

Московский Физико-Технический Институт
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра проблем теоретической физики

На правах рукописи

Дипломная работа
на степень магистра
студента 6-го курса
Гуцалюка А.А.

Осцилляции магнитосопротивления в тонких висмутовых проволоках

Научный руководитель
д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник
Иоселевич Алексей Соломонович

Москва, 2015

Содержание

1	Введение	2
2	Электрон на идеальном цилиндре	3
3	Проводимость. Борновское приближение	4
3.1	Друдевское приближение	5
3.1.1	Монотонный вклад	5
3.2	Осцилляции проводимости	6
3.2.1	Осцилляции в отсутствие спин-орбиты	6
3.2.2	Осцилляции с учётом спин-орбиты	8
4	Неборновское приближение	10
4.1	Расходимость плотности состояний	10
4.2	Перенормировка проводимости	11
4.3	Неборновское приближение. Учёт спин-орбитального взаимодействия	12
4.4	Обрезание расходимостей	12
4.5	Неборновские поправки. Пертурбативное приближение	13
4.6	Неборновские поправки. Резонансный случай	14
5	Куперонный вклад	17
5.1	Осцилляции без учёта спин-орбитального взаимодействия	17
5.2	Осцилляции в присутствии спин-орбитального взаимодействия	19
6	Выводы	21
7	Дополнения	22
7.1	Дополнение 1. Время рассеяния	22
7.2	Дополнение 2. Уравнение Швингера-Дайсона	25
7.3	Дополнение 3. Регуляризация осцилляций	27
7.4	Дополнение 4. Точная амплитуда рассеяния	28

1 Введение

Нашей целью является изучение зависимости сопротивления тонких висмутовых проволок от внешнего магнитного поля. Рассмотрим проволоку круглого сечения. Условие «тонкости» подразумевает толщину порядка длины волны Дебая на энергии E_F . Для электронного газа проволока в поперечном направлении эффективно является бесконечно глубокой потенциальной ямой. Спектр в такой яме квантуется как

$$E_n \sim \frac{n^2}{R^2}, \quad (1.1)$$

где квантовое число n нумерует уровни, R — радиус проволоки. При достаточно малом R расстояние между уровнями становится столь большим, что перекрытие зон исчезает. Следовательно, проводимость в толще проволоки такого малого поперечного размера будет незначительной, количество носителей мало и образец испытывает переход полуметалл-полупроводник [1]. В то же время на поверхности наблюдается сравнительно большое число уровней. Данное предположение подтверждается в таких образцах результатами фотоэмиссионной спектроскопии [2], [3].

Таким образом, проводящей является только поверхность образца, в толще же он диэлектрик и эффективно мы можем рассматривать проволоку, как полую трубку в магнитном поле. Поскольку такой образец не является односвязным, в нём имеют место осцилляции Ааронова-Бома [4], то есть осциллирующая зависимость проводимости (и сопротивления) от внешнего магнитного поля. Этот эффект известен, но эксперимент показал, что возможны ситуации, когда осцилляции происходят не с обычной частотой Φ/Φ_0 (Φ — поток внешнего поля через поперечное сечение проводника, Φ_0 — квант магнитного потока), а с удвоенной [5]. Мы попытаемся объяснить данный эффект.

Последовательно рассмотрим задачу о проводимости проволоки (моделируя её полым цилиндром в соответствии со сказанным выше) и посмотрим, при каких условиях возможен эффект удвоения частоты осцилляций магнитосопротивления. Из эксперимента известно, что опыты проводились с чистым металлом (длина свободного пробега l , $L \gg l \gg R$, R — радиус, L — длина цилиндра), поэтому мы будем работать в приближении малой концентрации примесей. Здесь важно учесть также, что висмут является металлом с сильным спин-орбитальным взаимодействием.

Магнитоосцилляции являются поправками на фоне большой монотонной части. Мы можем ожидать увидеть вклад в осцилляции сопротивления 3-х типов.

1) Поправки, обусловленные осциллирующей зависимостью плотности состояний от магнитного потока. Эти поправки подавлены только большим параметром $Q = \pi p_F R \gg 1$ (квазиклассическое приближение).

2) Поправки, обусловленные перенормировкой амплитуды рассеяния на примеси. Эти поправки также имеют осциллирующую зависимость от магнитного потока. Они проявляются только в неборновском приближении. Они подавлены по параметру Q и пропорциональны амплитуде рассеяния $\lambda = \pi \nu_F^{(0)} V_0$, здесь $\nu_F^{(0)}$ — плотность состояний на уровне ферми, V_0 — интенсивность взаимодействия с примесями.

3) Локализационные поправки Аронова-Альтшулера-Спивака [6], [7]. Такие поправки также наблюдались в эксперименте [8]. Они малы по $(p_F l)^{-1} \ll (p_F R)^{-1}$ и таким образом зависят от малой концентрации примесей n^{2D} . ААС осцилляции имеют удвоенную частоту, но проявляются при $l \ll 2\pi R$ (грязный металл), в нашем случае $l \gg 2\pi R$ и, вероятно, должен присутствовать другой механизм удвоения частоты.

Также мы предполагаем неравенство $L_{loc} = (p_F R)l \gg L$ — условие малости эффектов одномерной локализации.

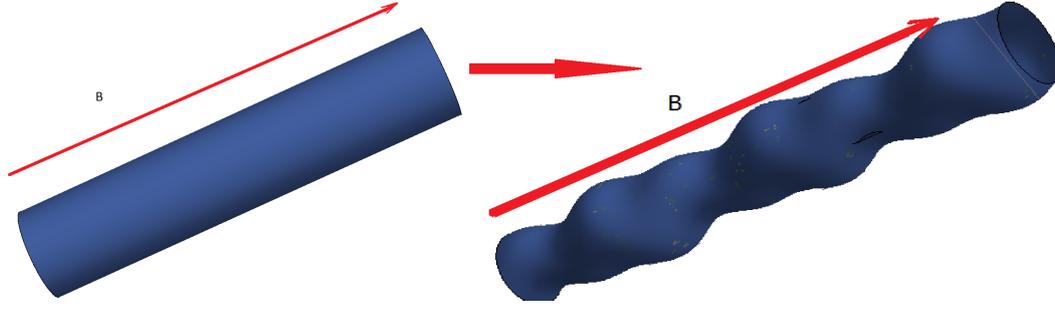


Рис. 1: Геометрия задачи: поток через цилиндр с постоянным и флуктуирующим радиусом

2 Электрон на идеальном цилиндре

Рассмотрим задачу движения невзаимодействующих электронов в магнитном поле по поверхности цилиндра длиной L и радиуса R ($L \gg 2\pi R \gg p_F^{-1}$). Одночастичный гамильтониан электронов во внешнем поле на поверхности трубки имеет вид

$$H = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \alpha \vec{\sigma} [\vec{n} \times \vec{p}]; \quad (2.1)$$

здесь α — константа спин-орбитального взаимодействия, M — эффективная масса носителей, σ_i — матрицы Паули, единичный вектор \vec{n} направлен вдоль радиуса. Зеемановским членом мы пренебрегаем.

$$H = -\frac{1}{2M} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i\alpha \left[\sigma_\varphi \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_z \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right], \quad (2.2)$$

$$\sigma_\varphi = \cos(\varphi)\sigma_y - \sin(\varphi)\sigma_x,$$

$$\sigma_r = \cos(\varphi)\sigma_x + \sin(\varphi)\sigma_y.$$

Магнитное поле направлено вдоль оси цилиндра (ось z), выберем калибровку \vec{A} в виде $A = \{0, \frac{1}{2}HR, 0\}$, тогда :

$$p_\varphi \rightarrow P_\varphi = p_\varphi - \frac{e}{c} A. \quad (2.3)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \frac{(-i\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e}{c}AR)^2}{2M} + \alpha \left(-i\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e}{c}AR \right) & e^{-i\varphi} \alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{i\varphi} \alpha \frac{\partial}{\partial z} & \frac{(i\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e}{c}AR)^2}{2M} - \alpha \left(-i\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e}{c}AR \right) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Делая подстановку для волновых функций $\Psi_{m,k}(\varphi, z) = C_{m,k} \{ e^{i(m-1)\varphi}, e^{im\varphi} \} \exp(ikz)$, получим уравнение на собственные значения энергии : $\det(\hat{H} - \hat{1}E) = 0$, где

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \frac{(1+m)^2 - 2\frac{e}{c}AR(m+1) + \frac{e^2}{c^2}A^2R^2}{2M} - \alpha \left(m + 1 + \frac{e}{c}AR \right) & -i\alpha k \\ i\alpha k & \frac{m^2 - 2\frac{e}{c}AR + \frac{e^2}{c^2}A^2R^2}{2M} + \alpha \left(m + \frac{e}{c}AR \right) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

$\hat{1}$ — единичная матрица, E — энергия. Решение спектрального уравнения:

$$E_\pm(k, m) = \frac{k^2}{2M} + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[\mu^2 + \frac{1}{4}(1 - 4\alpha MR) \right] \pm \frac{\hbar^2}{2MR^2} \sqrt{[(1 - 2MR\alpha)^2 \mu^2 + 4\alpha^2 k^2 M^2 R^4]}. \quad (2.6)$$

Здесь $\mu = (m - \Phi/\Phi_0 + 1/2)$ — поперечный, а k — продольный (ось z) импульс. Собственные состояния

$$\Psi_+(m, k) = (2\pi)^{-1/2} \{ \cos(\theta/2)e^{i(m-1)\varphi}, \sin(\theta/2)e^{im\varphi} \} e^{ikz}, \quad (2.7)$$

$$\Psi_-(m, k) = (2\pi)^{-1/2} \{ -\sin(\theta/2)e^{im\varphi}, \cos(\theta/2)e^{i(m+1)\varphi} \} e^{ikz}. \quad (2.8)$$

где

$$\tan(\theta/2) = \frac{2\alpha kMR^2}{X \pm \sqrt{X^2 + 4\alpha^2 k^2 M^2 R^4}}, \quad (2.9)$$

$$X = 2\mu(1 - 2MR\alpha).$$

3 Проводимость. Борновское приближение

Конечная проводимость в металлах обусловлена наличием рассеяния на примесях. Гамильтониан взаимодействия электронов с примесями:

$$H_{imp}(\vec{r}) = V_0 \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3.1)$$

(рассматриваем рассеяние на точечных примесях). $n^{2D} = N/(2\pi RL)$ — двумерная концентрация примесей. Перейдём, для удобства, к новому базису, повернутому оператором $\hat{U} = \exp(i\varphi\hat{\sigma}_z/2)$:

$$\Psi_{\gamma=+1} \longrightarrow \Psi'_{\gamma=+1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix} e^{i(m+1/2)\varphi+ikz}, \quad \Psi_{\gamma=-1} \longrightarrow \Psi'_{\gamma=-1} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} e^{i(m+1/2)\varphi+ikz}, \quad (3.2)$$

γ — индекс киральности. Собственные значения энергии при замене базиса не изменятся. Матричные элементы потенциала в новом базисе

$$V_{m_1-m_2; k_1-k_2}^{\gamma, -\gamma} = \gamma \frac{V_0}{2\pi} \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i(m_1-m_2)\varphi_0} e^{i(k_1-k_2)z_0} \quad (3.3)$$

$$V_{m_1-m_2; k_1-k_2}^{\gamma, \gamma} = \frac{V_0}{2\pi} \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i(m_1-m_2)\varphi_0} e^{i(k_1-k_2)z_0}$$

отвечают рассеянию с нарушением и сохранением киральности соответственно.

Рассчитаем проводимость в приближении малой концентрации примесей. Используем для этого диаграммную технику, описанную в [9, § 39]. Определим время упругого рассеяния во втором борновском приближении как

$$\frac{1}{2\tau'_\gamma(k, m)} = \text{Im} [VGV]. \quad (3.4)$$

Вычисления τ_γ^{-1} см. Дополнение 1. При наличии примесей собственная энергия, входящая в функцию Грина, имеет мнимую часть [9]:

$$G_{\gamma, m}(k) = \frac{1}{\varepsilon - \xi_{m, \gamma}(k) - \frac{i}{2\tau_\gamma}}. \quad (3.5)$$

3.1 Друдевское приближение

Проводимость вдоль оси z даётся выражением [9]

$$\sigma_{zz}(\omega) = \frac{e^2}{\omega} \sum_{\gamma; \vec{p}, \omega'} v_{\gamma}^z(\vec{p}) \Pi_{\gamma} \left(\vec{p}, \omega' + \frac{\omega}{2} \middle| \vec{p}, \omega' - \frac{\omega}{2} \right). \quad (3.6)$$

Здесь $\Pi(\vec{p}, \omega, \omega')$ — поляризационный оператор, сумма берётся по всем значениям импульсов и по киральностям. v_{γ}^z — скорость носителей заряда вдоль оси z . Усреднённый по положению примесей поляризационный оператор удовлетворяет интегральному уравнению Швингера-Дайсона [9]:

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma}(p_+, p_-) &= G_{\gamma}(p_+) G_{\gamma}(p_-) \times \\ &\times \left[v_z(\vec{p}) + \frac{n^{2D}}{(2\pi)} \sum_{\gamma'=\pm 1} \int d\vec{p}' |V_{\gamma\gamma'}(\vec{p} - \vec{p}')|^2 \Pi_{\gamma'}(p'_+, p'_-) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$\vec{p}_{\pm} = \vec{p} \pm \vec{q}$, где \vec{q} — внешний импульс, $|\vec{q}| \ll p_F$, зависимость от внешней частоты ω , которую считаем малой ($\omega\tau \ll 1$), не выписываем. Под интегрированием по $d\vec{p}$ подразумевается интегрирование по k и суммирование по m . В таком приближении мы пренебрегаем пересекающимися примесными линиями (куперонным вкладом), имеющим высший порядок по большому параметру $1/(pFl)$ [9], то есть не рассматриваем слаболокализационную поправку.

