

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Выпускная квалификационная работа на степень магистра

# **Эффект динамо и корреляции магнитного поля в двумерных хаотических потоках.**

Студент 728 гр. Крайнов Лев Олегович

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Колоколов И.В.

Черноголовка 2013 г.

# Содержание

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Введение                                | 2  |
| 2 | Постановка задачи                       | 3  |
| 3 | Усреднение экспонент                    | 4  |
| 4 | Режим Бachelора                         | 5  |
| 5 | Динамо на торе                          | 7  |
| 6 | Заключение                              | 9  |
| A | Регуляризация стохастических интегралов | 10 |

# 1 Введение

Эффект динамо - рост магнитного поля в проводящей гидродинамической среде в присутствии неоднородного течения. Считается, что именно этот эффект ответствен за появление магнитных полей у планет, звезд и галактик [1–3]. Динамо управляется двумя процессами - ростом магнитного поля за счет растяжения силовых линий вследствие адвекции и диссипацией энергии вследствие диффузии. На первоначальной стадии можно рассматривать магнитное поле как пассивное, живущее в заданном поле скоростей, позже, когда поле становится достаточно сильным, включается обратное влияние поля на течение жидкости. Нас будет интересовать первая, кинематическая стадия.

В работах [4–6] было представлено доказательство антидинамо теоремы для случая двумерного течения среды. Однако, авторы работы [7] изучали эффективно-двумерную задачу и пришли к противоположному выводу. Данный вопрос мы и будем изучать.

Магнитное поле в проводящей среде описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\ \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $\mathbf{j}$  - плотность тока зарядов в среде,  $\sigma$  - удельная проводимость. В несжимаемой жидкости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . В результате уравнение эволюции магнитного поля принимает вид:

$$\partial_t \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \kappa \Delta \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

Где введен коэффициент магнитодиффузии  $\kappa = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ . Магнитное поле считается слабым и обратное влияние на поток пренебрежимо мало.

Сначала покажем, что в случае чисто двумерного магнитного поля и поля скоростей затухание неизбежно. В двумерном случае магнитное поле можно описать векторным потенциалом, направленным по оси  $z$ , и не зависящим от координаты  $z$ :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

Подставляя эти выражения в (1) получаем

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) A_z + \kappa \Delta A_z \quad (4)$$

это уравнение является уравнением диффузии и поэтому  $A_z$ , а вместе с ним и  $\mathbf{B}$ , затухает.

Вернемся к случаю трехмерного магнитного поля  $\mathbf{B} = (H_x, H_y, B_z)$  в двумерном потоке, т.е. будем считать что  $v_z = 0$  и  $v_x, v_y$  зависят только от  $x$  и  $y$ . Тогда из

уравнений (2)-(3) получаем систему

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \kappa \Delta \mathbf{H} \\ \partial_t B_z = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) B_z + \kappa \Delta B_z \\ \operatorname{div} \mathbf{H} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Тут все дифференциальные операторы кроме лапласиана двумерные. Уравнение на третью компоненту поля аналогично уравнению (4) и поэтому она также затухает. В этот момент авторы работ [4–6] делают ошибочный вывод, что поскольку  $B_z$  экспоненциально затухает, то им можно пренебречь в условии бездивергентности. Тогда мы получаем уже описанное выше двумерное бездивергентное магнитное поле, которое также затухает. На самом деле нетрудно убедиться, что двумерная дивергенция  $\mathbf{H}$  подчиняется тому же уравнению, что и  $B_z$ :

$$\partial_t (\operatorname{div} \mathbf{H}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{H} + \kappa \Delta \operatorname{div} \mathbf{H}$$

то есть оба члена третьего уравнения из (5) затухают с одинаковой экспонентой.

Мы видим, что для эффекта динамо для двумерного магнитного поля принципиально иметь ненулевую дивергенцию в плоскости. В данной работе мы покажем наличие усиления такого поля в двумерном турбулентном потоке.

