсюда

$$\frac{\langle \delta\gamma(\varepsilon, T) \delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle}{\langle \gamma(\varepsilon, T) \rangle^2} \sim \frac{\Delta^2 E_{\text{Th}}^2}{\max^4(\varepsilon, T)}. \quad (90)$$

Интересно сравнить этот результат с полученным в [11]. В этой статье рассмотрена,

в частности, модель нульмерной гранулы со слабым электрон-электронным взаимодействием, характеризующемся параметром λ . Однако, в отличие от нашей работы, в [11] система изначально предполагается нульмерной (нет явного выделения быстрых кулоновских мод), а вся работа ведется в базисе точных одночастичных уровней в грануле ξ_j , т. е. затравочные функции Грина имеют вид

$$G_0^{R(A)}(\varepsilon) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon - \xi_j \pm i0}. \quad (91)$$

Для мезоскопических флуктуаций в [11] было получено выражение

$$\frac{\langle \delta\gamma(T)\delta\gamma(T) \rangle_{\text{BAA}}}{\gamma_{\text{BAA}}^2(T)} \sim \frac{\lambda^4 M \Delta^2 T}{\gamma_{\text{BAA}}^3(T)} \sim \frac{\Delta^2}{\lambda^2 M^2 T^2}, \quad (92)$$

где $\gamma_{\text{BAA}}(T) \sim \lambda^2 M T$, $\lambda \Delta$ характеризует силу электрон-электронного взаимодействия в грануле, а $M \Delta$ определяет ультрафиолетовое обрезание в модели. Как было отмечено в [4], в случае квантовой точки следует положить $\lambda \sim \Delta/E_{\text{Th}}$. Если теперь в качестве M взять $M \sim T/\Delta$ (в этом случае результат [11] для γ воспроизводит результат [1]), то как раз получаем

$$\frac{\langle \delta\gamma(T)\delta\gamma(T) \rangle_{\text{BAA}}}{\gamma_{\text{BAA}}^2(T)} \sim \frac{\Delta^2 E_{\text{Th}}^2}{T^4}, \quad (93)$$

что находится в полном соответствии с полученным нами результатом.

Из нашего результата видно, что флуктуации ширины становятся порядка самой ширины при температурах (энергиях возбуждений)

$$T^*, \varepsilon^* \sim \sqrt{\Delta E_{\text{Th}}}, \quad (94)$$

то есть как раз на энергетических масштабах, предсказанных в [4]. Соответственно, само выражение для флуктуаций в главном порядке справедливо при $\max(\varepsilon, T) \gg T^*$. В противном случае уже нельзя ограничиться вкладом лишь от диаграмм с двумя кулоновскими линиями.

Здесь уместно сказать несколько слов о физической интерпретации попарного усреднения по медленным модам. Как мы уже отмечали, энергии соответствующих функций Грина после такого усреднения становятся одинаковыми с точностью до $i\gamma$. Но если вспомнить, что уровни в нашей системе хорошо различимы ($\Delta \gg \gamma$), то физически такое усреднение означает попарное совпадение соответствующих состояний. Значит,

существенный вклад в мезоскопические флуктуации дают именно те диаграммы, которые описывают квадрат одного и того же процесса распада, то есть диаграммы, в которых конечные состояния попарно совпадают.

5.4.2. Вычисления

Теперь, когда физическая сторона явления нам ясна, остается лишь собрать все диаграммы, которые вносят существенный вклад в мезоскопические флуктуации, и найти все коэффициенты. Во-первых, вычислим коэффициент пропорциональности в (88):

$$\int d\varepsilon_2 d\omega_2 Z_1 Z_2 Z_3 = \frac{4\Delta^3}{\pi} \frac{1}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (95)$$

Таким образом, в главном порядке можно записать

$$X_1 X_2 X_3 = X_1 Z_2 Z_3 = Z_1 X_2 X_3 = Z_1 Z_2 Z_3 = \frac{4\Delta^3}{\pi} \frac{\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \delta(\omega_1 - \omega_2)}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (96)$$

С учетом этого, вклад от диаграммы на рис. 5 в (46) равен

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T) \delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle'_1 = \frac{\Delta^5}{8\pi^3 s^2} \left(\frac{1}{E_2^4} + \frac{1}{E_4^4} \right) \int d\varepsilon_1 d\omega_1 \frac{(F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1})^2 (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon - \omega_1})^2}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (97)$$