3.1.1 Монотонный вклад

Решение уравнения Швингера-Дайсона в пренебрежении малыми осциллирующими поправками даёт (см. Дополнение 2)

$$v_F(\Lambda_{\gamma} + \Lambda_{-\gamma}) \equiv \int pdp (\Pi_{\gamma}(\vec{p}) + \Pi_{-\gamma}(\vec{p})) = 4\pi\tau_0 \left(v_F M + \frac{p_{so}^2}{v_F M} \right), \quad (3.8)$$

τ_0 — монотонная часть времени рассеяния, не зависит от магнитного потока. Скорость ферми

$$v_F = \left. \frac{\partial H}{\partial p_{\gamma}} \right|_{p_{\gamma}=p_F} \quad (3.9)$$

не зависит от киральности. Монотонная часть проводимости:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\omega) &= \frac{e^2}{\omega} \int \frac{d\omega'}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \sum_{\gamma=\pm 1} v_F \Pi_{\gamma}(\vec{p}) \theta(\omega/2 - |\omega'|) = \frac{e^2 v_F}{(2\pi)^3} v_F(\Lambda_{\gamma} + \Lambda_{-\gamma}) \int d\theta \sin^2(\theta) = \\ &= \frac{e^2 v_F \pi}{2 \times 4\pi^2} 4\pi\tau_0 \left(v_F M + \frac{p_{so}^2}{M v_F} \right) = \frac{e^2 \tau_0}{2\pi} \left(M v_F^2 + \frac{p_{so}^2}{M} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В отсутствие спин-орбитального взаимодействия мы получаем обычную формулу диффузии

$$\sigma_{zz} = 2e^2 \nu_F^{(0)} D_0, \quad D_0 = \frac{\tau_0 v_F^2}{2},$$

как и должно быть в квазиклассическом приближении (D_0 — коэффициент диффузии, $\nu_F^{(0)} = M/(2\pi)$ — плотность состояний для одной проекции спина на уровне ферми).

3.2 Осцилляции проводимости

Учтём теперь наличие осциллирующей части в τ и воспользуемся формулой Пуассона для перехода от суммирования к интегрированию по аксиальной координате, учитывая все гармоники в ней. Тогда формула для продольной проводимости имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\omega) &= \frac{e^2}{\omega} \sum_{\gamma; \vec{p}, \omega'} v_{\gamma}^z(\vec{p}) \Pi_{\gamma}(\vec{p}, \omega') = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=\pm 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(2\pi)^2} \sin \theta \exp [2\pi i n (p_F^{\gamma} R \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)] \Pi_{\gamma}(\vec{p}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.1 Осцилляции в отсутствие спин-орбиты

Рассмотрим сначала случай отсутствия спин-орбитального взаимодействия. (См. также [10]) В этом случае вершина в поляризационном операторе не перенормируется, и мы заменяем поляризационный оператор на произведение функций Грина; индекс γ исчезает, и сумма по киральностям даст просто общий множитель 2. Формула для проводимости при $\omega\tau \ll 1$ сводится к

$$\sigma_{zz}(\omega) = \frac{e^2}{\omega} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} d\omega' \int \frac{\sin^2 \theta}{(2\pi)^2} G(\vec{p}_+) G(\vec{p}_-) p dp = \frac{e^2}{(2\pi)} v_F^2 \tau (1 + \tilde{\Delta}) = \frac{e^2 \tau_0 v_F^2}{2\pi} \frac{1 + \tilde{\Delta}}{1 + \Delta}. \quad (3.12)$$

Здесь Δ — осциллирующая поправка к времени рассеяния, а $\tilde{\Delta}$ — поправка, возникающая при усреднении $[v^z]^2$ по углу θ .

$$\tilde{\Delta} \equiv \int d\theta [v^z(\vec{p})]^2 \exp (2\pi i n (Q/\pi \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)). \quad (3.13)$$

Обе поправки малы по Q^{-1} . Тогда

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1 + \Delta}{1 + \tilde{\Delta}} - 1 = \frac{\Delta - \tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}} \approx \Delta - \tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}(\Delta - \tilde{\Delta}) + \dots \approx \Delta_1 + \Delta_2. \quad (3.14)$$

$$\Delta_1 = \Delta - \tilde{\Delta}, \quad \Delta_2 = -\tilde{\Delta}(\Delta - \tilde{\Delta}).$$

Мы получили осцилляции 2-х принципиально разных типов: Δ_1 отвечает осцилляциям Ааронова-Бома (АВ), а Δ_2 — осцилляциям с удвоенной частотой (мы будем обозначать их как АВ2).

$$\Delta_1 = \frac{2}{Q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(2\pi n \Phi/\Phi_0) Q \left[C(2Qn) \cos\left(2nQ - \frac{\pi}{4}\right) + D(2Qn) \sin\left(2nQ - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (3.15)$$

здесь $A_i(x)$ и $B_i(x)$ отвечают коэффициентам в асимптотике функций Бесселя $J_i(x) \approx A_i(x) \cos(x - \pi/4) + B_i(x) \sin(x - \pi/4)$, а

$$\begin{aligned} C(x) &= A_0 - (A_0(x) + A_2(x)) = -A_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{105}{128x^2}\right), \\ D(x) &= B_0 - (B_0(x) + B_2(x)) = -\frac{15}{8x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в лидирующем порядке

$$\frac{\delta\rho_{AB}}{\rho_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi Q}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2\pi n\Phi/\Phi_0)}{\sqrt{n}} \cos\left(2nQ - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.16)$$

Второй член в (3.14) имеет низший порядок по $1/Q$, при перемножении рядов Δ , $\tilde{\Delta}$ мы учтём только диагональные члены, которые приведут к появлению удвоенного периода колебаний магнитосопротивления (ниже показано, что отбрасывание остальных членов законно в данном случае)

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{2}{Q} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q \cos(2\pi n\Phi/\Phi_0) \times \\ &\times \left(\left[C(2Qn) \cos\left(2Qn - \frac{\pi}{4}\right) + D(2Qn) \sin\left(2Qn - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right) \times \\ &\times \frac{2}{Q} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m Q \left[(A_0(2Qm) + A_2(2Qm)) \cos\left(2Qm - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &+ (B_0(2Qm) + B_2(2Qm)) \sin\left(2Qm - \frac{\pi}{4}\right) \left. \right] \cos(2\pi m\Phi/\Phi_0) = \\ &= \frac{1}{Q^2} \sum_{n=1}^{\infty} Q^2 \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0) [C(A_0 + A_2) - D(B_0 + B_2)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя значения A_i, B_i получим

$$\Delta_2 \equiv \frac{\delta\rho_{AB2}}{\rho_0} = \frac{2}{\pi Q^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(2n)^3} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0). \quad (3.18)$$

В данном случае присутствуют АВ2 осцилляции, малые по параметру $1/Q$. Возникшая здесь не зависящая от потока поправка к сопротивлению порядка $1/Q^3$ опущена.

Рассмотрим эти осцилляции в предположении, что радиус проволоки не постоянен, а плавно меняется: характерная длина изменения радиуса ξ , $l \ll \xi \ll L$. Тогда проволоку можно считать состоящей из участков с сопротивлением ρ_i и длиной $L_i < \xi$ каждый. Суммарное сопротивление, соответственно, $\rho = \sum_i \rho_i$. Фазы АВ-осцилляций зависят от радиуса, в то время как АВ2 осцилляций — нет. Это обстоятельство важно. Проведём усреднение по флуктуациям радиуса, считая распределение флуктуаций гауссовым:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\delta\rho_{AB}}{\rho_0}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi Q_0 n}} \int \frac{dR}{\sqrt{\pi} \Delta R} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{\Delta R^2}} \cos\left(2\pi p_F R n - \frac{\pi}{4}\right) \cos(2\pi n\Phi/\Phi_0) = \\ &= \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\pi/4} (-1)^n}{\sqrt{\pi Q_0 n}} \int \frac{dR}{\sqrt{\pi} \Delta R} \exp\left(-\frac{(R-R_0)^2}{\Delta R^2} + 2\pi i p_F R n\right) \right] \cos(2\pi n\Phi/\Phi_0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi Q_0}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left(2Q_0 n - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{n}} e^{-n^2 \pi^2 p_F^2 \Delta R^2} \cos(2\pi n\Phi/\Phi_0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Параметр $Q_0 = \pi p_F R_0 \gg 1$. Таким образом при $\pi p_F \Delta R \gg 1$ выражение для АВ осцилляций экспоненциально подавлено. В то же время при усреднении АВ2 осцилляций, слабо зависящих от радиуса, такого подавления не возникает. Все отброшенные при получении Δ_2 недиагональные слагаемые зависят от R и также будут подавлены, поэтому мы смогли ими пренебречь.

АВ2 осцилляции происходят из высших порядков квазиклассического разложения. В отличие от ААS (также имеющих двойную частоту) осцилляций их возникновение не требует интерференции между рассеяниями на различных примесях и поэтому, будучи независимым от концентрации примесей, они малы только по параметру $Q = \pi p_F R \ll p_F l$.

3.2.2 Осцилляции с учётом спин-орбиты

В этом случае следует учесть перенормировку вершины. Для этого нам нужно решить интегральное уравнение Швингера-Дайсона, учитывая осциллирующие поправки. Решение

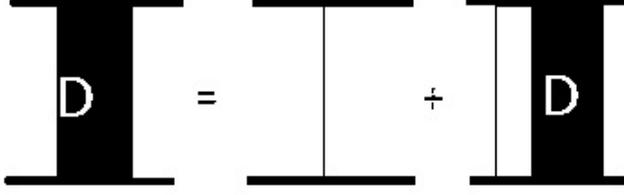


Рис. 2: Диффузная лестница

приведено в Дополнении 2. Подставляем известные Π_γ (см. 7.31) в

$$\sigma = \frac{e^2 v_F}{2\pi} \sum_{\gamma=\pm 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(2\pi)} \sin \theta \exp [2\pi i n (Q_\gamma/\pi \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)] \Lambda_\gamma(\theta), \quad (3.20)$$

где

$$\Lambda_\gamma = \Lambda_{2,\gamma} \sin \theta + \Lambda_{12,\gamma} \sin 2\theta, \quad (3.21)$$

$$v_F \Lambda_\gamma = \int \Pi_\gamma p dp. \quad (3.22)$$

В первом приближении по $1/Q$ при интегрировании в (3.20) в ответ войдёт только нулевая гармоника. Так как в интеграле при $\Lambda_{12,\gamma}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\theta \sin(2\theta) \sin \theta \exp (2\pi i n (Q_\gamma/\pi \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)) \quad (3.23)$$

нулевая гармоника отсутствует, то в лидирующий член формулы для проводимости (и для поправок к осцилляциям магнитосопротивления) войдёт только $\Lambda_{2,\gamma}$. Находим проводимость из (3.20), и далее переходим к сопротивлению, выделяя только осциллирующую часть. Как и раньше, имеем АВ и АВ2 осцилляции. В лидирующем порядке $1/Q$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_{AB2}}{\rho_0} &= \frac{(Mv_F)^2 p_{so}^2 [(Mv_F)^2 - p_{so}^2]}{2Q^2 [(Mv_F)^2 + p_{so}^2]^3} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma=\pm 1} \sqrt{\frac{Q_\gamma}{n\pi}} \cos \left(2nQ_\gamma - \frac{\pi}{4} \right) \cos(2\pi n\Phi/\Phi_0) \right\}^2 = \\ &= \frac{(Mv_F)^2 p_{so}^2 [(Mv_F)^2 - p_{so}^2]}{4\pi Q [(Mv_F)^2 + p_{so}^2]^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0) + C, \end{aligned} \quad (3.24)$$

здесь, как и ранее, отброшены недиагональные члены, возникающие при перемножении рядов Δ , и учтено тождество $Q_\gamma + Q_{-\gamma} = 2Q$. Константа

$$C = \frac{1}{\pi Q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_{AB}}{\rho_0} &= \frac{(Mv_F)^2}{2Q} \frac{(Mv_F)^2 + 3p_{so}^2}{[(Mv_F)^2 + p_{so}^2]^2} \times \\ &\times \sum_{\gamma=\pm 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{Q_\gamma}{n\pi}} \cos \left(2nQ_\gamma - \frac{\pi}{4} \right) \cos(2\pi n\Phi/\Phi_0). \end{aligned} \quad (3.25)$$

В (3.25) наличие спин-орбиты изменяет в основном префактор. Поправка (3.24) имеет структуру $\sim \text{const.} \times \Delta^2$, а слагаемые вида $\Delta\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}^2$ пропорциональны более высоким степеням разложения по $1/(p_F R)$, и в ответ не вошли (из $\tilde{\Delta}$, таким образом, мы здесь учли только нулевую гармонику). Отметим, что в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием такой вклад отсутствовал. Поэтому (3.24) имеет порядок $1/(Mv_F R)$, то есть гораздо более высокий, чем в отсутствии спин-орбиты. Как и ранее, АВ осцилляции загибаются при усреднении по флуктуациям радиуса, в то время как АВ2 выживают. Константа C , не зависящая от магнитного поля, возникающая при возведении Δ в квадрат, логарифмически расходится, осцилляции также становятся сингулярными при $\Phi = Z\Phi_0$, Z — целое. Причина этих расходимостей — расходимость плотности состояний на краю зоны (см. Дополнение 3), эта расходимость обрывается при учёте неборновских поправок.