## 2 Постановка задачи

Мы будем рассматривать случай турбулентного течения несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , причем течение будет предполагаться двумерным  $v_z = 0$ ,  $v_x, v_y$  зависят только от  $x$  и  $y$ . Поле скоростей будем описывать моделью Крайчнена [8], т.е. гауссовым и дельта-коррелированным по времени

$$\langle v_i(\mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta(t - t') D_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6)$$

$$D_{ij}(r) = D_0 \delta_{ij} - \frac{1}{2} d_{ij}(r) \quad (7)$$

$D_0$  является эффективным коэффициентом диффузии и определяет относительное движение двух частиц жидкости на больших временах. Поведение  $d(r)$  определяется двумя масштабами: вязким масштабом  $\eta$  и масштабом корреляции скорости  $L$ . В интервале  $r \ll \eta$  градиент скорости можно считать постоянным и  $d(r) \sim r^2$ . В инерционном интервале  $\eta \ll r \ll L$  скейлинг определяется параметром  $\xi$  и  $d(r) \sim r^\xi$ . На больших масштабах  $r \gg L$  коррелятор затухает к 0.

В двумерном потоке ляпуновских экспонент только две и вследствие несжимаемости потока их сумма равна 0,  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ .

Будем считать, что  $H_x$  и  $H_y$  компоненты поля также не зависят от  $z$ . Тогда из (5) получаем чисто двумерное уравнение эволюции поля  $\mathbf{H}$ :

$$\partial_t \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \kappa \Delta \mathbf{H} \quad (8)$$

Заметим, что в идеальном проводнике  $\kappa = 0$  и силовые линии поля “вморожены” в поток. Усиление поля происходит за счет вытягивания силовых линий и ляпуновская экспонента магнитного поля совпадает с экспонентой растяжения расстояния между двумя близкими частицами жидкости, так как уравнение эволюции инфинитезимального элемента линии тока совпадает с уравнением эволюции магнитного поля в Лагранжевом описании.

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{R}(t), t) &= (\mathbf{H}(\mathbf{R}(t), t) \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ \partial_t \Delta \mathbf{R} &= \mathbf{v}(\mathbf{R}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{R}_2) \approx (\Delta \mathbf{R} \cdot \nabla) \mathbf{v}\end{aligned}$$

То есть  $B(r, t)^2$  растет также, как и  $\Delta R^2$ . В реальности некоторая малая диффузия всегда есть и усиление магнитного поля с экспонентой  $\lambda$  будет происходить только до тех пор, пока размер исходных корреляций магнитного поля  $l$  не сожмется до  $r_d = \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}$ . Это произойдет в момент времени  $t_d = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{l}{r_d}$ . Отсюда видно, что сколь угодно малая диффузия меняет характер роста поля на временах  $t \gg t_d$ .

Поскольку нам нужно учитывать наличие диффузии, то одноточечный коррелятор для этого не годится. Поэтому объектом изучения будет двухточечный одновременной коррелятор магнитного поля

$$F_{ij}(r_1 - r_2, t) = \langle H_i(r_1, t) H_j(r_2, t) \rangle$$

и мы будем интересоваться как он ведет себя на больших временах  $t \gg t_d$ .

$$\bar{\gamma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(F_{ij}(r, t))}{t}$$

### 3 Усреднение экспонент

Формальное решение уравнения (8):

$$H_i(r, t) = \hat{W}_{ij}(r, t, t') H_j(r, t') = (T \exp \int_{t'}^t \hat{A}(r, \tau) d\tau)_{ij} H_j(r, t') \quad (9)$$

Где мы ввели оператор  $A_{ik}(r, t) = (\nabla_k v_i) - \delta_{ik} v_l \nabla_l + \kappa \delta_{ik} \Delta$  и определили T-экспоненту  $\hat{W}$ .

