

Московский Физико-Технический Институт  
Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра проблем теоретической физики

**Подавление сверхпроводимости в  
разупорядоченных пленках: диффузионный и  
баллистический вклады**

Диплом на соискание степени магистра

**Выполнил:**

студент 028 группы

Антоненко Д. С.

**Научный руководитель:**

д. ф.-м. н., доц.

Скворцов М. А.

Черноголовка, 2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Предварительная часть</b>	<b>6</b>
2.1	Квантовые поправки к проводимости . . . . .	6
2.2	Поправки Альтшулера-Аронова к плотности состояний . . . . .	7
2.3	Поправки Альтшулера-Аронова-Ли к проводимости . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Основная часть</b>	<b>10</b>
3.1	Диффузионный вклад . . . . .	13
3.2	Баллистический вклад . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Сравнение с экспериментом</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>18</b>
	<b>Приложение А. Баллистическая диффузионная лестница и блок Хиками</b>	<b>19</b>
	<b>Приложение В. Вычисления в неперенормированной теории</b>	<b>25</b>
V.1	Диффузионный вклад . . . . .	29
V.2	Баллистический вклад . . . . .	30
	<b>Приложение С. Отсутствие вклада диаграмм (c) — (h)</b>	<b>31</b>
C.1	Диаграммы (c) и (d) . . . . .	31
C.2	Диаграммы (e) и (f) . . . . .	32
C.3	Диаграмма (g) . . . . .	33
C.4	Диаграмма (h) . . . . .	33
	<b>Приложение D. Случай неточечного э-э взаимодействия</b>	<b>34</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>38</b>

# 1 Введение

Построение полноценной физической теории переходов сверхпроводник-(металл)-изолятор в неупорядоченных пленках — это одна из актуальных проблем современной физики конденсированного состояния. В этой работе мы изучаем один из ее аспектов — понижение критической температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$  в *однородно разупорядоченных* металлических пленках, вызванное отталкивательным электрон-электронным (э-э) взаимодействием, эффект которого усилен наличием беспорядка в системе. Экспериментально варьируемыми параметрами являются толщина пленки  $d$  и длина свободного пробега  $l$  (для упругого рассеяния электронов), причем изменение  $d$  влияет на  $l$ , и зачастую нет возможности контролировать эти величины независимо.

В первых работах, посвященных данной проблеме [3–7] был найден пертурбативный *диффузионный* вклад, проистекающий от комбинированного влияния беспорядка и электрон-электронного взаимодействия. Расчеты были выполнены в *двумерной* модели, применимой при толщинах пленки  $d \lesssim l$ , и привели к следующему выражению:

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{6\pi g} \ln^3 \frac{1}{T_{c0}\tau}, \quad (1)$$

где  $g = (2\pi\hbar/e^2)R_{\square}^{-1} \gg 1$  — безразмерный кондактанс пленки ( $R_{\square}$  — сопротивление пленки “на квадрат”),  $T_{c0}$  — критическая температура в чистом ( $g \rightarrow \infty$ ) материале,  $\delta T_c$  — ее сдвиг,  $\lambda$  — численный коэффициент, характеризующий отталкивательное э-э взаимодействие ( $\lambda = 1$  для экранированного кулоновского взаимодействия),  $\tau$  — время рассеяния электрона на примесях, а  $e$  — заряд электрона.

Логарифмический характер пертурбативных поправок (связанный с тем, что решалась двумерная задача), позволяет продвинуться дальше и применить метод ренорм-группы, что было сделано в известных работах Финкельштейна [8,9]. Это позволило получить ответ в той области параметров, в которой рассматриваемый эффект уже не является слабым (вплоть до полного подавления сверхпроводимости). В этих работах было получено следующее выражение:

$$\ln \frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma g} \ln \frac{\gamma + \gamma g}{\gamma - \gamma g}, \quad (2)$$

где  $\gamma_g = 1/\sqrt{2\pi g}$ , а безразмерный параметр  $\gamma$  определен как

$$\gamma^{-1} = \ln \frac{1}{T_{c0}\tau}. \quad (3)$$

В пределе  $g \rightarrow \infty$ , уравнение (2) воспроизводит пертурбативное выражение (1).