Мы видим, что АВ2 осцилляции в присутствии спин-орбитального взаимодействия могут быть гораздо сильнее, чем без него: они пропорциональны $1/Q$ вместо $1/Q^3$. Соответствующий член стремится к нулю как при $p_{so} \ll Mv_F$ (т.е., при очень слабом спин-орбитальном взаимодействии), так и при $p_{so} \gg Mv_F$ — при очень сильном. Наибольший вклад такие поправки вносят при $p_{so} \sim Mv_F$. Заметим также, что они меняют знак при $p_{so} = Mv_F$.

Структура АВ осцилляций ясна. Увеличение плотности состояний Δ ведёт к увеличению сопротивления: электроны, при рассеянии попавшие в состояние с большими аксиальными импульсами («круговые траектории») и, соответственно, малыми продольными, будут в нём находиться, пока не рассеются. Очевидно, они не будут давать вклад в ток, измеряемый в эксперименте, до тех пор, пока в результате очередного рассеяния не выйдут с круговых траекторий. Поэтому такие поправки и входят со знаком $+$ в сопротивление.

Поправка к транспортной плотности состояний $\tilde{\Delta}$, наоборот, увеличивает проводимость: электроны, движущиеся вперёд, могут рассеяться в тем большее количество каналов, имеющих проекцию скорости на ось z , чем больше их в наличии.

Интерпретация осцилляций в присутствии спин-орбитального взаимодействия

Решение для поляризационного оператора

$$\Lambda_{2,\gamma} + \Lambda_{2,-\gamma} = 4\pi M\tau' + \frac{2\pi p_{so}^2 \tau'^2}{Mv_F^2 \tau_0 \left(1 - \frac{\tau'}{2\tau_0}\right)}, \quad (3.26)$$

τ' — симметричная часть времени рассеяния. Первое слагаемое очевидно: это просто сумма неперенормированных вершин. Чтобы понять второе слагаемое рассмотрим сначала монотонный вклад

$$(\Lambda_\gamma + \Lambda_{-\gamma})v_F = 4\pi\tau_0 \left(v_F M + \frac{p_{so}^2}{v_F M} \right). \quad (3.27)$$

Второе слагаемое содержит p_{so}^2 , где $p_{so} \equiv p_F^\gamma - p_F^{-\gamma}$, то есть разность между неперенормированными вершинами. То есть, второе слагаемое описывает переходы электроны с одного канала $\gamma = 1$ в другой $\gamma = -1$. В отсутствие спин-орбиты плотность потока в обоих каналах равна и переходы между ними отсутствуют. В сумме $\Lambda_\gamma + \Lambda_{-\gamma}$ присутствует только квадрат p_{so} , так как линейные вклады в результате сократились. Эти сохранившиеся вклады соответствуют тому, что частица дважды сменила канал, вернувшись к исходному. (Переходы между каналами, выше чем двукратные, имеют больший порядок малости по $1/(p_F R)$, и в данном приближении в ответ не вошли).

Множитель, появляющийся в знаменателе при учёте осцилляций

$$\frac{1}{1 - \frac{\tau}{2\tau_0}} = \frac{1}{1 - n^{2D} V_0^2 \sum_{\gamma=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{2(2\pi)^2} G_\gamma(\vec{p}) G_\gamma(\vec{p})}. \quad (3.28)$$

Его происхождение легко понять, разложив этот знаменатель в ряд

$$1 + n^{2D} V_0^2 G(\vec{p}) G(\vec{p}) + \{n^{2D} V_0^2 G(\vec{p}) G(\vec{p})\}^2 + \dots \quad (3.29)$$

то есть просто ряд уравнения Швингера-Дайсона (перенормировка вершины). Мы видим, что вероятность перехода между каналами пропорциональна τ (то есть сопротивление будет пропорционально плотности состояний), именно из этой части и возникает вторая степень Δ^2 , которая и приводит к усилению АВ2 осцилляций.

АВ2 осцилляции оказываются подавленными и при очень сильной спин-орбите: при $p_{so} \gg Mv_F$. Это также ожидаемый результат: изменение импульса Δp при переходах с изменением киральности $\sim p_{so}$. Вероятность рассеяния с таким сильным изменением импульса мала, поэтому соответствующие переходы редки и поправка к сопротивлению также подавляется.

4 Неборновское приближение

Очевидно, что выражение (3.25) расходится при значениях потока $\Phi/\Phi_0 = N$, где N — целое число. Кроме того, в формуле для проводимости всегда есть расходящаяся монотонная поправка. Для устранения этих расходимостей следует выйти за рамки борновского приближения при описании рассеянии на примесях.

4.1 Расходимость плотности состояний

Введём в рассмотрение функцию $S(x)$

$$S(x) = e^{-i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}. \quad (4.1)$$

Плотность состояний выразится как

$$\Delta_\gamma = \text{Re} \{S(2Q_\gamma + 2\pi\Phi/\Phi_0) + S(2Q_\gamma - 2\pi\Phi/\Phi_0)\}. \quad (4.2)$$

Ясно, что при $x = 2\pi N$ функция $S(x)$ сингулярна. Оценим (4.2) вблизи края зоны, когда

$$2\pi(Q_\gamma/\pi \pm \Phi/\Phi_0) \approx 2\pi N, \quad (4.3)$$

N — целое. Пусть δz — расстояние от края зоны:

$$S = e^{-i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n \delta z}}{\sqrt{n}} \approx \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{-2\pi i \delta z}} \int \frac{dt e^{-t}}{\sqrt{t}} \approx i \sqrt{\frac{1}{-2\delta z}}. \quad (4.4)$$

Или $S = \delta z^{-1/2}$ при $\delta z > 0$, и $S = i|\delta z|^{-1/2}$ при $\delta z < 0$. Мы видим, что вблизи края зоны плотность состояний (а вместе с ней и осцилляции проводимости) расходится корневым образом. В отсутствие спин-орбиты в неборновском приближении эти расходимости проявляются только в расходимости АВ осцилляций (которые исчезают при учёте флуктуаций радиуса), но в присутствии спин-орбитального взаимодействия эти расходимости также проявляются и в АВ2 осцилляциях.

Точно на краю зоны мы можем обрезать сумму ряда для $S(x)$ на некотором n_{max} , тогда она может быть оценена в первом приближении как

$$\sum_{n=1}^{n_{max}} \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \sqrt{n_{max}}. \quad (4.5)$$

Оценка для n_{max} будет получена ниже.

4.2 Перенормировка проводимости

Рассмотрим перенормировку функции Грина, потенциала и наблюдаемых за счёт неборновских поправок. Рассматриваем пока ситуацию в отсутствии спин-орбитального взаимодействия. Исходим из уравнения Дайсона

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + G_0(\vec{r}_1, \vec{r}_0) V_0 G(\vec{r}_0, \vec{r}_2). \quad (4.6)$$

Здесь V_0 – исходный потенциал, G_0 – функция Грина в отсутствии примесей. При $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_0$ обозначим $g_0 \equiv G_0(\vec{r}_0, \vec{r}_0) = G_0(0, 0)$. Перенормировка потенциала имеет вид

$$V = \frac{V_0}{1 - g_0 V_0}. \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} g_0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} p dp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta \exp(2\pi i n p R \cos \theta)}{E_F - \frac{p^2}{2M} + i\delta} \exp(2\pi i n \Phi / \Phi_0) = \\ &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n \Phi / \Phi_0} H_0^{(1)}(2nQ) = i\pi \nu_F^{(0)} U + C. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{Im } g_0(E_F) = \pi \nu_F, \quad \text{Re } U = \Delta. \quad (4.9)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{Q}} \{S(2Q + 2\pi\Phi/\Phi_0) + S(2Q - 2\pi\Phi/\Phi_0)\}.$$

$H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода. Константа C – вклад нулевой гармоники, она, как очевидно из асимптотики $H_0^{(1)}(z)$ при $z \rightarrow 0$, бесконечна, причина этой расходимости известна – теория возмущений для точечных примесей плохо работает в размерностях $d \geq 2$. Такая расходимость возникла бы уже в случае плоской геометрии задачи. Для устранения расходимости заменим λ точной амплитудой рассеяния для бесконечной плоскости Λ (см. Дополнение 4). Точная амплитуда рассеяния должна удовлетворять оптической теореме, для изотропного рассеяния она имеет вид

$$\text{Im } \Lambda = |\Lambda|^2.$$

В таком случае мы можем параметризовать Λ как

$$\Lambda = \lambda e^{i \arcsin \lambda} = \lambda \left(\sqrt{1 - \lambda^2} + i\lambda \right), \quad (4.10)$$

$|\lambda| < 1$. При $|\lambda| \ll 1$ приближённо $\lambda = \pi \nu_F^{(0)} V_0$. Тогда $\pi \nu_F^{(0)} V_0 U \rightarrow \Lambda U$. Поправка в Друдевскую формулу проводимости возникнет за счёт перенормировки потенциала примеси V и, соответственно, времени рассеяния

$$\frac{1}{\tau^{(ren)}} = \frac{1 + \Delta}{\tau_0^{(ren)} |1 - i\Lambda U|^2}, \quad \frac{1}{\tau_0^{(ren)}} = \frac{2|\Lambda|^2 M R^2 n^{2D}}{2\pi (\pi \nu_F^{(0)})^2} = \frac{2|\Lambda|^2 n^{2D}}{\nu_F^{(0)} \pi}. \quad (4.11)$$

$$\sigma^{(ren)} = e^2 D_0^{(ren)} (2\pi R) \nu_F^{(0)} \frac{(1 + \tilde{\Delta}) |1 - i\Lambda U|^2}{1 + \Delta}, \quad \text{где } D_0^{(ren)} = \frac{\tau_0^{(ren)} v_F^2}{2}. \quad (4.12)$$

Соответственно

$$\frac{\rho^{(ren)}}{\rho_0} = \frac{(1 + \Delta)}{(1 + \tilde{\Delta}) |1 - i\Lambda U|^2}. \quad (4.13)$$

4.3 Неборновское приближение. Учёт спин-орбитального взаимодействия

Рассмотрим теперь неборновское приближение с учётом спин-орбиты. Запишем перенормированный потенциал

$$V_{\gamma\gamma'}(\vec{r}) = V_{0,\gamma\gamma'}(\vec{r}) + \sum_{\gamma_1, \gamma_2} V_{0,\gamma,\gamma_1}(\vec{r}) G_{0,\gamma_1\gamma_2}(\vec{r}, \vec{r}) V_{\gamma_2\gamma'}^{ren}(\vec{r}), \quad (4.14)$$

здесь $V_{0,\gamma\gamma'}$ перенормированные матричные элементы. Таким образом получим перенормированный потенциал $V_{\gamma\gamma'}$ как функцию от θ, θ' (и, очевидно, τ^{ren} также будет зависимо от θ, θ'), следовательно, учитывать перенормировку нужно уже на этапе построения интегральных уравнений на Π_i .

Решение (4.14) имеет вид

$$\begin{aligned} V_{\gamma\gamma} &= V_0 \frac{\cos((\theta - \theta')/2) - V_0 G_\gamma \cos(\theta - \theta')}{1 - V_0(G_\gamma + G_{-\gamma}) \cos((\theta - \theta')/2) + V_0^2 \cos(\theta - \theta') G_\gamma G_{-\gamma}}, \\ V_{\gamma-\gamma} &= -V_0 \frac{\sin((\theta - \theta')/2)}{1 - V_0(G_\gamma + G_{-\gamma}) \cos((\theta - \theta')/2) + V_0^2 \cos(\theta - \theta') G_\gamma G_{-\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из-за сложного вида матричных элементов точные выражения для проводимости со спин-орбитальным получить затруднительно, но видно, что перенормировка времени рассеяния произойдёт похожим образом. В частности, мы ожидаем похожий механизм обрезания расходимости осцилляций вблизи края зоны.

4.4 Обрезание расходимостей

Так как предполагаемая причина расходимости в нашем ответе — расходимость плотности состояний, она должна обрезаться за счёт перенормировки амплитуды рассеяния (неборновское приближение). Рассмотрим формулу (4.13) (и аналогично (4.15)): как только Δ начинает расходиться, стоящее в знаменателе U также становится большим, компенсируя расходимость плотности состояний. В результате такой перенормировки проводимость (4.12) не только не уменьшается при приближении к рехонансу, а, наоборот расходится. Для того, чтобы получить корректное конечное выражение для $\sigma^{(ren)}$ в точке резонанса, нужно было бы учесть также когерентное рассеяния электронов на 2-х или более примесях, то есть, поправки, малые по параметру $1/p_F l$.

При наличии спин-орбиты мы ожидаем такой же механизма подавления расходимости. Хотя мы не можем получить точного выражения, можно оценить значение n_{\max} , на котором нужно эффективно оборвать сумму по гармоникам в поправках к осцилляциям. Фактически, здесь мы оцениваем условие при которых перенормировка потенциала становится значительной (знаменатели в (4.13), (4.15) начинают заметно отличаться от 1, то есть когда $i\Lambda U \sim 1$).

$$\Lambda U \sim \lambda \sqrt{1 - \lambda^2 g_{0,\pm\gamma}} \sim 1. \quad (4.16)$$

Пользуясь оценкой (4.4) для $S(2Q \pm 2\pi\Phi/\Phi_0)$, получаем

$$\frac{1}{\pi Q^{1/2}} \lambda \sqrt{1-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\delta z}} \approx \frac{1}{\pi Q^{1/2}} \lambda \sqrt{1-\lambda^2} \sqrt{n_{max}} \approx 1,$$

$$\delta^{-1/2} \sim \sqrt{n_{max}} \approx \frac{1}{\lambda \sqrt{1-\lambda^2}} Q^{1/2}. \quad (4.17)$$

Итак, мы имеем выражение для n_{max} – числа членов в сумме, которые нужно оставить в ряде (3.24) при приближении к резонансу.