При усреднении коррелятора  $F_{ij}$  будем отдельно усреднять по статистике скоростей и статистики изначальных флуктуаций поля. При усреднении по скоростям разные моменты времени разделяются, т.к. во времени поток хаотичен.

$$\begin{aligned}F_{ij}(r_1 - r_2, t) &= \langle \hat{W}_{ip}(r_1, 0, t) \hat{W}_{jq}(r_2, 0, t) \rangle \langle H_p(r_1, 0) H_q(r_2, 0) \rangle \\ F_{ij}(r_1 - r_2, t + \varepsilon) &= \langle \hat{W}_{ip}(r_1, t, t + \varepsilon) \hat{W}_{jq}(r_2, t, t + \varepsilon) \rangle F_{ij}(r_1 - r_2, t)\end{aligned} \quad (10)$$

Теперь сделаем шаг по времени  $\varepsilon$  малым и разложим экспоненты до второго порядка:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{ip}(r_1, t, t + \varepsilon) \hat{W}_{jq}(r_2, t, t + \varepsilon) &= \delta_{ip} \left( \int_t^{t+\varepsilon} d\tau A_{2jq}(\tau) + \int_t^{t+\varepsilon} d\tau \int_t^\tau d\tau' A_{2jm}(\tau) A_{2mq}(\tau') \right) + \\ &+ \delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jq} \left( \int_t^{t+\varepsilon} d\tau A_{1ip}(\tau) + \int_t^{t+\varepsilon} d\tau \int_t^\tau d\tau' A_{1im}(\tau) A_{1mp}(\tau') \right) + \int_t^{t+\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} d\tau d\tau' A_{1ip}(\tau) A_{2jq}\end{aligned}$$

Усредняем данное выражение согласно (6). Нетривиальное усреднение будет происходить только с членами квадратичными по  $\hat{A}$ . При этом будут возникать интегралы вида  $\int_0^a \delta(t) dt$ , требующие регуляризации. Мы пользуемся регуляризацией Стратоновича (см. приложение А). Из линейных по  $\hat{A}$  членов будут только вклады от диффузионных членов. Собирая члены линейные по  $\varepsilon$  и вводя обозначение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , в итоге получаем уравнение эволюции  $F_{ij}$ :

$$\partial_t F_{ij} = -F_{pq} \partial_p \partial_q d_{ij} + \partial_p d_{ik} \partial_k F_{pj} + \partial_q d_{kj} \partial_k F_{iq} - (d_{kl}(\mathbf{r}) - d_{kl}(0)) \partial_k \partial_l F_{ij} + 2\kappa \Delta F_{ij} \quad (11)$$

## 4 Режим Бachelора

Одной из двух рассматриваемых нами систем будет режим Бachelора модели Крайчнена, когда при масштабах  $r \ll L$  корреляторы градиентов скоростей от координат не зависят

$$d_{ij}(r) = -D \left[ \frac{3}{2} \delta_{ij} r^2 - r_i r_j \right] \quad (12)$$

$$\partial_q d_{ij} = -D [3r_q \delta_{ij} - r_j \delta_{iq} - r_i \delta_{jq}] \quad (13)$$

$$-\langle \partial_p^1 u_i^1 \partial_q^2 u_j^2 \rangle = \partial_q \partial_p d_{ij} = -D [3\delta_{ij} \delta_{pq} - \delta_{iq} \delta_{pj} - \delta_{ip} \delta_{qj}] \quad (14)$$

Подставляя в (11), получаем

$$\begin{aligned} \partial_t F_{ij} = D \left[ 3\delta_{ij} F_{kk} - 2F_{ij} - 3(r_k \partial_j F_{ik} + r_k \partial_i F_{kj}) + 2(r \nabla) F_{ij} + r_i \partial_k F_{kj} + r_j \partial_k F_{ik} + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} r^2 \nabla^2 F_{ij} - r_n r_m \partial_n \partial_m F_{ij} \right] + 2\kappa \Delta F_{ij} \quad (15) \end{aligned}$$

Отметим, что для этой модели ляпуновская экспонента потока  $\lambda = 4D$ , что легко увидеть если положить в уравнении  $r = \kappa = 0$ , что соответствует одноточечному коррелятору в идеальном проводнике.