В статье [9] теоретическое предсказание (2) было применено для объяснения экспериментальных данных по зависимости  $T_c$  от  $R_{\square}$  в молибден-германиевых (MoGe) пленках [10]. С тех пор фиттирование экспериментальных зависимостей  $T_c(R_{\square})$  уравнением (2) стало широко распространенным [11, 14–20]. При этом коэффициент  $\gamma$ , как правило, рассматривается, как подгоночный параметр, а типичные значения  $\gamma^{-1}$  принимают значения около 7 – 11. С другой стороны экспериментально исследуемые пленки являются сильно разупорядоченными и

приближаются к переходу в непроводящее состояние ( $k_F l \rightarrow 1$ ). Учитывая то, что типичные значения толщины  $d$  лежат в диапазоне 5 – 100 нм, немедленно приходим к выводу, что  $l \ll d$ . (Подробнее см. таблицу 1 в разделе 4) Это неравенство означает, что логарифмы в уравнениях (1) и (3) должны быть иными. Учитывая то, что эти формулы отражают вклад двумерных диффузионных мод, логично ожидать, что ультрафиолетовой обрезкой логарифма должно быть не обратное время упругого рассеяния  $1/\tau$ , а энергия Таулесса  $E_d = \hbar D/d^2$ , отвечающая толщине пленки  $d$  при коэффициенте диффузии  $D$  [29] (о чем упоминается также в работе Финкельштейна [9]). Доказательство этого утверждения содержится в разделе 3. Таким образом, в экспериментально актуальном пределе  $d \gg l$  параметр  $\gamma$  должен быть переопределен, как

$$\gamma^{-1} = \ln \frac{E_d}{T_{c0}}. \quad (4)$$

Так как  $E_d = (l/d)^2/\tau \ll 1/\tau$ , уменьшение логарифма при таком переопределении (по сравнению с исходным значением (3)) является существенным (примерно в 2 раза). Это приводит к изменению на порядок в теоретически ожидаемом коэффициенте в уравнении (1), что означает, что это выражение (в случае, если  $\gamma$  не считается свободным параметром) дает значительно заниженную оценку для вклада рассматриваемого эффекта в сдвиг  $T_c$  в реальных сверхпроводящих пленках. Более того, в рамках обычной версии теории Финкельштейна (без учета влияния триплетного канала),  $T_c$  зависит только от кондактанса пленки  $g$ , что противоречит современным экспериментальным данным [11]. Таким образом, внимательное рассмотрение показывает, что теория Финкельштейна не описывает большинство экспериментов корректным образом. Поэтому, первой целью настоящей работы является аккуратное вычисление рассматриваемого эффекта в реальной трехмерной геометрии, в которой толщина пленки  $d > l$ .

Следующим этапом настоящего исследования служит рассмотрение эффектов, лежащих за рамками диффузионного приближения. Мотивация к этому заключается в том, что в ряде случаев существенный вклад в физические величины дают не только диффузионные вклады (отвечающие в диаграммной технике лестничным диаграммам с обрезкой на  $1/l$  для импульса, переносимого диффузионной модой), но и другие, которые мы называем баллистическими. Так, в работе [24] было показано, что поправка к проводимости в теории возмущений по  $1/(k_F l)$  имеет вид:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{2\pi}{3} \frac{1}{k_F l} - \frac{\pi^2 - 4 \ln k_F l}{8} \frac{1}{(k_F l)^2} + \dots, \quad (5)$$

где опущенные  $O(1/(k_F l)^2)$  члены формально отвечают слаболокализационной поправке с ультрафиолетовой обрезкой на границе диффузионного приближения  $q \sim 1/l$ . Поэтому и в нашем исследовании мы изучим эту область параметров, вклад от которой окажется самым существенным в большинстве экспериментальных ситуаций. Необходимость подобного исследования упоминается в работе [13].

Итак, целью данной работы является последовательное изучение различных пертурбативных ( $\delta T_c \ll T_0$ ) вкладов в эффект понижения критической температуры сверхпроводя-

щей пленки э-э отталкиванием и беспорядком ( $1/(k_F l) \ll 1$ ) с учетом реальной трехмерной геометрии и с рассмотрением вкладов от всех возможных областей импульса (переносимого э-э взаимодействием). Мы будем работать при следующих предположениях о соотношении между энергетическими масштабами:

$$T_c < E_d < \omega_D < \tau^{-1} < E_F, \quad (6)$$

где  $\omega_D$  — энергия Дебая, которая служит в нашей модели обрезкой по энергии для фононного механизма притяжения электронов.

Главным результатом нашей работы является вычисление лидирующих вкладов в сдвиг  $T_c$ :

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{6\pi g} \ln^3 \frac{E_d}{T_{c0}} - \frac{\alpha}{k_F l}, \quad (7)$$

где первый член отвечает стандартному двумерному диффузионному вкладу, происходящему от самых маленьких импульсов, переносимых линией взаимодействия, а второй — баллистическому трехмерному вкладу самых больших импульсов ( $\sim k_F$ ). Здесь  $\alpha \sim 1$  — численный коэффициент. Безразмерный кондактанс  $g = (2/3\pi)(k_F l)(k_F d)$  при трехмерном диффузионном движении электронов в пленке с коэффициентом диффузии  $D = v_F l/3$ . В модели слабого точечного отталкивательного взаимодействия мы получим:

$$\alpha = \frac{\pi \lambda \ln^2 \omega_D / T_c}{(1 + \lambda \ln E_F / \omega_D)^2}. \quad (8)$$

Исследование влияния неточности взаимодействия (см. Приложение D) свидетельствует о том, что пока взаимодействие размыто на масштабе  $\sim 1/k_F$ , результат (7) остается верным с точностью до численного множителя. Таким образом, для сильно неупорядоченных пленок с кулоновским взаимодействием (заэкранированным на радиусе  $\sim 1/k_F$ ) электронов ожидается  $\alpha \sim 1$ .