4.5 Неборновские поправки. Пертурбативное приближение

Вдали от края зоны по прежнему применима теория возмущений (разложение по Q^{-1})

$$\frac{\delta\rho^{(ren)}}{\rho_0^{(ren)}} = \frac{1+\Delta}{(1+\tilde{\Delta})|1-i\Lambda U|^2} - 1 \approx (1+\Delta)(1+\tilde{\Delta}) \times$$

$$\times (1 - 2\text{Im}(\Lambda U) - |\Lambda U|^2 + 4[\text{Im}(\Lambda U)]^2 + \dots) - 1 =$$

$$= \left\{ \Delta - \tilde{\Delta} - 2\text{Im}(\Lambda U) \right\} + (\tilde{\Delta}^2 - \Delta\tilde{\Delta}) - 2\text{Im}(\Lambda U)(\Delta - \tilde{\Delta}) + 4[\text{Im}(\Lambda U)]^2 - |\Lambda U|^2 + \dots \quad (4.18)$$

Как и раньше выделяем АВ и АВ2 осцилляции. В первом порядке малости по Q^{-1}

$$\frac{\delta\rho_{AB}}{\rho_{AB}} = \Delta - \tilde{\Delta} - 2\text{Im}(\Lambda U) \approx \text{Re} U - 2\text{Re}(i\Lambda U) = \text{Re}((1 - 2i\lambda e^{i\Theta})U) =$$

$$= \text{Re}(e^{2i\Theta}U) = \frac{2}{\sqrt{\pi Q}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(2nQ - \frac{\pi}{4} - 2\Theta\right), \quad (4.19)$$

$$\Theta = \arcsin \lambda. \quad (4.20)$$

АВ2 осцилляции состоят из борновского и неборновского вклада. Борновская часть осцилляций состоит из $\tilde{\Delta}(\tilde{\Delta} - \Delta)$ и нам уже известна. Неборновская имеет вид

$$\left[\frac{\delta\rho_{AB2}}{\rho_0} \right]_{non-born} = -2\text{Im}(\Lambda U) (\Delta - \tilde{\Delta}) + 4[\text{Im}(\Lambda U)]^2 - |\Lambda U|^2 + \dots \quad (4.21)$$

Используем тождество

$$4[\text{Im}(\Lambda U)]^2 - [\text{Re}(\Lambda U)]^2 - [\text{Im}(\Lambda U)]^2 = 2[\text{Im}(\Lambda U)]^2 - \text{Re}\{(\Lambda U)^2\}$$

чтобы перегруппировать последних 2 слагаемых.

$$\text{Re}\{(\Lambda U)^2\} =$$

$$= \text{Re} \left\{ \Lambda [S^2(Q/\pi - \Phi/\Phi_0) + S^2(Q/\pi + \Phi/\Phi_0) + 2S(Q/\pi + \Phi/\Phi_0)S(Q/\pi - \Phi/\Phi_0)] \right\} \quad (4.22)$$

не даст вклада в АВ2- осцилляции, так как в нём присутствует зависимость от R во всех слагаемых, поэтому мы его опускаем. Таким образом получим

$$\left[\frac{\delta\rho_{AB2}}{\rho_0} \right]_{non-born} = 2\tilde{\Delta} \text{Im}(\Lambda U) - 2\text{Im}(\Lambda U) [\Delta - \text{Im}(\Lambda U)] =$$

$$= 2\tilde{\Delta} [\text{Im}(\Lambda U)] - 2\text{Re}(i\Lambda U) \text{Re}((1 + i\Lambda)U) + \dots \quad (4.23)$$



Рис. 3: Электронные траектории, наматывающиеся на цилиндр: такие траектории описываются вторым слагаемым в (4.24)

слагаемое с $\text{Re}(\Lambda U) \text{Re}(i\Lambda U) \propto \sin(2nQ - \pi/4) \cos(2nQ - \pi/4) \propto \sin(4nQ - \pi/2)$ — также зависит от радиуса и не даст вклад в АВ2 осцилляции. Подставляя U в оставшиеся слагаемые, получим

$$\left[\frac{\delta\rho_{AB2}}{\rho_0} \right]_{non-born} = \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{Q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(4\pi\Phi/\Phi_0) + \frac{2\lambda^2}{2\pi Q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0). \quad (4.24)$$

Видно, что не слишком близко к резонансу, когда поправки относительно малы, неборновские эффекты приводят только к малозначительному сдвигу фазы АВ осцилляций, которые по прежнему зануляются при усреднении по радиусу. АВ2 осцилляции оказываются гораздо более чувствительными к неборновским эффектам: они содержат более низкую степень большого параметра Q в знаменателе, но зависят от величины λ . Так, при не слишком малых λ доминирующую роль сыграет второе слагаемое. Его происхождение можно объяснить как когерентное рассеяния электрона на одной примеси дважды (поэтому такой вклад мы будем называть «мини-купероном»), причём между рассеяниями электрон движется в баллистическом режиме и его возвращение в исходную точку происходит только вследствие нетривиальной топологии. В этом состоит отличие мини-куперона от обычного куперона, где возврат происходит в результате диффузионного характера движения.

4.6 Неборновские поправки. Резонансный случай

Все полученные нами ранее результаты относились к случаю, когда осциллирующие поправки к плотности состояний были малы и мы могли пользоваться теорией возмущений. Вблизи края зоны однако плотность состояний расходится, поправки Δ уже не малы и теория возмущений не работает. С другой стороны, вблизи края мы можем зато пользоваться простыми асимптотическими выражениями для Δ . Введём обозначения

$$\begin{aligned} x &= 2\pi Q (\Phi/\Phi_0 - M) = 2\pi Q (\Phi/\Phi_0 - (N_+ - N_-)/2), \\ t &= 2\pi Q (Q/\pi - N), \quad t_{\pm} = 2\pi Q (Q/\pi \pm \Phi/\Phi_0 - N_{\pm}), \\ \Lambda^2 &= -\lambda^2(1 - 2\lambda^2 + 2i\lambda\sqrt{1-\lambda^2}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

1. Рассмотрим случай когда $\Phi/\Phi_0 \neq Z$, где Z — целое. Тогда только какая-нибудь одна из двух величин t_{\pm} может быть мала, но не обе одновременно. Переобозначим $i\Lambda^{-1/2} =$

$-t_0$, тогда $t = t_0$ в точке где плотность состояний расходится, и $t \approx t_0$, в ближайшей окрестности. Тогда перенормированный потенциал можно записать в виде

$$V = \frac{\Lambda}{1 - i\Lambda U} = \frac{1}{\Lambda^{-1} - it^{-1/2}} = \frac{it^{1/2}t_0^{1/2}}{t_0^{1/2} - t^{1/2}} \approx \frac{2it_0^{3/2}}{t_0 - t}. \quad (4.26)$$

2. Рассмотрим теперь случай $\Phi/\Phi_0 = Z$. Тогда одновременно обе t_{\pm} оказываются малы. Определим N как $N = N_+ + N_-$. Тогда $t_{\pm} = t \pm x$. Воспользуемся теоремой о разложении мероморфной функции на дроби [11]:

$$f(x) = f(0) + \sum_n a_n \left(\frac{1}{t - t_n(x)} + \frac{1}{t_n(x)} \right). \quad (4.27)$$

Здесь a_n — вычеты V в точках t_n . Введём обозначения $t_n(x)/t_0 = s_n(x/t_0) \equiv s_n(\bar{x})$, $\bar{x} \equiv x/t_0$, и таким образом Тогда $s_n(\bar{x})$ будут решениями уравнения

$$\frac{i}{\sqrt{\bar{x} + s}} + \frac{i}{\sqrt{\bar{x} - s}} = 1. \quad (4.28)$$

Разложим перенормированный потенциал

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{\Lambda^{-1} - i(t_+^{-1/2} + t_-^{-1/2})} = V(0) + \sum_{n=1}^2 a_n(\bar{x}) \left(\frac{1}{t - t_n} + \frac{1}{t_n} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^2 \frac{2}{-i[x - t_n]^{-3/2} + [t_n + x]^{-3/2}} \left(\frac{1}{t - t_n} + \frac{1}{t_n} \right) + \frac{\Lambda}{1 - 2i\bar{x}^{-1/2}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

и подставим (4.25), (4.26), (4.27) в формулу (4.13). При этом будем пренебрегать $\tilde{\Delta}$ (малым по $1/Q$ даже вблизи резонанса), а $\Delta = \text{Re} U$ в числителе будем заменять на $\text{Re}[t^{-1/2}] \approx \text{Re}[t_0^{-1/2}] \approx t_0^{-1/2}$.

1. Для случая $\Phi/\Phi_0 \neq Z$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}^{(ren)}}{\rho_0} &= \sum_N \int \frac{dR}{\Lambda^2 \sqrt{\pi} \Delta R} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{2\Delta R^2}} \frac{4t_0^3 (1 + t_0^{-1/2})}{|t - t_0|^2} = \\ &= \sum_N \int \frac{dt}{\Lambda^2 \sqrt{\pi} \Delta R} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{2\Delta R^2}} \frac{4t_0^3 (1 + t_0^{-1/2})}{(t - \text{Re}[t_0])^2 + \text{Im}[t_0]^2} \frac{dR}{dt} = \sum_N e^{-\frac{(R_N-R_0)^2}{\Delta R^2}} \frac{dR}{dt} \frac{2\Lambda^4 (1 - i\Lambda^{-1})}{\text{Im} \Lambda \sqrt{\pi} \Delta R}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Здесь $R_N = p_F^{-1} (\pm \Phi/\Phi_0 - \text{Re} \Lambda + N)$, суммирование идёт по целым N , $dt/dR = (2\pi p_F)^2 R_0$. При $\pi p_F \Delta R \gg 1$ можно заменить суммирование по N на интегрирование по R_N , тогда

$$\frac{\bar{\rho}^{(ren)}}{\rho} = \frac{2\Lambda^4 p_F (1 - i\Lambda^{-1})}{\text{Im} \Lambda} \frac{dR}{dt} = \frac{2p_F \Lambda^4}{(2\pi p_F)^2 R_0 \lambda^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi Q}. \quad (4.31)$$

Полученное выражение не зависит, как и следовало ожидать, от магнитного поля (в Дополнении 3 показано, что участки проволоки, где расходится только одна из плотностей t_{\pm} определяют только монотонный вклад).

2. В случае, когда $\Phi/\Phi_0 = Z$, подставим (4.29) в (4.13), при этом учитываем лишь члены, содержащие $a_n^2(x)$, так как они дадут вклад, пропорциональный $[\text{Im} t_n(\bar{x})]^{-1}$ — большой, в

силу малости $\text{Im}[t_n]$, а также вклад $|V(0)|^2$ – важный, так как он даёт правильную асимптотику при больших $\bar{x} = p_F R_0 \|\Phi/\Phi_0\|$:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\rho^{(ren)}}}{\rho_0} &= \frac{1}{\Lambda^2} \sum_N \int \frac{dt}{\sqrt{\pi} \Delta R} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{2\Delta R^2}} [1 - i\Lambda^{-1}] \left| \sum_n \frac{a_n(\bar{x})}{|t_n(\bar{x}) - t|} \right|^2 \frac{dR}{dt} = \\ &= \frac{1}{\Lambda^2} \left[\sum_n \frac{2|a_n(s(\bar{x}))|^2 t_0^3 p_F (1 - i\Lambda^{-1})}{(2\pi p_F)^2 R_0 \text{Im}[t_n(\bar{x})]} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Мы пренебрегаем перекрёстным членом вида $a_1(\bar{x})a_2(\bar{x})$ (подавленным ещё одной степенью Q). Для получения окончательного ответа сюда следует явно подставить функции $a_n(x)$, в результате получаем

$$\frac{\overline{\rho^{(ren)}}}{\rho_0} \approx \frac{4\sqrt{2}p_F \Lambda^4}{(2\pi p_F)^2 R_0} \sum_{n=1,2} \frac{|a_n(\bar{x})|^2}{\text{Im}[t_n(\bar{x})]} = \frac{\lambda}{2\pi Q} F(\bar{x}). \quad (4.33)$$

$$t_n(\bar{x}) = t_0 s_n(\bar{x}) = \Lambda^2 s_n(\bar{x}).$$

$$\bar{x} = \frac{\pi p_F R_0 (\Phi/\Phi_0 - N)}{\lambda^2}.$$

Итак, в непосредственной близости от резонанса (при $\bar{x} \lesssim 1$) имеется сильная зависимость проводимости от магнитного поля. Функция $F(\bar{x})$ показана на графике 5. Наличие

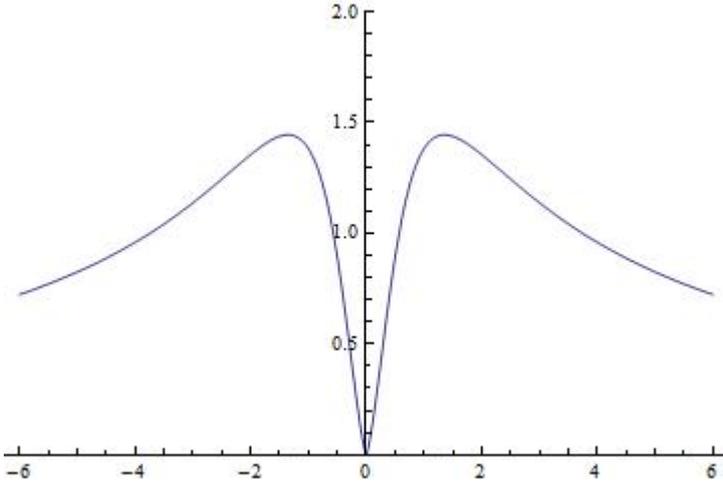


Рис. 4: График зависимости $F(\bar{x})$ от магнитного потока. Тут $\bar{x} = \lambda^{-2} p_F R \|\Phi/\Phi_0\|$, причем $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого числа

пиков на этом графике объясняется следующим образом.