Далее необходимо найти все диаграммы, аналогичные изображенной на рис. 5, но с иной расстановкой индексов R и A . Здесь надо иметь в виду следующее обстоятельство. Поскольку мы интересуемся именно заданным усреднением по медленным модам (то есть считаем, что пары, между которыми имеются нульмерные диффузоны, остаются теми же), то у нас имеется только $2^4 = 16$ способов расставить индексы R и A . Не все из них, однако, дают вклад. Чтобы это понять, взглянем для примера на коррелятор

$$K' = \langle G_{\varepsilon}^R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) G_{\varepsilon}^A(\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_5) G_{\varepsilon - \omega_2}^R(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) G_{\varepsilon - \omega_1}^A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_{\varepsilon_1 - \omega_1}^R(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) G_{\varepsilon_2 - \omega_2}^A(\mathbf{r}_8, \mathbf{r}_7) G_{\varepsilon_2}^A(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) G_{\varepsilon_1}^R(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \rangle. \quad (98)$$

Он похож на коррелятор (53), с той лишь разницей, что здесь стоят $G_{\varepsilon_2}^A(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) G_{\varepsilon_1}^R(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ вместо $G_{\varepsilon_2}^R(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) G_{\varepsilon_1}^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$. Нетрудно догадаться, что такой коррелятор после усреднения по медленным модам даст множители вида $X_1 X_2 X_3^*$, $X_1 Z_2 Z_3^*$, $Z_1 X_2 X_3^*$, $Z_1 Z_2 Z_3^*$. Но легко заметить, что формула (95) для таких произведений более не справедлива. Действительно, так как оба полюса переменной ε_2 теперь лежат в верхней полуплоскости,

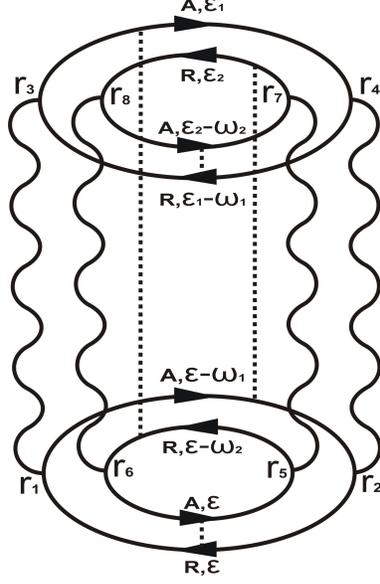


Рис. 8. Еще один способ усреднения по медленным модам диаграммы на рис. 4.

в этом случае получаем $\int d\varepsilon_2 Z_1 Z_2 Z_3^* = 0$. Иными словами, мы получаем δ -функции с нулевым весом.

Это обстоятельство сужает набор возможных расстановок индексов R и A до четырех: $RARARARA$, $ARRARARA$, $RAARARAR$, $ARARARAR$ (энергетические и координатные индексы расставлены так же, как и в (53)). Каждый из таких способов расстановок индексов дает одинаковый вклад в мезоскопические флуктуации, равный (97). В итоге, вклад от всех диаграмм, аналогичных изображенной на рис. 5 (с тем же усреднением по нульмерным диффузным модам, но со всеми возможными расстановками индексов R и A) равен

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T) \delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle_{11} = \frac{\Delta^5}{2\pi^3 s^2} \left(\frac{1}{E_2^4} + \frac{1}{E_4^4} \right) \int d\varepsilon_1 d\omega_1 \frac{(F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1})^2 (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon - \omega_1})^2}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (99)$$

Теперь следует отметить, что существуют и другие возможности выбрать пары для усреднения по медленным модам. Главное, чтобы в итоге мы смогли написать формулу, аналогичную (96), с двумя δ -функциями и γ в знаменателе. Непосредственной проверкой убеждаемся, что диаграмма на рис. 8 также удовлетворяет данным требованиям (других вариантов усреднить по медленным модам и получить существенный вклад во флуктуации больше нет).

В этом случае возможны те же самые четыре варианта расставить индексы R и A .