Будем изучать данное уравнение при  $r \gg r_d$ , тогда диффузией можно пренебречь. Для удобства вычислений положим  $D = 1$ . Разложим  $F_{ij}$  на полярные компоненты:

$$F_{ij} = \delta_{ij} \Phi(r) + \frac{r_i r_j}{r^2} G(r) \quad (16)$$

Получаем систему уравнений:

$$\partial_t \Phi = 4\Phi + \frac{7}{2} r \Phi' + \frac{1}{2} r^2 \Phi'' \quad (17)$$

$$\partial_t G = -\frac{1}{2} r G' + \frac{1}{2} r^2 G'' - 4r \Phi' \quad (18)$$

В случае бездивергентного поля мы должны были бы наложить на  $\Phi$  и  $G$  дополнительное условие  $\Phi' + \frac{d-1}{r} G + G' = 0$ . Но в нашей задаче такого ограничения нет и поэтому можно считать функции  $\Phi$  и  $G$  независимыми.

Заметим, что систему (17)-(18) можно представить в виде

$$\partial_t \Phi = 4\Phi + \frac{7}{2} r \Phi' + \frac{1}{2} r^2 \Phi'' \quad (19)$$

$$\partial_t G = 4G + \frac{7}{2} r G' + \frac{1}{2} r^2 G'' - 4C \quad (20)$$

Где мы ввели величину пропорциональную дивергенции магнитного поля  $C(r, t) = r_j \langle \text{div } \mathbf{B}(r, t) B_j(0, t) \rangle = r\Phi' + G + rG'$ . Если дивергенция равна 0, то  $C = 0$  и для функций  $\Phi$ ,  $G$  получаем раздельную систему одинаковых уравнений, все решения которых затухают.

Теперь нужно выяснить, имеются ли у системы (17)-(18) решения с положительной ляпуновской экспонентой. Для этого делаем преобразование Лапласа и исследуем резольвенту получившегося оператора на вычеты в области  $\text{Re}(p) > 0$ .

Система уравнений после преобразования Лапласа:

$$\Phi_0 + p\Phi = \hat{L}_1\Phi \quad (21)$$

$$G_0 + pG = \hat{L}_3\Phi + \hat{L}_2G \quad (22)$$

$$L_1 = 4 + \frac{7}{2}r\partial_r + \frac{1}{2}r^2\partial_r^2 \quad L_2 = \frac{1}{2}r\partial_r - \frac{1}{2}r^2\partial_r^2 \quad L_3 = -4r\partial_r$$

Запишем это в матричном виде введя столбец  $X = \begin{pmatrix} \Phi \\ G \end{pmatrix}$  и матрицу  $\hat{L} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ L_3 & L_2 \end{pmatrix}$

$$-X(0) + pX = \hat{L}X$$

Будем искать резольвенту этого оператора  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ :

$$(\hat{L} - p)R(r, r') = \delta(r - r')$$

Имеем систему уравнений:

$$(\hat{L}_1 - p)R_{11} = \delta(r - r') \quad (23)$$

$$(\hat{L}_1 - p)R_{12} = 0 \quad (24)$$

$$\hat{L}_3R_{12} + (\hat{L}_2 - p)R_{22} = \delta(r - r') \quad (25)$$

$$\hat{L}_3R_{11} + (\hat{L}_2 - p)R_{21} = 0 \quad (26)$$

Введем для удобства обозначения  $x = \frac{r}{r'}$ ,  $\lambda = \sqrt{2p + 1}$ . Находим элементы резольвенты:

$$R_{11} = \begin{cases} A_1x^{-3+\lambda} + B_1x^{-3-\lambda} & x < 1 \\ (A_1 + \frac{1}{\lambda r'})x^{-3+\lambda} + (B_1 - \frac{1}{\lambda r'})x^{-3-\lambda} & x > 1 \end{cases}$$