Как хорошо известно, в двумерном случае даже сколь угодно слабо притягивающий ($\lambda < 0$) короткодействующий потенциал обязательно образует связанное состояние. Это состояние сохраняется, и если плоскость свернуть в цилиндр, но, как можно показать, кроме истинного связанного состояния, расположенного под дном самой нижней одномерной подзоны, образуется множество квазистационарных состояний – по одному под дном каждой подзоны. Как видно из формулы (4.25), при $|\lambda| \ll 1$, затухание (мнимая часть энергии) для этих состояний гораздо меньше, чем вещественная. Амплитуда рассеяние электрона имеет полюса при этих (комплексных) энергиях, соответственно, сопротивление идеального (с постоянным радиусом) цилиндра испытывает резкие пики, когда уровень Ферми проходит вблизи какого-нибудь из полюсов. Важно, что при наличии магнитного

потока имеется две серии квазистационарных состояний – отвечающие, соответственно, положительным и отрицательным азимутальным квантовым числам m .

Если теперь учесть флуктуации диаметра цилиндра, то главный вклад в его сопротивление будут давать как раз те его участки, на которых уровень Ферми близок к какому-нибудь квазистационарному состоянию. Если эти состояния хорошо отделены друг от друга по энергии (расстояние между ними много больше их ширины), то каждый из полюсов вносит независимый вклад, и, после усреднения, сопротивление всего цилиндра оказывается не зависящим от потока. Однако в резонансном случае, когда Φ/Φ_0 близко к целому числу, полюса из двух серий начинают налезать друг на друга, и при определении амплитуды рассеяния необходимо учитывать сразу два полюса, близких друг к другу. Естественно, ответ оказывается зависящим от расстояния между полюсами, то есть, от Φ/Φ_0 . При приближении к резонансу рассеяние (а вместе с ним и сопротивление) сначала усиливается, но затем, в самой точке резонанса, обращается в ноль, так как здесь обращается в ноль перенормированная амплитуда рассеяния.

5 Куперонный вклад

Рассмотрим верные диаграммы. Диаграммный ряд изображён на рис.5. Вклад в проводимость имеет вид [12]

$$\delta\sigma(\omega)_{zz} = e^2 \sum_{\gamma, \gamma' = \pm 1} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{d\varepsilon}{(2\pi)} \int \frac{d\vec{p}' d\vec{p}}{(2\pi)^4} v_{\gamma'}^z v_{\gamma}^z G_{\gamma'}^R(\vec{p}'_+) G_{\gamma'}^A(\vec{p}'_-) \Gamma_{\gamma\gamma'}(\vec{p}' + \vec{p}) G_{\gamma}^A(\vec{p}_-) G_{\gamma}^R(\vec{p}_+), \quad (5.1)$$

где куперонная лестница $\Gamma_{\gamma\gamma'}(\vec{p} + \vec{p}')$ удовлетворяет уравнению [12], [13]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma_1\gamma'_1}^{\gamma_2\gamma'_2}(\vec{p} + \vec{p}') &= nR^2 \sum_{\gamma'' = \pm 1} \int d\vec{p}'' |V_{\gamma_1\gamma''}(\vec{p} - \vec{p}'')|^2 G_{\gamma''}(\vec{p}''_+) G_{\gamma''}(\vec{p}''_-) |V_{\gamma''\gamma'_1}(\vec{p}'' - \vec{p}')|^2 + \\ &+ nR^2 \sum_{\gamma'' = \pm 1} \int d\vec{p}'' |V_{\gamma_1\gamma''}(\vec{p} - \vec{p}'')|^2 G_{\gamma''}(\vec{p}''_-) G_{\gamma''}(\vec{p}''_+) \Gamma_{\gamma''\gamma'_1}(\vec{p}' + \vec{p}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

первое слагаемое в правой части представляет вклад петли из двух примесных линий (куперонная лестница начинается с этого слагаемого). В присутствии спин-орбитального взаимодействия имеем два вида куперонов — изменяющих киральность и сохраняющих её.

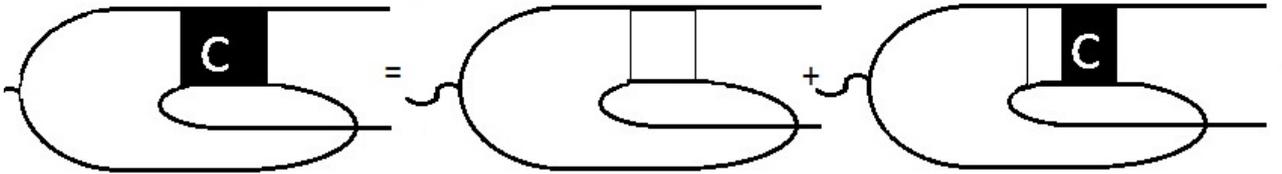


Рис. 5: Куперонная лестница (изображена вместе с одной вершиной)

5.1 Осцилляции без учёта спин-орбитального взаимодействия

При отсутствии спин-орбитального взаимодействия ($\alpha = 0$) имеется только один куперон и вместо системы (5.2) уравнение Бете-Солпитера запишется как

$$\Gamma(\vec{p} + \vec{p}') = \frac{nR^2 V_0^2}{(2\pi)^2} + nR^2 \int \frac{d\vec{p}''}{(2\pi)^2} V_0^2 G(\vec{p}''_-) G(\vec{p}''_+) \Gamma(\vec{p} + \vec{p}'), \quad (5.3)$$

(матричные элементы имеют простой вид $|V(\vec{p} - \vec{p}')|^2 = V_0^2/(2\pi)$). Здесь уравнение для Бете-Солпитера несколько изменено — добавлена одна примесная линия, соединяющая электронные линии, в куперон, что упростило уравнение. После мы просто вычтем это слагаемое из выражения куперона. Уравнение (5.3) легко решается:

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{q}) &= \frac{nR^2V_0^2}{(2\pi)^2} + \frac{nR^2V_0^2}{(2\pi)^2} \int d\theta \frac{pdp}{\varepsilon_+ - \xi_+ + \frac{i}{2\tau}} \frac{\Gamma(\vec{q})}{\varepsilon_- - \xi_- - \frac{i}{2\tau}} = \\ &= \frac{nR^2V_0^2}{(2\pi)^2} + \frac{nR^2V_0^2 p_F}{(2\pi)^2 v_F} \int d\theta \frac{\Gamma(\vec{q})}{\omega - \vec{q}\vec{v}_F + \frac{i}{\tau}} \approx \\ &\approx \frac{nV_0^2 R^2}{(2\pi)^2} + \frac{nV_0^2 R^2 p_{F\tau}}{v_F(2\pi)^2} \int d\theta (1 + i\omega\tau - i(\vec{q}\vec{v}_F)\tau - (\vec{q}\vec{v}_F)^2\tau^2 + \dots) \Gamma(\vec{q}).\end{aligned}\quad (5.4)$$

Делаем анзац $\Gamma(\theta) = \Gamma_0 = \text{const.}$, учтём что при $\alpha = 0$ $p_F = Mv_F$

$$\Gamma(\theta'_1) = nR^2V_0^2(2\pi)^{-2} + \left(1 + i\omega\tau - \frac{q^2 v_F^2 \tau^2}{2}\right) \Gamma(\theta'_1). \quad (5.5)$$

Получаем обычное выражение для куперона

$$\Gamma(\vec{p} - \vec{p}') = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{nR^2V_0^2}{Dq^2 - i\omega\tau} = \frac{1}{\tau_0^2 M} \frac{1}{Dq^2 - i\omega}. \quad (5.6)$$

Здесь мы пренебрегли малыми по Q^{-1} осциллирующими поправками, возникающими из формулы Пуассона при свёртке 2-х функций Грина. Выражение действительно не зависит от углов, что говорит о правильности использованного анзаца. Вычитание из этого выражения вклада одной примесной линии не слишком изменит вклад в проводимость (так как основной вклад всё-равно набирается вблизи полюса куперона). Соответственно вклад в проводимость

$$\begin{aligned}\delta\sigma^{(cooper)}(\omega) &= \frac{e^2}{\omega} \int d\vec{p} \int d\vec{p}' G^R(\omega_+, \vec{p}) G^A(\omega_-, \vec{p}') G^R(\omega_+, \vec{p}') G^A(\omega_-, \vec{p}') \vec{v}\vec{v}' \Gamma(\omega, \vec{p} - \vec{p}') \approx \\ &\approx \frac{e^2 v_F^2 \nu_{2D}}{2\omega} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \int \frac{\Gamma(\omega, \vec{q}) d\xi}{(\omega - \xi + \frac{i}{2\tau})^2 (\omega - \xi - \frac{i}{2\tau})^2} = \\ &= -\frac{8e^2 \nu_{2D} \tau^3 v_F^2 \pi}{8\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \Gamma(\omega, \vec{q}) = -\frac{e^2 v_F^2 \tau_0}{\pi D} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2 - i\omega/D} = \\ &= -\frac{2e^2}{\pi R(2\pi)^2} \sum_{m=-R/l}^{R/l} \int \frac{dk_z}{k_z^2 + (m - \Phi/\Phi_0)^2/R^2 - i\omega/D}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Границы суммирования $\pm R/l$ обеспечат обрезание импульса \vec{Q} обратной длиной свободного пробега, интеграл по k_z должен быть в этом случае в пределах $\pm\sqrt{l^{-2} - (m_{\max} - \Phi/\Phi_0)^2/R^2}$; положим $\omega \approx 0$

$$\delta\sigma^{(cooper)} = -\frac{e^2}{2\pi^3} \int dk_z \sum_{m=-R/l}^{R/l} \frac{1}{(m - \Phi/\Phi_0)^2/R^2 + k_z^2 + \tilde{L}^{-2}},$$

здесь l — длина свободного пробега, $\tilde{L} = \min\{L, L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}\}$ — «обрезка» по импульсу (τ_φ — характерное время сбоя фазы), которую мы вводим феноменологически, L — длина

цилиндра. Суммирование может быть проведено точно, в случае $R \ll l$ вклад в сумму вносит только одна гармоника, при которой знаменатель наименее подавлен и (5.7) сводится к

$$\delta\sigma \approx \frac{-e^2}{2\pi^3} \int_{-l^{-1}}^{l^{-1}} dk_z \frac{1}{k_z^2 + (|\Phi/\Phi_0|/R)^2 + \tilde{L}^{-2}} \approx \frac{-e^2}{2\pi^2} [L_{eff} - 2l/\pi],$$

$$L_{eff} = \frac{\tilde{L}}{\sqrt{1 + (|\Phi/\Phi_0|\tilde{L}/R)^2}},$$
(5.8)

при $l^{-1} \rightarrow \infty$. Здесь $\|x\| \equiv \min\{x, 1-x\}$ — расстояние до ближайшего целого от x числа. Ответ справедлив для значений $l \gg R$. Вклад в сопротивление, соответственно

$$\frac{\delta\rho^{(cooper)}}{\rho_0} = \frac{1}{\pi^2(p_F R)l} [L_{eff}(\Phi) - 2l/\pi].$$
(5.9)

В сравнении со случаем $l \ll R$ ([6]) поправки к магнитоосцилляциям представляют собой более острые пики при целых значениях квантов в потоке Φ .

5.2 Осцилляции в присутствии спин-орбитального взаимодействия

Как и в случае пренебрежения спин-орбитой, мы построим интегральное уравнение на куперонную лестницу, которая будет начинаться с одной примесной линии, что упростит решение. Позже мы просто вычтем эту линию. Уравнение, однако, будет иметь более сложный вид вследствие зависимости от угла рассеяния матричных элементов потенциала. Переносимый купероном импульс $\vec{q} = \vec{k} + \vec{k}'$ — сумма входящих в диаграмму импульсов ($|\vec{k}| = |\vec{k}'|$ следовательно $q = 2k \cos \theta_1$). Матричные элементы $V_{\uparrow\downarrow}$ имеют вид $\cos(\theta/2)$ (или $\sin(\theta/2)$), где θ — угол между векторами входящими в вершину. Пользуясь тождеством

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$
(5.10)

получим в случае $\cos \theta = \cos(\vec{k}, \vec{q}/2 + \vec{p})$.

$$\cos \beta \equiv \cos(\vec{k}, \vec{q}/2 + \vec{p}) = \frac{\vec{k}(\vec{q}/2 + \vec{p})}{|\vec{k}||\vec{q}/2 + \vec{p}|} = \frac{k [q/2 \cos \theta_1 + p_F \cos(\theta - \theta_1)]}{k \sqrt{q^2/4 + p_F^2 + qp_F \cos \theta}} =$$

$$= \frac{q/2 \cos \theta_1 + p_F \cos(\theta - \theta_1)}{\sqrt{p_F^2 + q^2/4 + qp_F \cos \theta}}.$$
(5.11)

Здесь угол θ по прежнему обозначает угол между \vec{q} и \vec{p} , а систему координат повернули так, чтобы угол θ_1 входящего импульса \vec{k} был равен с отрицательным знаком углу импульса \vec{k}' : $\theta_1 = -\theta'_1$ (то есть угол между \vec{q} и осью \vec{z} равен 0). Разложим выражение для $\cos \beta$ по степеням $\frac{Q}{p_F} \ll Ql \lesssim 1$.

$$\cos \beta = \frac{1}{p_F} (q/2 \cos \theta_1 + p_F \cos(\theta - \theta_1)) \left(1 - \frac{q}{2p_F} \cos \theta - \frac{q^2}{8p_F^2} + \frac{3q^2}{8p_F^2} \cos^2 \theta + \dots \right).$$
(5.12)