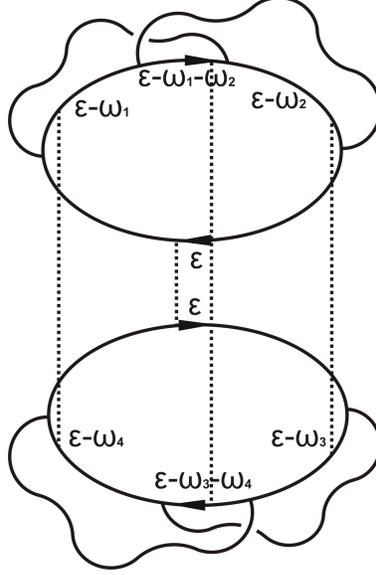


Рис. 9. Квадрат диаграммы на рис. 3b, вносящий вклад в мезоскопические флуктуации.

Рассчитываются данные диаграммы абсолютно аналогично тому, как это было сделано выше, и суммарный вклад от этих четырех диаграмм равен (после соответствующей замены переменных, обозначенных на рис. 8)

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T)\delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle_{12} = \frac{\Delta^5}{4\pi^3 s^2 E_2^4} \int d\varepsilon_1 d\omega_1 \frac{(F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1})^2 (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon - \omega_1})^2}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (100)$$

Теперь, наконец-то, время вспомнить про диаграмму на рис. 3b. Соответственно, вклад в мезоскопические флуктуации даст диаграмма на рис. 9. Это единственный способ осуществить попарное усреднение по медленным модам, при котором мы получаем существенный вклад в $\langle \delta\gamma\delta\gamma \rangle$. С учетом всевозможных комбинаций индексов R, A (которых также четыре) получаем вклад во флуктуации (также после соответствующей замены переменных, обозначенных на рис. 9)

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T)\delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle_2 = \frac{\Delta^5}{4\pi^3 s^4 E_2^4} \int d\varepsilon_1 d\omega_1 \frac{(F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1})^2 (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon - \omega_1})^2}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (101)$$

Отметим, что перекрестные члены (произведение диаграмм на рис. 3a и 3b) в главном порядке вклада в мезоскопические флуктуации не вносят.

5.4.3. Результат

Суммируя теперь все вклады (99), (100) и (101), получаем окончательный ответ:

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T)\delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle = \frac{\Delta^5}{2\pi^3 s^2} \left(\frac{3s^2 + 1}{2s^2 E_2^4} + \frac{1}{E_4^4} \right) \int d\varepsilon_1 d\omega_1 \frac{(F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1})^2 (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon - \omega_1})^2}{\gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \quad (102)$$

При $T = 0$ данный интеграл можно посчитать точно:

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, 0)\delta\gamma(\varepsilon, 0) \rangle = \frac{8\Delta^4 E_2^2 a_0}{\pi^2 s} \left(\frac{3s^2 + 1}{2s^2 E_2^4} + \frac{1}{E_4^4} \right), \quad (103)$$

где

$$a_0 = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3(x - 2/3)^2 + 2/3}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{3(x - 2/3)^2 + 2/3}} \right) \approx 1.059. \quad (104)$$

Как видим, квадрат энергии ε^2 в числителе сокращается с квадратом энергии из $\gamma(\varepsilon)$ в знаменателе в полном соответствии с (89):

$$\langle \delta\gamma(\varepsilon, T)\delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle \sim \frac{\Delta^5 \max^2\{\varepsilon, T\}}{\gamma E_{\text{Th}}^4} \sim \frac{\Delta^4}{E_{\text{Th}}^2}. \quad (105)$$

Соответственно, при близких ($|\varepsilon - \varepsilon'| \ll \Delta$) энергиях (102) переходит в

$$\begin{aligned} \langle \delta\gamma(\varepsilon', T)\delta\gamma(\varepsilon, T) \rangle &= \frac{\Delta^5}{2\pi^3 s^2} \left(\frac{3s^2 + 1}{2s^2 E_2^4} + \frac{1}{E_4^4} \right) \\ &\times \int d\varepsilon_1 d\omega_1 \operatorname{Re} \frac{(F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1})^2 (B_{\omega_1} + F_{\varepsilon - \omega_1})^2}{i(\varepsilon - \varepsilon') + \gamma(\varepsilon - \omega_1) + \gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_1 - \omega_1)}. \end{aligned} \quad (106)$$

Выражения (105) и (106) являются главным результатом данной работы.