$$R_{12} = A_2x^{-3+\lambda} + B_2x^{-3-\lambda}$$

$$R_{21} = \begin{cases} \frac{4(\lambda^2+\lambda-4)}{\lambda r'(\lambda^2-4)}x^{1+\lambda} + B_3x^{1-\lambda} + 4(A_1\frac{\lambda-3}{\lambda-2}x^{-3+\lambda} + B_1\frac{\lambda+3}{\lambda+2}x^{-3-\lambda}) & x < 1 \\ (B_3 + \frac{4(\lambda^2-\lambda-4)}{\lambda r'(\lambda^2-4)})x^{1-\lambda} + 4((A_1 + \frac{1}{\lambda r'})\frac{\lambda-3}{\lambda-2}x^{-3+\lambda} + (B_1 - \frac{1}{\lambda r'})\frac{\lambda+3}{\lambda+2}x^{-3-\lambda}) & x > 1 \end{cases}$$

$$R_{22} = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda r'}x^{1+\lambda} + B_4x^{1-\lambda} + 4(A_2\frac{\lambda-3}{\lambda-2}x^{-3+\lambda} + B_2\frac{\lambda+3}{\lambda+2}x^{-3-\lambda}) & x < 1 \\ (B_4 - \frac{1}{\lambda r'})x^{1-\lambda} + 4(A_2\frac{\lambda-3}{\lambda-2}x^{-3+\lambda} + B_2\frac{\lambda+3}{\lambda+2}x^{-3-\lambda}) & x > 1 \end{cases}$$

Наличие неопределенных констант обусловлено тем, что резольвента ищется в области, где диффузией можно пренебречь. Тем не менее, при любых значениях этих

констант имеется полюс в  $\lambda = 2$ , что соответствует  $p = 3/2$ . Запишем формальное решение системы через резольвенту и обратное преобразование Лапласа:

$$X(t) = - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \hat{R}X(0) dp \quad (27)$$

где  $\sigma$  выбирается так, чтобы путь интегрирования лежал правее всех особенностей подынтегрального выражения. Видно, что интеграл садится на полюс в  $p = 3/2$ . Следовательно у исходной системы есть решения с ляпуновской экспонентой  $\bar{\gamma} = \frac{3}{2}D$  и динамо возможно.

## 5 Динамо на торе

Рассмотрим теперь магнитное поле проводящей жидкости на торе. Интерес к данной модели обусловлен в основном тем, что во многих численных симуляциях трех и двумерных потоков используются периодические граничные условия.

Будем работать в пространстве  $x, y \in [-\pi; \pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Поле скоростей по-прежнему будем считать двумерным  $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0)$ , коротко коррелированным по времени и плавным в пространстве.

Для вычислений необходимо выбрать пространственную часть коррелятора скоростей  $d_{ij}(r) = \langle v_i(r)v_j(0) \rangle$ . Из условия периодичности по  $x$  и  $y$  и условия несжимаемости получаем в общем виде:

$$d_{ij} = \sum_{k_x, k_y \in \mathbb{Z}} e^{i(kr)} f(k) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)$$

В качестве простой модели выберем первые 4 гармоники  $k \in \{(1; 1), (1; -1), (-1; 1), (-1; -1)\}$ , получим коррелятор в виде:

$$d_{ij}(r) = \left( \cos(x+y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \cos(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Т.к. тор обладает трансляционной симметрией все функции по-прежнему зависят только от  $r = r_1 - r_2$ . Действуя так же как и ранее получаем уравнение на одновременной коррелятор магнитного поля  $F_{ij}(t, r) = \langle H_i(t, r)H_j(t, 0) \rangle$ :

$$\partial_t F_{ij} = -F_{pq} \partial_p \partial_q d_{ij} + \partial_p d_{ik} \partial_k F_{pj} + \partial_q d_{kj} \partial_k F_{iq} - (d_{kl}(r) - d_{kl}(0)) \partial_k \partial_l F_{ij} + 2\kappa \Delta F_{ij}$$