Здесь и далее  $k_B = \hbar = 1$ .

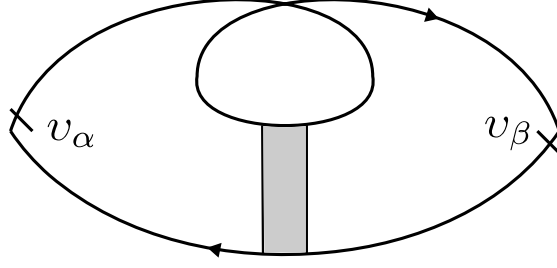


Рис. 1: Диаграмма, отображающая слаболокализационный вклад в проводимость  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

## 2 Предварительная часть

### 2.1 Квантовые поправки к проводимости

Одним из первых изученных квантовых явлений мезоскопической физики, выявляющим роль лестничных диаграмм как диффузионных электронных мод, является замечательный эффект слабой локализации [22, 23]. Он представляет собой квантовую поправку к проводимости  $\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\sigma$ , связанную с интерференционными эффектами и описываемую диаграммой, представленной на Рис. 1. Аналитические выражения для вклада диффузионной области в проводимость на нулевой частоте имеют вид в соответствующих размерностях:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{1}{\pi\nu} \int_{1/L_\varphi}^{1/l} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{Dq^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k_F l} \ln \frac{L_\varphi}{l}, & (2D), \\ -\left[ \frac{\#}{(k_F l)^2} - \frac{\#}{(k_F L_\varphi)^2} \right], & (3D), \end{cases} \quad (9)$$

где ультрафиолетовая обрезка  $1/l$  является границей применимости диффузионного приближения, а  $L_\varphi$  — инфракрасная обрезка, которая обычно определяется длиной сбой фазы или размером образца. Обратим внимание, что в трехмерном случае интеграл по импульсам в (9) набирается с верхнего предела диффузионной области, и соответствующий вклад имеет вид  $\propto 1/(k_F l)^2$ .

В работе [24] было показано, что в трехмерной геометрии имеются вклады в  $\delta\sigma$ , происходящие из баллистической области (импульсы, большие  $1/l$ ). Эти вклады являются большими (9) по параметру  $1/(k_F l)$ . Им соответствуют диаграммы, изображенные на Рис. 2. Вычисление приводит к следующему результату:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma_0} = -\frac{2\pi}{3} \frac{1}{k_F l} - \frac{\pi^2 - 4 \ln k_F l}{8} \frac{1}{(k_F l)^2} + \dots, \quad (10)$$

$O(1/(k_F l)^2)$  члены соответствуют слаболокализационной поправке. Как правило, экспериментально наблюдаемой является лишь часть выражения (9), зависящая от  $L_\varphi$ , несмотря на то, что она может быть не самой большой по абсолютной величине. Тем не менее, лидирующий ( $\propto 1/(k_F l)$ ) вклад происходит от баллистической области  $q \sim k_F$ , а следующий за ним

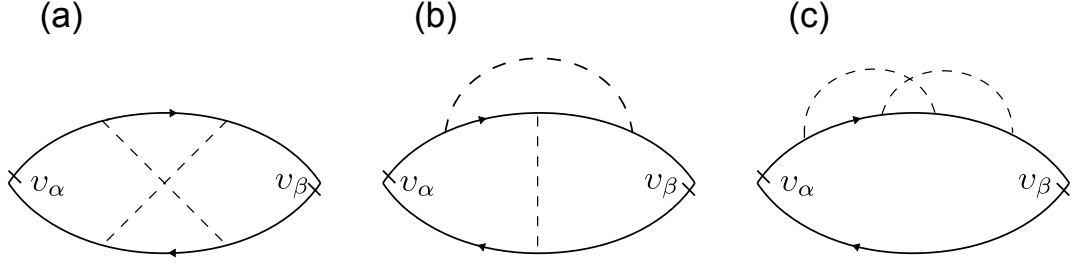


Рис. 2: Диаграммы, отображающие баллистический вклад в проводимость  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

— от области  $1/l < q < k_F$ . Это служит мотивацией для изучения вклада баллистической области и в нашем исследовании критической температуры сверхпроводящих пленок, что сделано в разделе 3.2.