Здесь не лишним будет прокомментировать появление в выражении для мезоскопических флуктуаций $\gamma(E)$, наряду с величиной E_2 , также величины E_4 (см. определение (2)). Ее появление связано с негауссовостью статистики матричных элементов кулоновского взаимодействия по точным волновым функциям неупорядоченной системы. Действительно, если бы статистика была гауссовой, то входящее в рассматриваемые диаграммы среднее от четвертой степени матричных элементов, согласно теореме Вика, выражалось бы через квадрат парного коррелятора. Последний же, как известно, пропорционален $1/E_2^2$ [3, 4]. Таким образом, появление в окончательном ответе величины $1/E_4^4$ есть отражение негауссовости статистики матричных элементов взаимодействия. Данное обстоятельство нужно иметь в виду при построении теории локализации в фокковском пространстве для квантовой точки.

6. Заключение

В данной работе мы получили формулу для величины мезоскопических флуктуаций времени неупругого рассеяния за счет электрон-электронного взаимодействия в квантовой точке. Было показано, что среднеквадратичные флуктуации становятся порядка средней ширины уровней при температуре (энергии возбуждений), предсказанной в работе [4]. Наш результат является точным (для унитарного класса симметрии) и не использует никаких модельных предположений о свойствах взаимодействия. Этим, во многом, обусловлена сложность расчета, который фактически содержит вычисление четвертого момента матричного элемента взаимодействия, чья статистика не является гауссовой. Стоит отметить, что подобное вычисление проведено впервые.

К сожалению, проверить экспериментально полученные результаты в ближайшее время вряд ли представится возможным по причине сверхвысокой точности такого рода измерений. Можно, однако, попробовать применить разработанную технику для описания поглощения света в гранулах, где, по видимому, важную роль играют именно переходы между многочастичными состояниями. Также представляется интересным связать результат данной работы с локализационными поправками к транспортным коэффициентам гранулированных металлов. Именно этими задачами мы и планируем заняться в ближайшее время.

Я безмерно благодарен своему научному руководителю М. А. Скворцову за постоянное внимание и неоценимую помощь в работе, И. Алейнеру за идею, которая помогла в конечном счете понять физическую сторону задачи, а также В. Е. Кравцову, М. В. Фейгельману и другим сотрудникам ИТФ им. Ландау за полезные обсуждения и критичные замечания касательно данной работы.

А. Выражения $Y_{abcd}(\varepsilon, \varepsilon', \omega, \mathbf{q})$

В этом разделе мы приведем явные выражения для эффективных кулоновских пропагаторов $Y_{abcd}(\varepsilon, \varepsilon', \omega, \mathbf{q})$, определенных в уравнении (27). Все кулоновские пропагаторы V подразумеваются функциями от частоты ω и импульса \mathbf{q} .

$$Y_{RR,RR} = V^K + F_{\varepsilon'-\omega}V^R + F_\varepsilon V^A \quad (\text{A1})$$

$$Y_{RR,RA} = (F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})V^K - (1 - F_{\varepsilon'}F_{\varepsilon'-\omega})V^R + F_\varepsilon(F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})V^A \quad (\text{A2})$$

$$Y_{RR,AR} = -V^R \quad (\text{A3})$$

$$Y_{RR,AA} = V^K - F_{\varepsilon'}V^R + F_\varepsilon V^A \quad (\text{A4})$$

$$Y_{RA,RR} = -(F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})V^K - (F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})F_{\varepsilon'-\omega}V^R - (1 - F_\varepsilon F_{\varepsilon-\omega})V^A \quad (\text{A5})$$

$$Y_{RA,RA} = -(F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})(F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})V^K + (F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})(1 - F_{\varepsilon'}F_{\varepsilon'-\omega})V^R - (1 - F_\varepsilon F_{\varepsilon-\omega})(F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})V^A \quad (\text{A6})$$

$$Y_{RA,AR} = (F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})V^R \quad (\text{A7})$$

$$Y_{RA,AA} = -(F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})V^K + (F_\varepsilon - F_{\varepsilon-\omega})F_{\varepsilon'}V^R - (1 - F_\varepsilon F_{\varepsilon-\omega})V^A \quad (\text{A8})$$