Перейдем к координатам  $\xi = x + y$ ,  $\eta = x - y$ . Получаем уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t F_{xx} = \cos \xi (F_{xx} + F_{yy} + 2F_{xy}) - 4 \sin \xi \partial_\eta (F_{xx} + F_{xy}) + 4(1 - \cos \xi) \partial_\eta^2 F_{xx} + \\ \quad + \cos \eta (F_{xx} + F_{yy} - 2F_{xy}) - 4 \sin \eta \partial_\xi (F_{xx} - F_{xy}) + 4(1 - \cos \eta) \partial_\xi^2 F_{xx} + 2\kappa \Delta F_{xx} \\ \partial_t F_{yy} = \cos \xi (F_{xx} + F_{yy} + 2F_{xy}) + 4 \sin \xi \partial_\eta (F_{yy} + F_{xy}) + 4(1 - \cos \xi) \partial_\eta^2 F_{yy} + \\ \quad + \cos \eta (F_{xx} + F_{yy} - 2F_{xy}) + 4 \sin \eta \partial_\xi (F_{yy} - F_{xy}) + 4(1 - \cos \eta) \partial_\xi^2 F_{yy} + 2\kappa \Delta F_{yy} \\ \partial_t F_{xy} = -\cos \xi (F_{xx} + F_{yy} + 2F_{xy}) + 2 \sin \xi \partial_\eta (F_{xx} - F_{yy}) + 4(1 - \cos \xi) \partial_\eta^2 F_{xy} + \\ \quad + \cos \eta (F_{xx} + F_{yy} - 2F_{xy}) + 2 \sin \eta \partial_\xi (F_{xx} - F_{yy}) + 4(1 - \cos \eta) \partial_\xi^2 F_{xy} + 2\kappa \Delta F_{xy} \end{array} \right.$$



Введем новые переменные:

$$\begin{cases} F = F_{xx} - F_{yy} \\ G = F_{xx} + F_{yy} + 2F_{xy} \\ H = F_{xx} + F_{yy} - 2F_{xy} \end{cases}$$

Получим систему:

$$\begin{aligned} \partial_t F &= -4 \sin \xi \partial_\eta G - 4 \sin \eta \partial_\xi H + 4 \left( (1 - \cos \xi) \partial_\eta^2 + (1 - \cos \eta) \partial_\xi^2 \right) F + 2\kappa \Delta F \\ \partial_t G &= +4 \cos(\eta) H + 4 \left( (1 - \cos \xi) \partial_\eta^2 + (1 - \cos \eta) \partial_\xi^2 \right) G + 2\kappa \Delta G \\ \partial_t H &= 4 \cos(\xi) G - 8(\sin \xi \partial_\eta + \sin \eta \partial_\xi) F + 4 \left( (1 - \cos \xi) \partial_\eta^2 + (1 - \cos \eta) \partial_\xi^2 \right) H + 2\kappa \Delta H \end{aligned} \quad (28)$$

Эту систему мы изучали численно используя метод линий с процессом обратного дифференцирования второго порядка. В качестве начальных корреляторов были выбраны матрицы вида:

$$F_{ij}(0, x) = \sum_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q}x)} \begin{pmatrix} a(\mathbf{q}) & c(\mathbf{q}) \\ c^*(\mathbf{q}) & b(\mathbf{q}) \end{pmatrix}$$

Где для удовлетворения спектральности  $F_{ij}$  должно быть

$$a > 0, b > 0, a + b > \sqrt{4c^*c + (a - b)^2}.$$

Также должна быть отлична от нуля дивергенция поля.

$$aq_1 + c^*q_2 \neq 0 \quad cq_1 + bq_2 \neq 0$$

В результате получили зависимость ляпуновской экспоненты от коэффициента диффузии(рис. 1). Что свидетельствует о наличии динамо в такой системе.

В случае  $\kappa = 0$  наблюдался рост с показателем  $\bar{\gamma} = 4$ . Ляпуновскую экспоненту в идеальном проводнике легко получить аналитически, для этого достаточно положить в уравнениях (28)  $\kappa = \eta = \xi$ . Видно, что аналогично режиму Бачелора и трехмерному случаю [9] пределы  $t \rightarrow \infty$  и  $\kappa \rightarrow 0$  не коммутируют.