В нулевом приближении по q/p_F имеем $\cos \beta = \cos(\theta - \theta_1)$. Рассмотрим свёртку двух функций Грина $G_\gamma G_{\gamma'}$. При $\gamma = \gamma'$ имеем уже известный случай. При $\gamma = -\gamma'$

$$\frac{e^2 v_F^2}{2(2\pi)} \int \frac{p dp}{(v_F^2(p - p_F^\gamma)^2 + \frac{1}{4\tau^2}) (v_F^2(p - p_F^{-\gamma})^2 + \frac{1}{4\tau^2})} =$$

$$= \frac{e^2 v_F^2}{2(2\pi)} \frac{2\pi i}{2\pi v_F^4} \left\{ \frac{p_F^\gamma + \frac{i}{2\tau v_F}}{p_{so} + \frac{i}{\tau v_F}} + \frac{p_F^{-\gamma} + \frac{i}{2\tau v_F}}{p_{so} - \frac{i}{\tau v_F}} \right\} \approx \frac{e^2}{2} \frac{2\tau^2(p_0 l)}{(1 + p_{so}^2 l^2)}.$$
(5.13)

Это выражение сильно подавлено при $p_{so}l \gg 1$. Так как нас интересует случай как раз сильного спин-орбитального взаимодействия, а именно $p_{so}l \sim Mv_F l \gg 1$, то мы пренебрегаем слагаемыми, содержащими этот префактор в интегральном уравнении. Имеем итог

$$\Gamma_{\gamma\gamma'}(\vec{q}) = \left| V_{\gamma\gamma'}(\vec{k}, \vec{k}') \right|^2 + \sum_{\gamma''=\pm 1} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^2} \frac{\left| V_{\gamma\gamma''}(\vec{k}, \vec{p} + \vec{q}/2) \right|^2}{\varepsilon_+ - \xi_+ + \frac{i}{2\tau_{\gamma''}}} \frac{\Gamma_{\gamma''\gamma'}(\vec{q})}{\varepsilon_- - \xi_- - \frac{i}{2\tau_{\gamma''}}}, \quad (5.14)$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\gamma}^{\gamma\gamma}(\theta_1) &= \frac{n^{2D} R^2 V_0^2}{(2\pi)} \left[\cos^2 \theta_1 + \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos^2((\theta - \theta')/2)}{\varepsilon_+ - \xi_+ + \frac{i}{2\tau}} \frac{pdp}{\varepsilon_- - \xi_- - \frac{i}{2\tau}} \Gamma_{\gamma\gamma}^{\gamma\gamma}(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\sin^2(\theta - \theta')/2}{\varepsilon_+ - \xi_+ + \frac{i}{2\tau}} \frac{pdp}{\varepsilon_- - \xi_- - \frac{i}{2\tau}} \Gamma_{\gamma, -\gamma}^{\gamma, -\gamma}(\theta) \right] \\ \Gamma_{\gamma, -\gamma}^{\gamma, -\gamma}(\theta_1) &= \frac{n^{2D} R^2 V_0^2}{(2\pi)} \left[\sin^2 \theta_1 + \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\sin^2(\theta - \theta')/2}{\varepsilon_+ - \xi_+ + \frac{i}{2\tau}} \frac{pdp}{\varepsilon_- - \xi_- - \frac{i}{2\tau}} \Gamma_{\gamma\gamma}^{\gamma\gamma}(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos^2(\theta - \theta')/2}{\varepsilon_+ - \xi_+ + \frac{i}{2\tau}} \frac{pdp}{\varepsilon_- - \xi_- - \frac{i}{2\tau}} \Gamma_{\gamma, -\gamma}^{\gamma, -\gamma}(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Имеем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным ядром (K), то есть, для неизвестной $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = f(x) + \int dy K(x, y) \Psi(y), \quad K(x, y) = \sum_n \tilde{\Psi}_n(x) \Psi_n(y).$$

Ищем решение (5.15) раскладывая $\Gamma_{\gamma\gamma'}$ по функциям $\{\Psi\} = \{1, \cos \theta, \dots\}$ входящим в ядро интегрального уравнения. Итак, делаем постановку

$$\Gamma_{\gamma, \pm\gamma}^{\gamma \pm \gamma} = \sum_n C_n^\pm \Psi_n(\theta), \quad (5.16)$$

получаем систему на C_n^\pm , решая которую получаем ответ. Ответ в главном порядке (то есть отбрасывая слагаемые, содержащие в числителе q, q^2, ω)

$$\Gamma_{\gamma\gamma}^{\gamma\gamma} \approx \Gamma_{\gamma, -\gamma}^{\gamma, -\gamma} \approx \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{so}} \right) \frac{1}{Dq^2 + \frac{4}{3\tau_{so}}} + \frac{1}{\tau_{so}} \frac{1}{Dq^2}, \quad D = \frac{v_F^2 \tau_0}{2}, \quad \frac{1}{\tau_{so}} = \frac{1}{\tau \left(1 + \frac{p_{so}^2}{(Mv_F)^2} \right)}, \quad (5.17)$$

здесь мы также пренебрегли $\omega\tau \rightarrow 0$. Этот результат ожидаем: для куперона получено то же самое выражение, что и в отсутствии спин-орбиты, но с изменённым временем рассеяния $\tau_0^{-1} \rightarrow \tau_0^{-1} + \tau_{so}^{-1}$. Найдём теперь проводимость

$$\begin{aligned} \sigma^{(cooper)} &= \frac{e^2}{\omega} \sum_{\gamma, \gamma'} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega'}{(2\pi)} \theta(\omega^2/4 - \omega'^2) v_z v'_z \times \\ &\quad \times G_\gamma^R(\vec{p}) G_\gamma^A(\vec{p}) G_{\gamma'}^R(\vec{q} - \vec{p}) G_{\gamma'}^A(\vec{q} - \vec{p}) \Gamma_{\gamma\gamma'}(\vec{q}) \approx \\ &\approx \frac{e^2 v_F^2}{2(2\pi)} \sum_{\gamma, \gamma'} \int \frac{pdp}{(\xi_{\gamma'}^2 + \frac{1}{4\tau^2})(\xi_\gamma^2 + \frac{1}{4\tau^2})} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \Gamma_{\gamma\gamma'}(\vec{q}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Выполняя суммирование по γ, γ' получим выражение для проводимости:

$$\sigma = \frac{-e^2}{2(2\pi)} \left\{ 2\tau^2(p_0 l) \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{so}} \right) L'_{eff} + \frac{\tau}{\tau_{so}} L_{eff} - 4l \right] \right\} \frac{1}{2\pi M D_0 \tau^2}. \quad (5.19)$$

Поправки сопротивлению соответственно

$$\frac{\delta\rho^{(cooper)}}{\rho} = \frac{1}{\pi(\pi p_0 R)l} \left\{ (2\tau^2(p_0 l)) \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{so}}\right) L'_{eff} + \frac{\tau}{\tau_{so}} L_{eff} - 4l \right] \right\} \frac{1}{2\pi M D_0 \tau^2}, \quad (5.20)$$

$$\tilde{L} = \min\{L, L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}\}, \quad \tilde{L}' = \min\{L, L'_\varphi = (D\tau_\varphi)^{-1/2} + (4/3D\tau_{so})^{-1/2}\},$$

$$L_{eff} = \frac{\tilde{L}}{\sqrt{1 + (|\Phi/\Phi_0| \tilde{L}/R)^2}}, \quad L'_{eff} = \frac{\tilde{L}'}{\sqrt{1 + (|\Phi/\Phi_0| \tilde{L}'/R)^2}} \quad (5.21)$$

$\tilde{\tau}_\varphi$ — время сбоя фазы в присутствии спин-орбитального взаимодействия (как и ранее мы ввели это время феноменологически). При $p_{so} = 0$ получаем, очевидно, предыдущий случай.

При $p_{so} l \geq 1$ куперонный вклад оказывается подавлен как $\{1 + s^2\}^{-1}$

$$\frac{2\tau^2(p_0 l)}{(1 + p_{so}^2 l^2)} \quad (5.22)$$

6 Выводы

Основным результатом данной работы является объяснение возможного механизма удвоения частоты магнитоосцилляций в тонких проволоках. Показано, что наличие даже относительно слабых флуктуаций толщины проволоки приводит к подавлению нечетных гармоник Ааронов-Бомовских осцилляций, но практически не затрагивает четные гармоники. Этот эффект управляется безразмерным параметром $q = \pi p_F \Delta R$. При $q \ll 1$ в эксперименте должны наблюдаться обычные осцилляции Ааронова-Бома (3.16). При $q \gg 1$ амплитуды нечетных гармоник оказываются пропорциональны малому множителю $\frac{1}{\sqrt{Q}} e^{-q^2}$ и ведущую роль играют осцилляции с удвоенной частотой. Вдали от резонансного случая $\Phi \approx N\Phi_0$ в отсутствие спин-орбиты эти осцилляции описываются формулой

$$\frac{\delta\rho_{AB2}}{\rho_0} = \frac{9}{4\pi Q^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0) + \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{Q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0) + \frac{\lambda^2}{\pi Q} \ln\{4 \sin^2(4\pi\Phi/\Phi_0)\} + \frac{1}{\pi Q l} [L_{eff} - 2l/\pi], \quad (6.1)$$

$$L_{eff} = \frac{\pi\tilde{L}}{\sqrt{1 + (|\Phi/\Phi_0| \tilde{L}/R)^2}}, \quad \tilde{L} = \min\left[L, L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}\right], \quad \lambda = \pi\nu_F^{(0)} V_0.$$

Первое слагаемое возникает уже в борновском приближении, за счет интерференции различных осциллирующих поправок к плотностям состояний. Второй и третий члены возникают при учете неборновских поправок по константе взаимодействия электрона с примесью λ . Третий член — лидирующий при не слишком малом λ , имеет простое физическое объяснение — связанное с возникновением «мини-куперонов» — почти замкнутых траекторий, возникающих на цилиндре (в отличие от бесконечной плоскости) уже без учета множественного рассеяния на примесях. Четвертый член — более или менее обычный куперонный вклад, аналогичный найденному Ароновым, Альтшулером и Спиваком в грязном случае — связан с когерентным множественным рассеянием на разных примесях (слаболокализационный эффект). В нашем — чистом — случае, он, однако, имеет другой характер зависимости от потока (более резкий, сосредоточенный вблизи резонанса).

Относительный вклад каждого из слагаемых здесь существенно зависит от интенсивности взаимодействия с примесями λ , малости параметров Q^{-1} и $(p_F l)^{-1}$ и отклонения потока Φ от резонансного значения $N\Phi_0$.

В непосредственной близости от резонанса осцилляции в основном определяются рассеянием электронов на квазистационарных состояниях, возникающих под каждой из одномерных подзон:

$$\frac{\overline{\rho^{(ren)}}}{\rho_0} \approx \frac{\lambda}{2\pi Q} F(\bar{x}), \quad \bar{x} = \frac{Q(\Phi/\Phi_0 - N)}{\lambda^2}. \quad (6.2)$$

а функция F изображена на рисунке 5.

При наличии спин-орбитального взаимодействия нечетные гармоники также подавляются при больших q :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\rho_{AB2}}{\rho_0} = & \frac{9}{4\pi Q^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0) + \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{Q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(4\pi n\Phi/\Phi_0) + \\ & + \frac{1}{4Q} f(p_{so}/Mv_F) \ln\{4\sin^2(4\pi\Phi/\Phi_0)\} + \\ & + \frac{1}{\pi Ql} \left\{ \left(\frac{p_0 l}{\pi M D_0} \right) \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_{so}} \right) L'_{eff} + \frac{\tau}{\tau_{so}} L_{eff} - 4l \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{L}' = \min\{L, L'_{\varphi^{-1}}\} = & (D\tau_{\varphi})^{-1/2} + (4/3D\tau_{so})^{-1/2}, \quad L'_{eff} = \frac{\tilde{L}'}{\sqrt{1 + (|\Phi/\Phi_0| \tilde{L}'/R)^2}}, \\ & f(s) = \frac{s^2(1-s^2)}{(1+s^2)^3}. \end{aligned}$$

Амплитуда дополнительного слагаемого во второй строке пропорциональна квадрату спин-орбитального взаимодействия, но затосодержит, по сравнению со случаем без спин-орбиты, более низкую степень Q в знаменателе. Поэтому оно может доминировать в случае слабого взаимодействия с примесями и достаточно сильной спин-орбиты.

Спин-орбитальное взаимодействие также приводит к модификации куперонного вклада, до некоторой степени аналогичной подобной же модификации в грязном случае.