$$Y_{AR,RA} = -(F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})V^A \quad (\text{A9})$$

$$Y_{AR,AR} = 0 \quad (\text{A10})$$

$$Y_{AR,AA} = -V^A \quad (\text{A11})$$

$$Y_{AR,RR} = -V^A \quad (\text{A12})$$

$$Y_{AA,RA} = (F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})V^K - (1 - F_{\varepsilon'}F_{\varepsilon'-\omega})V^R - (F_{\varepsilon'} - F_{\varepsilon'-\omega})F_{\varepsilon-\omega}V^A \quad (\text{A13})$$

$$Y_{AA,AA} = V^K - F_{\varepsilon'}V^R - F_{\varepsilon-\omega}V^A \quad (\text{A14})$$

$$Y_{AA,RR} = V^K - F_{\varepsilon-\omega}V^A + F_{\varepsilon'-\omega}V^R \quad (\text{A15})$$

$$Y_{AA,AR} = -V^R \quad (\text{A16})$$

Б. Правила слияния для нульмерного случая

В ефетовской параметризации действие при усреднении двух функций Грина $G_{\varepsilon_1}^R$ и $G_{\varepsilon_2}^A$ имеет вид

$$S_0 = a(\lambda_B - \lambda_F), \quad (\text{B1})$$

где

$$a = \frac{\pi}{\Delta} \left\{ -i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{\gamma(\varepsilon_1) + \gamma(\varepsilon_2)}{2} \right\}. \quad (\text{B2})$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что правила слияния (68) и (69) в этом случае даются формулами

$$\begin{aligned} \langle \text{str}PQ\text{str}RQ \rangle &= \text{str}P\Lambda\text{str}B\Lambda + Z\text{str}(PR - P\Lambda R\Lambda) - X(\text{str}P\text{str}R - \text{str}P\Lambda\text{str}R\Lambda), \\ \langle \text{str}PQRQ \rangle &= \text{str}A\Lambda B\Lambda + Z(\text{str}A\text{str}B - \text{str}A\Lambda\text{str}B\Lambda) - X\text{str}(AB - A\Lambda B\Lambda), \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

где

$$X = \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda_F \int_1^\infty d\lambda_B e^{-S_0}, \quad Z = \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda_F \int_1^\infty d\lambda_B \frac{\lambda_B + \lambda_F}{\lambda_B - \lambda_F} e^{-S_0}. \quad (\text{B4})$$

Примечательно, что данные интегралы можно вычислить точно:

$$X(a) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda_F \int_1^\infty d\lambda_B e^{-a(\lambda_B - \lambda_F)} = \frac{1 - e^{-2a}}{2a^2}, \quad (\text{B5})$$

$$Z(a) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda_F \int_1^\infty d\lambda_B \frac{\lambda_B + \lambda_F}{\lambda_B - \lambda_F} e^{-a(\lambda_B - \lambda_F)} = \frac{1}{a}. \quad (\text{B6})$$

В. Упругий диффузон с учетом электрон-электронного взаимодействия

Здесь мы приведем вычисление упругого нульмерного (с нулевым импульсом) диффузона $D_{\text{el}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Поскольку мы рассматриваем только упругие процессы (не приводящие к обмену частотами между функциями Грина $G_{\varepsilon_1}^R$ и $G_{\varepsilon_2}^A$), то $D_{\text{el}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ может быть найден из алгебраического (а не интегрального) уравнения:

$$D_{\text{el}}^R(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = D_0^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, 0) + D_0^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, 0)\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)D_{\text{el}}^R(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (\text{B1})$$

где $D_0^R(\omega, \mathbf{q})$ — затравочный диффузон, определенный в (35), а $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — упругая собственно-энергетическая часть (также с нулевым импульсом). В низшем порядке по взаимодействию $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ дается диаграммами, изображенными на рисунках 10 и 11. Здесь уже штрихованными линиями обозначается обычный затравочный диффузон $D_0(\omega, \mathbf{q})$.