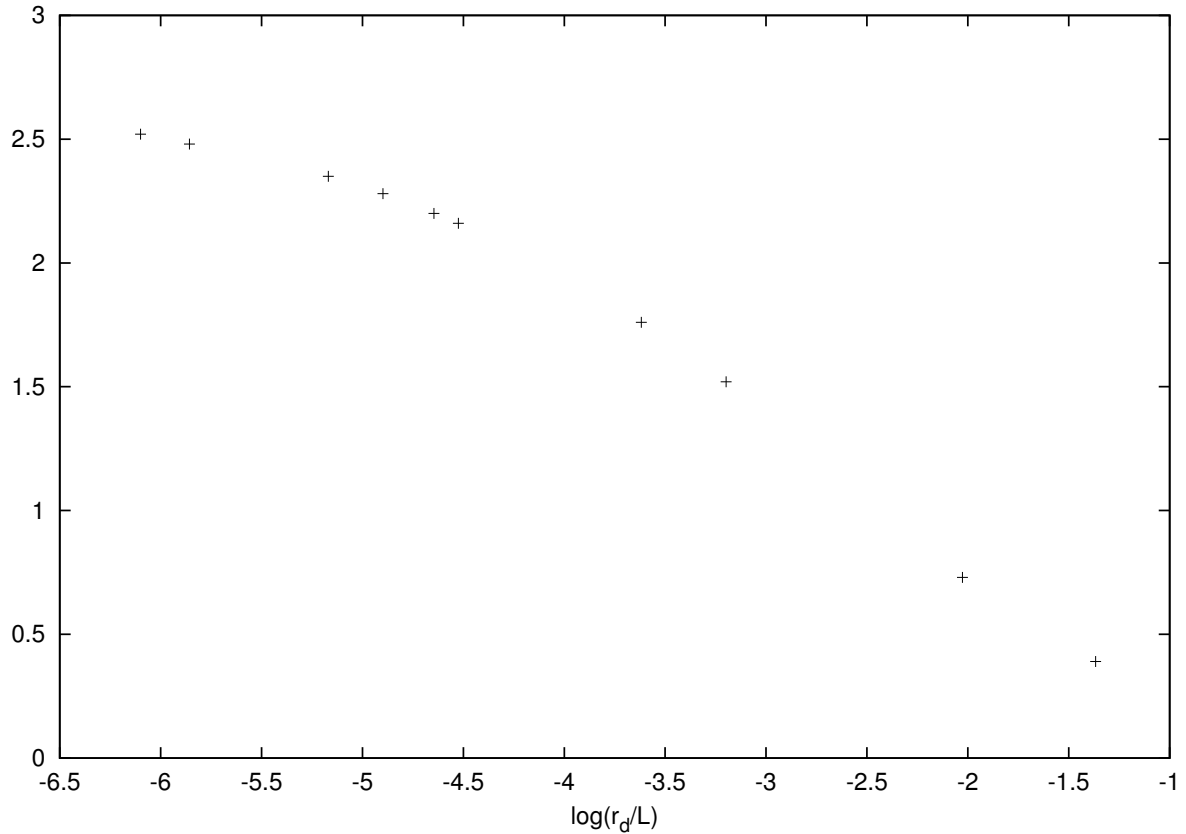


Рис. 1: Зависимость ляпуновской экспоненты  $\bar{\gamma}$  от отношения радиуса диффузии к размеру системы.

## 6 Заключение

Реальные потоки можно описывать как двумерные, если масштаб движений по двум измерениям существенно превышает размер системы вдоль третьего измерения (“толщину”). Задача о динамо в таких течениях, представлявшая 30-40 лет назад, в основном, методический интерес, стала актуально в связи с экспериментами группы В. Штайнберга в Институте Науки им. Х. Вайцманна, в которых возбуждаются хаотические флуктуации в полимерных растворах [10–12].

Такое состояние, называемое также эластической турбулентностью, обеспечивается растяжениями полимеров, которое в свою очередь, может быть описано уравнениями типа (5).

Двумеризация может происходить как сама по себе (например, при наличии среднего вращения), так и искусственно (просто двумерные флуктуации возбуждать существенно проще, чем трехмерные). Данная дипломная работа является естественным этапом в теоретическом описании этого класса явлений.