7 Дополнения

7.1 Дополнение 1. Время рассеяния

Введём обозначения

$$U_m(k) = \frac{k^2 + (\mu^2 + 1/4)/R^2}{2M} - \frac{\alpha}{2R}, \quad (7.1)$$

$$S_m(k) = \left(\frac{\mu}{2MR^2} - \alpha\mu/R \right), \quad (7.2)$$

соответственно

$$E_{\gamma,m,k} = U_{m,k} + \gamma\sqrt{S_m^2 + \alpha^2 k^2}. \quad (7.3)$$

Обозначим также $\tilde{U} = 1/(2MR^2) - \alpha/(2R)$ — константная часть энергии. Используем условие малой концентрации примесей

$$p_F l \gg Q = \pi p_F R \gg 1, \quad (7.4)$$

где l — длина свободного пробега, а $p_F = (2ME_F)^{1/2}$. Обратное время рассеяния

$$\begin{aligned}
& \tau^{-1} = \text{Im}[VGV] = \\
& = n^{2D}V_0^2 \sum_m \int \frac{dk}{(2\pi)} \frac{1}{E_F - U_{m,k} - \sqrt{S_m^2 + \alpha^2 k^2} + i\delta} \cos^2\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right) + \\
& + n^{2D}V_0^2 \sum_m \int \frac{dk}{(2\pi)} \frac{1}{E_F - U_{m,k} + \sqrt{S_m^2 + \alpha^2 k^2} + i\delta} \sin^2\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Киральность $\gamma = \pm 1$. Рассмотрим случай сильного спин-орбитального взаимодействия:

$$\alpha \gg (MR)^{-1}. \tag{7.6}$$

Тогда спектр имеет вид

$$E = \frac{k^2 + \mu^2/R^2}{2M} + \gamma\alpha\sqrt{\frac{\mu^2}{R^2} + k^2} + \frac{\alpha}{2R}. \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_\gamma(E_F, \theta_1)} = \text{Im}[VG_0V] &= \frac{2n^{2D}V_0^2\pi}{(2\pi)^2} \sum_{m,\gamma'} \int \frac{dk}{(2\pi)} \delta\left(E_F - U_{m,k} + \gamma\alpha\sqrt{\frac{\mu^2}{R^2} + k^2}\right) \times \\
&\times (1 - \gamma' \cos((\theta - \theta_1))).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Делаем замену $m/R \equiv P$ и сдвигаем переменную $m \rightarrow m + \Phi/\Phi_0 + 1/2$. Перейдём от суммирования по μ к интегрированию, используя формулу Пуассона.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_\gamma(E_F, \theta_1)} &= \frac{2n^{2D}V_0^2R^2\pi}{(2\pi)^2} \sum_{\gamma'=\pm 1} \sum_{l=1}^{\infty} \int \frac{dPdk}{(2\pi)} e^{2\pi ilPR} \delta\left(E_F - \tilde{U} - \frac{P^2 + k^2}{2M} + \gamma\alpha\sqrt{P^2 + k^2}\right) \times \\
&\times (1 - \gamma' \cos(\theta - \theta_1)) = \\
&= \frac{2n^{2D}V_0^2R^2\pi}{(2\pi)^2} \sum_{\gamma'=\pm 1} \int \frac{pdpd\theta}{(2\pi)} \delta\left(E_F - \tilde{U} - \frac{p^2}{2M} + \gamma\alpha p\right) \times \\
&\times (1 - \gamma' \cos(\theta - \theta_1)) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \exp(2\pi ilpR \cos \theta) \exp(2\pi li[\Phi/\Phi_0 + 1/2]) + h.c.\right),
\end{aligned} \tag{7.9}$$

где $\tan \theta = k/P$ и, соответственно, $P = p \cos \theta$, $k = p \sin \theta$, здесь и далее под $h.c.$ подразумевается комплексно сопряжённая часть осциллирующей экспоненты.

Нули δ -функции определяем из

$$p^2 \pm 2M\alpha p + 2M(E_F - \tilde{U}) = 0, \tag{7.10}$$

$$p_F^\gamma = \alpha M(\gamma + \sqrt{1 + a^2}), \quad a^2 = \frac{2M(E_F - \tilde{U})}{\alpha^2 M^2}.$$

$p_F^{\pm\gamma}$ — импульс ферми с положительной (отрицательной) киральностью. Используем равенство

$$\delta(f(X)) = \sum_i \frac{\delta(X - X_i)}{|f'(X_i)|}.$$

Нас интересует случай $a^2 > 0$ или $E_F - \tilde{U} > 0$. Корни должны быть положительными, иначе они не дадут вклад в интеграл при интегрировании по p в области $[0, +\infty)$.

Перепишем интеграл в виде

$$\begin{aligned} \tau_\gamma^{-1}(E_F, \theta_1) &= \frac{2Mn^{2D}V_0^2R^2}{2(2\pi)^2} \int pdpd\theta \times \\ &\times \frac{\delta(p - p_F^{-\gamma})}{MR\alpha\sqrt{1+a^2}} (1 + \cos(\theta - \theta_1)) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} e^{2\pi li(pR \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)} + h.c. \right) + \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{2Mn^{2D}V_0^2R^2}{2(2\pi)^2} \int pdpd\theta \times \\ &\times \frac{\delta(p - p_F^\gamma)}{MR\alpha\sqrt{1+a^2}} (1 - \cos(\theta - \theta_1)) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} e^{2\pi li(pR \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)} + h.c. \right). \\ \frac{1}{\tau_\gamma(E_F, \theta_1)} &= \frac{2Mn^{2D}V_0^2R^2}{2(2\pi)^2MR\alpha\sqrt{a^2+1}} \left(\int d\theta \times \right. \\ &\times \left\{ p_F^\gamma (1 + \cos(\theta - \theta_1)) \sum_{l=1}^{\infty} [\exp(2\pi li(p_F^\gamma R \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)) + h.c.] + \right. \\ &+ p_F^{-\gamma} (1 - \cos(\theta - \theta_1)) \sum_{l=1}^{\infty} [\exp(2\pi li(p_F^{-\gamma} R \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)) + h.c.] \left. \right\} + \\ &+ [p_F^{-\gamma} R (1 - \cos(\theta - \theta_1)) + p_F^\gamma R (1 + \cos(\theta - \theta_1))] \Big), \end{aligned} \quad (7.12)$$

$(p_F^\gamma + p_F^{-\gamma})R = 2\alpha MR\sqrt{a^2+1} = 2Mv_F R = 2Q/\pi$. После взятия интегралов получим, выделяя постоянную и осциллирующую часть, и вводя обозначения $Q_\gamma = \pi p_F^\gamma R$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\gamma(E_F, \theta_1)} &= \frac{V_0^2MR^2n^{2D}}{(2\pi)} + \\ &+ \frac{1}{Q\tau_0} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (Q_\gamma J_0(2lQ_\gamma) + Q_{-\gamma} J_0(2lQ_\gamma)) \cos(2l\pi\Phi/\Phi_0) + \\ &+ \frac{\cos(\theta_1)}{Q\tau_0} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (Q_{-\gamma} J_1(2lQ_{-\gamma}) - Q_\gamma J_1(2lQ_\gamma)) \sin(2l\pi\Phi/\Phi_0). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Монотонная часть не зависит от спин-орбитального взаимодействия. Воспользуемся асимптотикой функций Бесселя для больших значений аргументов

$$J_n(x) \approx A_n(x) \cos\left(x - \frac{\pi n}{4}\right) + B_n(x) \sin\left(x - \frac{\pi n}{4}\right). \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{9}{128x^2}\right), \quad B_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{1}{8x}, \\ A_1(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{15}{128x^2}\right), \quad B_1(x) = \frac{3}{8x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}, \\ A_2(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{105}{128x^2}\right), \quad B_2(x) = \frac{15}{8x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Обратное время рассеяния таким образом будет иметь вид

$$\frac{1}{\tau_\gamma} = \frac{1}{\tau_0} (1 + \Delta_\gamma), \quad \text{где} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma &= \frac{1}{Q} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sum_{\gamma'=\pm 1} \cos(2\pi l \Phi / \Phi_0) \times \\
&\times Q_{\gamma'} \left[A_0(2lQ_{\gamma'}) \cos\left(2lQ_{\gamma'} - \frac{\pi}{4}\right) + B_0(2lQ_{\gamma'}) \sin\left(2lQ_{\gamma'} - \frac{\pi}{4}\right) \right] + \\
&+ \frac{\gamma \cos \theta}{Q} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \sum_{\gamma'=\pm 1} \sin(2l\pi \Phi / \Phi_0) \gamma' \times \\
&\times Q_{\gamma'} \left[A_1(2lQ_{\gamma'}) \cos\left(2lQ_{\gamma'} + \frac{\pi}{4}\right) + B_1(2lQ_{\gamma'}) \sin\left(2lQ_{\gamma'} + \frac{\pi}{4}\right) \right].
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Видим, что имеется симметричная и пропорциональная $\cos \theta$ антисимметричная часть времени рассеяния. В отсутствие спин-орбиты симметричная часть удвоится, а антисимметричная — сократится.

Найдём теперь поправку к $\tilde{\Delta}$ (только в пренебрежении спин-орбитой). Делая замены, аналогичные предыдущим, получим выражение (7.1) с точностью до появления под интегралом дополнительного множителя

$$v_z^2 = \frac{\sin^2 \theta}{M^2} (p + \gamma p_{so})^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2M^2} (p + \gamma p_{so})^2, \tag{7.18}$$

и отсутствия матричных элементов потенциала. При интегрировании по ρ появится просто множитель $(\alpha MR \sqrt{a^2 + 1})^2 \equiv (Mv_F R)^2$. При интегрировании по θ получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} &= \frac{2\pi^3}{Q^3} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2(2\pi)^2} (1 - \cos(2\theta)) Q(\alpha MR \sqrt{1 + a^2})^2 \times \\
&\times [\exp(2\pi i l (Q/\pi \cos \theta + \Phi/\Phi_0 + 1/2)) + h.c.] \approx \\
&\approx 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \cos(2l\pi \Phi / \Phi_0) \left[(A_0(2lQ) + A_2(2lQ)) \cos\left(2lQ - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\
&\quad \left. + (B_0(2lQ) + B_2(2lQ)) \sin\left(2lQ - \frac{\pi}{4}\right) \right].
\end{aligned} \tag{7.19}$$

7.2 Дополнение 2. Уравнение Швингера-Дайсона

Интегральное уравнение на вершину в поляризационном операторе

$$\begin{aligned}
\Pi_\gamma(\vec{p}) &= G_\gamma(\vec{p}_+) G_\gamma(\vec{p}_-) \left[v_\gamma^z(\vec{p}) + \frac{n^{2D}}{2(2\pi)^3} \sum_{\gamma'=\pm 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int p dp d\theta' |V_{\gamma\gamma'}|^2 \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp(2\pi i n (Q_{\gamma'}/\pi \cos \theta' + \Phi/\Phi_0 + 1/2)) \Pi_{\gamma'}(\vec{p}') \right].
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Здесь и далее мы подразумеваем зависимость от частоты $\Pi(\vec{p}, \omega, \omega') = \Pi(\vec{p}) \theta(\omega/2 - |\omega'|)$. Преобразуем (7.20). Переобозначим

$$\int p dp \Pi_\gamma(p) \equiv v_F \Lambda_\gamma, \tag{7.21}$$

домножая обе части (7.20) на $p dp$ и интегрируя, получим

$$v_F \Lambda_\gamma = \int p dp G_\gamma(\vec{p}_+) G_\gamma(\vec{p}_-) \left[v_F + \frac{n^{2D} v_F}{2(2\pi)^2} (\tilde{\Delta}_\gamma \Lambda_\gamma - \tilde{\Delta}_{-\gamma} \Lambda_{-\gamma}) \right], \tag{7.22}$$

здесь $\tilde{\Delta}_\gamma \Lambda_\gamma = \sum_n \int d\theta' |V(\theta' - \theta)|^2 \exp(2\pi i n (Q_\gamma/\pi \cos \theta' - \Phi/\Phi_0 + 1/2)) \Lambda_\gamma(\theta')$.

При $\omega\tau_\gamma \ll 1$

$$\int v p d p G_\gamma(\vec{p}_+) G_\gamma(\vec{p}_-) = \frac{2i\pi p_F^\gamma}{i/\tau_\gamma + \omega} \approx 2\pi p_F^\gamma \tau_\gamma, \quad (7.23)$$

используем также тождество $\tau_0^{-1} = V_0^2 M R^2 n^{2D} / (2\pi)$.

Ищем решение (7.20) в виде

$$\Lambda_\gamma(\theta) = \Lambda_{0,\gamma} + \Lambda_{1,\gamma} \cos \theta + \Lambda_{2,\gamma} \sin \theta + \Lambda_{11,\gamma} \cos(2\theta) + \Lambda_{12,\gamma} \sin(2\theta) + \dots \quad (7.24)$$

Подставляя это в исходное уравнение и собирая слагаемые при линейно-независимых тригонометрических функциях, получим систему уравнений на Λ_i . Рассмотрим структуру интеграла по θ' в правой части уравнения (7.20). Туда входит матричный элемент потенциала и перенормированная вершина, происходящая из разложения (7.24)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\gamma \Lambda_\gamma &= \int d\theta' \exp(2i\pi n(Q_\gamma/\pi \cos \theta' + \Phi/\Phi_0 + 1/2)) \Lambda_\gamma V_{\gamma,\pm\gamma}^2(\theta - \theta') = \\ &= V_0^2 \int \frac{d\theta'}{2} [1 \pm \cos \theta \cos \theta' \pm \sin \theta \sin \theta'] \exp(2i\pi n(Q_\gamma/\pi \cos \theta' + n\Phi/\Phi_0 + 1/2)) \times \\ &\quad \times [\Lambda_{0,\gamma} + \Lambda_{1,\gamma} \cos \theta' + \Lambda_{2,\gamma} \sin \theta' + \Lambda_{11,\gamma} \cos(2\theta') + \Lambda_{12,\gamma} \sin(2\theta')] = \\ &= V_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp(2\pi i n \Phi/\Phi_0) \times \\ &\quad \times \left[(\Lambda_{0,\gamma} J_0(a_n) + \Lambda_{1,\gamma} J_1(a_n) - \Lambda_{11,\gamma} J_2(a_n)) + \left(\frac{J_1(a_n)}{a_n} \Lambda_{2,\gamma} + \frac{iJ_2(a_n)}{a_n} \Lambda_{12,\gamma} \right) \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \left(J_1(a_n) \Lambda_{0,\gamma} + \left(\frac{J_1(a_n)}{a_n} - J_2(a_n) \right) \Lambda_{1,\gamma} - J_2(a_n) \Lambda_{11,\gamma} \right) \cos \theta \right], \end{aligned} \quad (7.25)$$

где $a_n = 2nQ_\gamma$, $J_i(a_n)$ — функции Бесселя i -го порядка. Подставляя это выражение в уравнение (7.30) и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему уравнений на Π_i . Неоднородность в интегральном уравнении имеет вид

$$v_\gamma^z \tau_\gamma = v_F(1 + \Delta) \sin \theta + v_F \gamma \Delta' \sin \theta \cos \theta = v_F(1 + \Delta) \sin \theta + \frac{1}{2} v_F \gamma \Delta' \sin(2\theta);$$

в правой части уравнения (7.30) аналогично возникнут только члены $\sim \sin \theta$, $\sim \sin(2\theta)$ при умножении на $\tau_\gamma \sim (\tau_1 + \tau_2 \cos \theta)$ скобки из (7.2). Таким образом, мы получим нетривиальную систему на Λ_2, Λ_{12} , и тривиальную, на все остальные Λ_i .