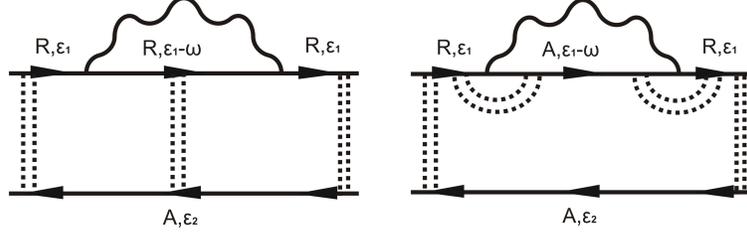


Рис. 10. Упругие поправки к диффузону вследствие модификации G^R .

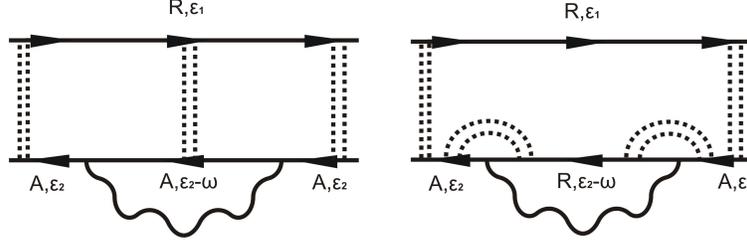


Рис. 11. Упругие поправки к диффузону вследствие модификации G^A .

Вклад диаграмм на рис. 10 равен

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = & -\frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) D_0^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega, \mathbf{q}) (V^K + F_{\varepsilon_1 - \omega} V^R + F_{\varepsilon_1} V^A) + \\ & + \frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) (Dq^2 - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega)) (D_0^R(\omega, \mathbf{q}))^2 (F_{\varepsilon_1} - F_{\varepsilon_1 - \omega_1}) V^R, \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

где все кулоновские пропагаторы берутся на частоте ω и импульсе \mathbf{q} .

Вклад диаграмм на рис. 11 равен

$$\begin{aligned} \Pi_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = & -\frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) D_0^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega, \mathbf{q}) (V^K - F_{\varepsilon_2} V^R - F_{\varepsilon_2 - \omega} V^A) + \\ & + \frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) (Dq^2 - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega)) (D_0^R(-\omega, \mathbf{q}))^2 (F_{\varepsilon_2 - \omega} - F_{\varepsilon_2}) V^A, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

или после замены $\omega \rightarrow -\omega$

$$\begin{aligned} \Pi_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = & -\frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) D_0^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega, \mathbf{q}) (V^K - F_{\varepsilon_2} V^A - F_{\varepsilon_2 - \omega} V^R) + \\ & + \frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) (Dq^2 - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega)) (D_0^R(\omega, \mathbf{q}))^2 (F_{\varepsilon_2 + \omega} - F_{\varepsilon_2}) V^R. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Суммируя теперь вклады (B2) и (B4) и опуская члены, которые обнуляются вслед-

ствие правил аналитичности (32), для собственно-энергетической части получаем

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \Pi_1 + \Pi_2 = & -\frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) D_0^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega, \mathbf{q}) (2V^K - (F_{\omega-\varepsilon_1} + F_{\omega+\varepsilon_2})V^R) + \\ & + \frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) \left(D_0^R(\omega, \mathbf{q}) - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (D_0^R(\omega, \mathbf{q}))^2 \right) (F_{\omega-\varepsilon_1} + F_{\omega+\varepsilon_2})V^R. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Делая замену переменных в первом слагаемом, чтобы выделить в нем $D_0^R(\omega, \mathbf{q})$, получим

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = & -\frac{i}{2} \int (d\omega)(d\mathbf{q}) D_0^R(\omega, \mathbf{q}) (2V^K(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega, \mathbf{q}) + \\ & + (F_{\omega-\varepsilon_1} + F_{\omega+\varepsilon_2}) (V^R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega, \mathbf{q}) - V^R(\omega, \mathbf{q}) + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) D_0^R(\omega, \mathbf{q}) V^R(\omega, \mathbf{q}))) . \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

В универсальном пределе получаем

$$\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{1}{s\nu} \int \frac{(d\omega)(d\mathbf{q})}{Dq^2(Dq^2 - i\omega)} (2(\omega - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2))B_{\omega-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)} - \omega(F_{\omega-\varepsilon_2} + F_{\omega+\varepsilon_2})). \quad (\text{B7})$$