## А Регуляризация стохастических интегралов

Рассмотрим уравнение на эволюцию расстояния между близкими частицами жидкости:

$$R(t) = R(0) + \int_0^t \sigma(s)R(s)ds \quad (29)$$

Где  $\sigma_{ij} = \partial_j v_i$  - матрица градиентов скоростей. Для  $\delta$ -коррелированного потока данное уравнение становится стохастическим. Правая часть включает стохастический интеграл, чье отличительное качество заключается в том, что  $\sigma(t)dt$  является величиной порядка  $(dt)^{1/2}$ , что следует из соотношения  $\left\langle \left( \int_0^t \sigma(s)ds \right)^2 \right\rangle \propto t$ . В общем случае такие интегралы неоднозначно определены и требуют регуляризации. Наиболее популярны регуляризации Ито, Стратоновича и анти-Ито. Физически различные выборы отражают более тонкие детали распределения корреляций, которые исчезают в пределе белого шума, например наличие или отсутствие симметрии обращения времени. Регуляризованный согласно Ито, Стратоновичу и анти-Ито интеграл из (29) получается взятием непрерывного предела из Римановых сумм, соответственно:

$$\int_0^t \sigma(s)R(s)ds = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma(s)ds R(t_n), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma(s)ds \frac{1}{2}[R(t_n) + R(t_{n+1})], \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma(s)ds R(t_{n+1}), \end{cases}$$

Теперь давайте определим чему равна в регуляризации Стратоновича неопределенность возникающая после временного упорядочения матриц градиентов:

$$\begin{aligned} \left\langle \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \sigma(\tau)\sigma(\tau') \right\rangle &= \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\tau \sigma(\tau) \frac{1}{2} \left[ \int_0^{t_n} d\tau' \sigma(\tau') + \int_0^{t_{n+1}} d\tau' \sigma(\tau') \right] \right\rangle \propto \\ &\propto \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\tau \frac{1}{2} \left[ \int_0^{t_n} d\tau' \delta(\tau - \tau') + \int_0^{t_{n+1}} d\tau' \delta(\tau - \tau') \right] = \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Для регуляризаций Ито и анти-Ито получим 0 и  $t$ , соответственно. Наш выбор регуляризации Стратоновича обусловлен тем, что она соответствует обратимости времени.

## Список литературы

- [1] H.K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1978).
- [2] E.N. Parker, *Cosmic Magnetic Fields, Their Origin and Activity* (Clarendon Press, Oxford, 1979).
- [3] S. Childress and A. Gilbert, *Stretch, Twist, Fold: The Fast Dynamo* (Springer-Verlag, Berlin, 1995).
- [4] Zeldovich Ya.B., *The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent fluid*, Sov. Phys. JETP **4** 460 (1957)
- [5] Zeldovich Ya.B. and Ruzmaikin A.A., *Magnetic field of a conducting fluid in two-dimensional motion*, Sov. Phys JETP **51** 493 (1980)
- [6] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A. and Sokolov D.D. *Kinematic Dynamo Problem in a Linear Velocity Field*, J. Fluid Mech. **144** 1 (1984)
- [7] Kolokolov I.V., Lebedev V.V. and Sizov G.A. *Magnetic field correlations in a random flow with strong steady shear*, JETP **113**, 339-351 (2011)
- [8] Falkovich G. , Gawedzki K. and Vergassola M., *Particles and Fields in Fluid Turbulence* Rev. Mod. Phys. **73** 913 (2001)
- [9] Chertkov M., Falkovich G., Kolokolov I. and Vergassola M., *Small-scale Turbulent Dynamo* Phys. Rev. Lett. **83** 4065 (1999)
- [10] Groisman A. and Steinberg V. *Elastic turbulence in a Polymer Solution Flow* , Nature **405** 53 (2000).
- [11] Groisman A. and Steinberg V., *Stretching of Polymers in a Random Three-dimensional Flow*, Phys. Rev. Lett. **86** 934 (2001).
- [12] Groisman A. and Steinberg V., *Efficient Mixing at Low Reynolds Numbers Using Polymer Additives*, Nature **410** 905 (2001).