Высшие гармоники также не возникнут: неоднородностей пропорциональных высшим гармоникам нет, в правой части (7.30) возникать такие слагаемые не могут (как видно из структуры правой части, там впринципе не может быть гармоник выше второй, образующейся из произведения $V_{\gamma\gamma'} \tau_\gamma$), то есть все последующие уравнения будут иметь вид

$$\sum_i C_{ij} \Lambda_{ij} = 0, \quad i > 2, \quad (7.26)$$

с низшими гармониками они не "перемешиваются" в системе и ответ для них $\Lambda_i = 0$.

Обозначим $\tilde{\Delta}_\gamma^{(i)}$ — коэффициент при $\Lambda_\gamma^{(i)}$ в системе. В первом порядке малости по $1/Q$ получаем $\tilde{\Delta}_\gamma^{(2)} \equiv J_1(a_n)/a_n \approx 1/2$ и $\tilde{\Delta}_\gamma^{(12)} \equiv J_2(a_n)/a_n \approx 0$ (следующие поправки имеют порядок уже $1/Q^{3/2}$).

Тогда имеем из уравнения (7.22)

$$\begin{aligned} [\Lambda_{2,\gamma} \sin \theta + \Lambda_{12,\gamma} \sin(2\theta)] &= 2\pi p_F^\gamma \tau_\gamma \left[\sin \theta + \frac{1}{8\pi M \tau_0} (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) \sin \theta \right] \\ [\Lambda_{2,-\gamma} \sin \theta + \Lambda_{12,-\gamma} \sin(2\theta)] &= 2\pi p_F^{-\gamma} \tau_{-\gamma} \left[\sin \theta - \frac{1}{8\pi M \tau_0} (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Нужно учесть, что τ_γ также зависит от углов:

$$\frac{1}{\tau_\gamma} = \frac{1}{\tau_0}(1 + \Delta + \gamma\Delta' \cos \theta), \quad (7.28)$$

здесь Δ, Δ' — соответственно симметричная и антисимметричная часть времени рассеяния (не зависят от γ). Здесь, и в последующих формулах будем обозначать: $\tau'^{-1} = \tau_0^{-1}(1 + \Delta)$, $\tau''^{-1} = \tau_0^{-1}\gamma\Delta'$. Подставив теперь (7.28) в (7.27) получим систему из 4-х уравнений на вершину

$$\begin{aligned} v_F \Lambda_{2,\pm\gamma} &= 2\pi p_F^{\pm\gamma} \tau' \left[1 \pm \frac{1}{8\pi M \tau_0} (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) \right] \\ v_F \Lambda_{12,\pm\gamma} &= \pi p_F^{\pm\gamma} \tau'' \gamma \left[1 \pm \frac{1}{8\pi M \tau_0} (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) \right], \end{aligned} \quad (7.29)$$

в правой части знак $-$ между $\Lambda_{\pm\gamma}$ возникает из разложения матричного элемента $V_{\gamma\gamma'} = V_0^2/2(1 \pm \cos(\theta - \theta'))$. Берём полусумму и полуразность двух первых уравнений (7.29) и получаем

$$\begin{aligned} v_F (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) &= 2\pi\tau' [p_F^\gamma - p_F^{-\gamma}] + \frac{\tau'}{4M\tau_0} (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) (p_F^\gamma + p_F^{-\gamma}), \\ v_F (\Lambda_{2,\gamma} + \Lambda_{2,-\gamma}) &= 2\pi\tau' [p_F^\gamma + p_F^{-\gamma}] + \frac{\tau'}{4M\tau_0} (\Lambda_{2,\gamma} - \Lambda_{2,-\gamma}) (p_F^\gamma - p_F^{-\gamma}). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Решение этой системы

$$v_F (\Lambda_{2,\gamma} + \Lambda_{2,-\gamma}) = 4\pi M v_F \tau' + \frac{2\pi p_{so}^2 \tau'^2}{M v_F \tau_0 \left(1 - \frac{\tau'}{2\tau_0}\right)}. \quad (7.31)$$

Здесь использованы тождества

$$p_F^\gamma + p_F^{-\gamma} = 2M v_F, \quad p_F^\gamma - p_F^{-\gamma} = 2p_{so}.$$

Используем теперь известные Λ_2 для решения следующих двух уравнений; так как правые части уравнений имеют вид, почти аналогичный первым двум уравнениям (с добавлением общего множителя 2 и заменой $\tau' \rightarrow \gamma\tau''$), то решение, очевидно

$$v_F (\Lambda_{12,\gamma} + \Lambda_{12,-\gamma}) = 4\pi p_{so} \tau'' + \frac{2\pi p_{so} M v_F}{M v_F \tau_0 \left(1 - \frac{\tau''}{2\tau_0}\right)}. \quad (7.32)$$

Пренебрегая осциллирующими поправками (то есть заменяя τ на τ_0), можем выделить из решения также монотонный вклад в поляризационный оператор

$$v_F (\Lambda_\gamma + \Lambda_{-\gamma}) = 4\pi\tau_0 \left(v_F M + \frac{p_{so}^2}{v_F M} \right). \quad (7.33)$$

($\Lambda_{12,\gamma}$ не войдут в нулевое приближение после интегрирования по углу).

7.3 Дополнение 3. Регуляризация осцилляций

Из (4.13) видно, что неборновские поправки подавляют расходимость поправок к сопротивлению, рассмотрим детальнее, как это происходит.

Расходимость возникает на тех участках проволоки, где её радиус (плавно изменяющийся) таков, что удовлетворяется $2\pi(Q/\pi \pm \Phi/\Phi_0) \approx 2\pi N$, где N — целое, то есть, мы находимся на краю одномерной зоны. Но при этом расходимость АВ2 осцилляций появляется только когда $\Phi/\Phi_0 = Z$, где Z — целое, то есть расходятся обе зоны одновременно. Рассмотрим это, для простоты не выписывая спиновые индексы (в данном случае это не существенно). Поправка к плотности состояний:

$$\begin{aligned} \Delta(\phi_0, \phi_1) &= \frac{1}{\sqrt{p_F R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta} \cos(n\phi_0 - \pi/4) \cos n\phi_1}{\sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ S(\phi_0 + \phi_1 + i\delta) + S(\phi_0 - \phi_1 + i\delta) + e^{i\pi/4} S(-\phi_0 + \phi_1 + i\delta) + e^{i\pi/2} S(-\phi_0 - \phi_1 + i\delta) \right\}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

здесь $\phi_0 = 2\pi p_F R$, $\phi_1 = 2\pi\Phi/\Phi_0$, $\delta > 0$ — малый регуляризирующий множитель. Исходя из (3.24)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\delta\rho_{AB2}}}{\rho_0} \propto \overline{\Delta^2(\phi_0, \phi)} &= \int \frac{dR}{\Delta R \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{\Delta R^2}} \Delta^2(\phi_0, \phi) = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+m)\delta} \cos(n\phi_1) \cos(m\phi_1)}{\sqrt{nm}} \int \frac{dR}{\Delta R \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(R-R_0)^2}{\Delta R^2}} \cos(n\phi_1) \cos(m\phi) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\delta} \cos^2 n\phi_1}{n} = \frac{1}{4} S(2i\delta) + \frac{1}{8} \{ S(2\phi_1 + 2i\delta) + S(-2\phi_1 + 2i\delta) \}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Сумма S может быть вычислена аналитически

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n} = \frac{i(\pi - z)}{2} - \ln(2 \sin z/2). \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\delta\rho_{AB2}}}{\rho_0} \propto \frac{1}{4} S(2i\delta) + \frac{1}{8} \{ S(2\phi_1 + 2i\delta) + S(-2\phi_1 + 2i\delta) \} = \\ = \frac{i\pi + 2\delta}{4} - \frac{\ln(2i\delta)}{4} - \frac{\ln(\sin(\phi_1 + i\delta)) + \ln(\sin(-\phi_1 + i\delta))}{8} \approx \frac{1}{4} \left\{ \ln \frac{1}{\delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + \sin^2 \phi_1}} \right\}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Устремляя δ к 0 мы видим, что логарифмическая расходимость, не зависящая от магнитного поля, присутствует всегда (первое слагаемое), так как радиус проволоки плавно меняется и мы, двигаясь вдоль неё, периодически попадаем на участки с таким R , где плотность какой-то из одномерных зон расходится. Эта расходимость соответствует отброшенной бесконечной константе в (3.24). Осциллирующая поправка зависит от магнитного поля и почти везде меньше монотонной, за исключением случаев, когда $\phi_1 = \pi N$, в этих случаях мы будем наблюдать острые пики сопротивления. Это соответствует тому, что $\Phi/\Phi_0 = N$ и расходятся обе одномерные подзоны одновременно.

При $\phi_1 = \pi n$ неборновское приближение эквивалентно введению ненулевого δ . $\delta^{-1/2}$ — максимальное значения суммы S в этом случае (см. (4.4)), (оценку для δ мы уже получали ранее в (4.17) из условия малости перенормировки времени рассеяния).

7.4 Дополнение 4. Точная амплитуда рассеяния

Рассмотрим рассеяния на бесконечной плоскости на точечной примеси.

$$\Lambda(\theta) = \frac{V_0}{1 - V_0 g}, \quad (7.38)$$

$$g \equiv G(0, 0) = \nu_F^{(0)} \ln \left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{-k^2 + i\delta} \right) \quad (7.39)$$

$\delta \rightarrow 0$, $\tilde{\Lambda}$ — обрезка по импульсу, при $\Lambda \rightarrow \infty$ очевидно g расходится. Для устранения расходимости поступим обычным образом — перенормируем амплитуду рассеяния.

$$\frac{V_0(\Lambda)}{1 + \nu_F^{(0)} V_0(\tilde{\Lambda}) \ln \left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{-k^2 + i\delta} \right)} = \frac{V_0(\tilde{\Lambda})}{1 + \nu_F^{(0)} V_0(\tilde{\Lambda}) \left(\ln \frac{\tilde{\Lambda}^2}{\mu^2} + \ln \frac{\mu^2}{-k^2} \right)} = \left| 1 + \nu_F^{(0)} V_0(\tilde{\Lambda}) \ln \frac{\tilde{\Lambda}}{\mu} = \frac{V_0(\tilde{\Lambda})}{V_0(\mu)} \right| \rightarrow$$

$$\Lambda = \frac{\pi \nu_F^{(0)} V_0(\mu)}{1 + \nu_F^{(0)} V_0(\mu) \ln \frac{k}{\mu} + i\pi \nu_F^{(0)} V_0(\mu)}. \quad (7.40)$$

Очевидно, такая амплитуда удовлетворяет оптической теореме. Выбирая параметризацию $\Lambda = \lambda(\sqrt{1 - \lambda^2} + i\lambda)$ получим

$$\lambda = |f|, \quad \text{Re}[\Lambda] = |f|^2 \frac{1 + \nu_F^{(0)} V_0(\mu) \ln \frac{k}{\mu}}{\lambda^2}, \quad \text{Im}[\Lambda] = |f|^2. \quad (7.41)$$

Список литературы

- [1] S. La Shell, B.A. McDougall, and E.Jensen, Phys. Rev. Lett. 77, 3419 (1996)
- [2] Yu. M. Koroteev, G. Bihlmayer, J.E. Gayone, E.V. Chulkov, S.Blugel, P.M. Echenique, and Ph.Hofmann, Phys. Rev. Lett. 93, 046403 (2004)
- [3] P.Hoffman, Prog. Surf. Sci., 81: 191 (2006)
- [4] Dingle, R.B., 1952, Proc. R. Soc. London, Ser. A 212, 47.
- [5] A. Nikolaeva, D. Gitsu, L. Konopko, M.J. Graf, and T.E. Huber, Phys. Rev. B 77, 075332 (2008)
- [6] Б.П. Альтшулер, А.Г.Аронов, Б.З.Спивак, Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.2, стр. 101-103, Эффект Ааронова-Бома в неупорядоченных средах
- [7] A.G. Aronov, Yu. V. Sharvin, Rev. Mod. Phys. 59.755 Magnetic Flux Effects in disordered conductors
- [8] D.Yu.Sharvin and Yu.V.Sharvin, Magnetic flux quantization in cylindrical film of a normal metal, JETP Lett., 34, 272 (1981)
- [9] Abrikosov A.A., L.P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinskii, 1963, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics (Prentice-Hall, Englewood Cliffs)
- [10] A.S.Ioselevich, Pis'ma v ZhETF, vol.101, iss.5, pp. 390-395 (2015), Oscillation of magnetoresistance in clean hollow cylinder with fluctuating radius
- [11] Ю.В. Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин, 1989, Лекции по теории функции комплексного переменного (Москва, «Наука»)
- [12] Л.С.Левитов, А.В.Шитов, 2002, Функции Грина. Задачи с решениями (Москва, Физматлит)
- [13] E. Akkermans, G. Montambaux, 2007, Mesoscopic Physics of Electrons and Photons (Cambridge University Press)