Делая еще одну замену переменных, получаем

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = & -\frac{1}{s\nu} \int \frac{(d\omega)(d\mathbf{q})\omega(2B_\omega - (F_{\omega-\varepsilon_2} + F_{\omega+\varepsilon_1}))}{Dq^2(Dq^2 - i\omega - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))} + \\ & + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{s\nu} \int \frac{(d\omega)(d\mathbf{q})(F_{\omega-\varepsilon_2} + F_{\omega+\varepsilon_1})}{Dq^2(Dq^2 - i\omega - i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))}. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

Два слагаемых в этом выражении очень разные. В первом слагаемом интегрирование по ω сходится на масштабе $\max\{T, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, а суммирование по импульсам сходится при $Dq^2 \sim E_{\text{Th}}$. Во втором же слагаемом основной вклад берется из области $E_{\text{Th}} \ll Dq^2 \ll \omega \ll \tau^{-1}$ (τ — время свободного пробега). Считая, что распределение равновесное, получаем

$$\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{\Delta}{2\pi s E_2^2} (2\pi^2 T^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{s\nu} \int \frac{(d\omega)(d\mathbf{q}) \text{sign } \omega}{Dq^2(Dq^2 - i\omega)}. \quad (\text{B9})$$

Вспоминая результат для $\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon, T)$ (42), имеем

$$\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\frac{1}{2} (\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_1, T) + \gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_2, T)) + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(Z - 1), \quad (\text{B10})$$

где

$$Z - 1 = \frac{2}{\pi s\nu} \int_{1/L}^{1/l} \frac{(d\mathbf{q})}{Dq^2} \ln \frac{1}{Dq^2 \tau}, \quad (\text{B11})$$

L — линейный размер образца, l — длина свободного пробега. В итоге для упругого диффузона получаем

$$D_{\text{el}}^R(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{-i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)Z + \frac{1}{2}(\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_1, T) + \gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_2, T))}. \quad (\text{B12})$$

Легко увидеть, что $Z - 1 \ll 1$, а потому можно записать

$$D_{\text{el}}^R(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{-i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_1, T) + \gamma_{\text{SIA}}(\varepsilon_2, T))}. \quad (\text{B13})$$

Список литературы

- [1] U. Sivan, Y. Imry, and A. G. Aronov, *Europhys. Lett.* **28**, 115 (1994).
- [2] U. Sivan, F. P. Milliken, K. Milkove, S. Rishton, Y. Lee, J. M. Hong, V. Boegli, D. Kern, and M. deFranza, *Europhys. Lett.* **25**, 605 (1994).
- [3] Ya. M. Blanter, *Phys. Rev. B* **54**, **12**, 807 (1996).
- [4] B. L. Altshuler, Y. Gefen, A. Kamenev, and L. S. Levitov, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2803 (1997).
- [5] R. Abou-Chacra, P. W. Anderson, and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1734 (1973).
- [6] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov, *Phys. Rev. B* **56**, 13393 (1997).
- [7] Ph. Jacquod and D.L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1837 (1997).
- [8] P. G. Silvestrov, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3994 (1997).
- [9] X. Leyronas, J. Tworzydło, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4894 (1999).
- [10] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* (Benjamin, New York, 1969), Vol. 1, p. 284.
- [11] D.M. Basko, I.L. Aleiner, and B.L. Altshuler, *Annals of Physics* **321**, 1126 (2006).
- [12] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206603 (2005).
- [13] K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, New York, 1997).
- [14] D. M. Basko, M. A. Skvortsov, and V. E. Kravtsov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 096801 (2003).
- [15] M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. B* **68**, 041306 (2003).
- [16] V. E. Kravtsov and A. D. Mirlin, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **60**, 645 (1994) [*JETP Lett.* **60**, 656 (1994)].

- [17] L.V. Keldysh Zh. Eksp. Teor. Fiz., **47** (1964), p. 1945 [Sov. Phys. JETP **20** (1977) 1018].
- [18] A. Kamenev and A. Andreev, Phys. Rev. B **60**, 2218 (1999).
- [19] J. Rammer and H. Smith, Rev. Mod. Phys. **58**, 323 (1986).
- [20] D. M. Basko, Phys. Rev. Lett. **91**, 206801 (2003)