## 2.2 Поправки Альтшулера-Аронова к плотности состояний

Одно из первых исследований совместных эффектов э-э взаимодействия и беспорядка в диффузионной области было проведено в работах Альтшулера и Аронова ([25, 26]), где были вычислены поправки к плотности состояний  $\nu$  вблизи энергии Ферми от рассматриваемого эффекта.<sup>1</sup> Плотность состояний определяется мнимой частью функции Грина, поправки к собственно-энергетической части которой (в первом порядке теории возмущений) представлены на Рис. 3. Аккуратный расчет при  $T \ll 1/\tau$  с учетом экранировки кулоновского взаимодействия на радиусе  $1/\kappa = 1/\sqrt{4\pi e^2 \nu_3}$  в 3D и  $1/\kappa_2 = 1/(2\pi e^2 \nu_2)$  в 2D, а также перенормировки в куперовском канале дает [26]:

$$\delta\nu(\epsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi^2 D} \left\{ \ln(|\epsilon|\tau) \ln \left[ \frac{(1 + \frac{F}{2})^3}{D\kappa_2^2} \sqrt{\epsilon\tau} \right] - 2 \ln \frac{\ln T_c \tau}{T_c/|\epsilon|} \right\}, & (2D), \\ -\frac{\sqrt{|\epsilon|}}{2\sqrt{2}\pi^2 D^{3/2}} \left[ 1 - 3 \left( \sqrt{1 + \frac{F}{2}} - 1 \right) - \frac{1}{\ln T_c/|\epsilon|} \right], & (3D), \end{cases} \quad (11)$$

где  $\epsilon$  — отстройка от уровня Ферми, а  $T_c = \omega_D e^{-1/\lambda_{\text{вс}}}$  — температура сверхпроводящего перехода при его наличии (формула верна при  $T_c \ll T \ll 1/\tau$ ), а при его отсутствии это формальный параметр  $T_c = E_F e^{1/\lambda}$ , где  $\lambda$  — затравочная константа взаимодействия в куперовском канале. Фактор  $F$  характеризует относительную величину хартриевского вклада и для трехмерных систем (а также для пленок) равен:

$$F = \frac{2}{x^2} \log(1 + x^2), \quad x = \frac{2k_F}{\kappa}. \quad (12)$$

Для слабого взаимодействия  $\kappa \ll k_F$  и  $F \ll 1$ .

<sup>1</sup>В области сильной локализации данный эффект приводит к образованию кулоновской щели в плотности состояний, которая обращается в ноль строго на энергии Ферми.

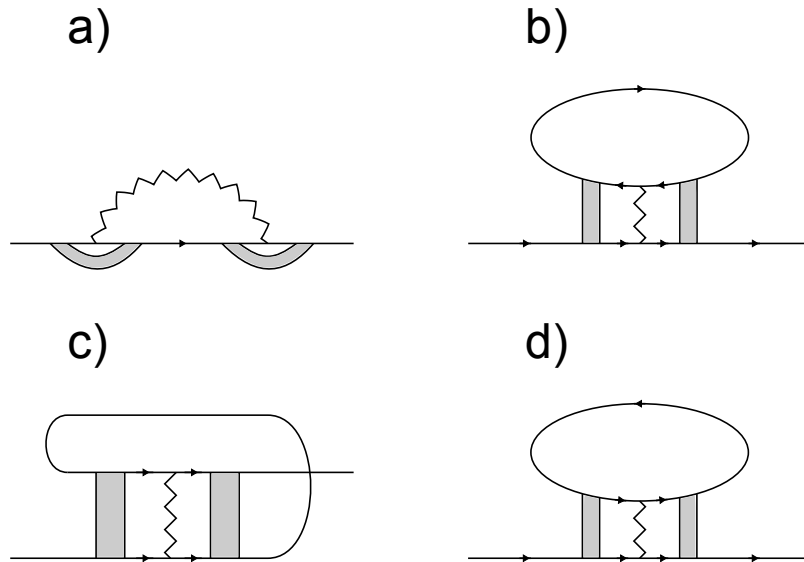


Рис. 3: Диаграммы, отображающие поправки Альшулера-Аронова к плотности состояний вблизи энергии Ферми [26]. (a) и (c) — обменные диаграммы (вклад Фока) в диффузионном и куперовском каналах, соответственно; (b) и (d) — вклад Хартри в диффузионном и куперовском каналах, соответственно.

### 2.3 Поправки Альтшулера-Аронова-Ли к проводимости

В работах [25,27] было изучено совместное влияние э-э отталкивания и беспорядка на проводимость в диффузионной области (см. также [26]). Соответствующие вклады в коррелятор ток-ток даются диаграммами, изображенными на Рис. 4.



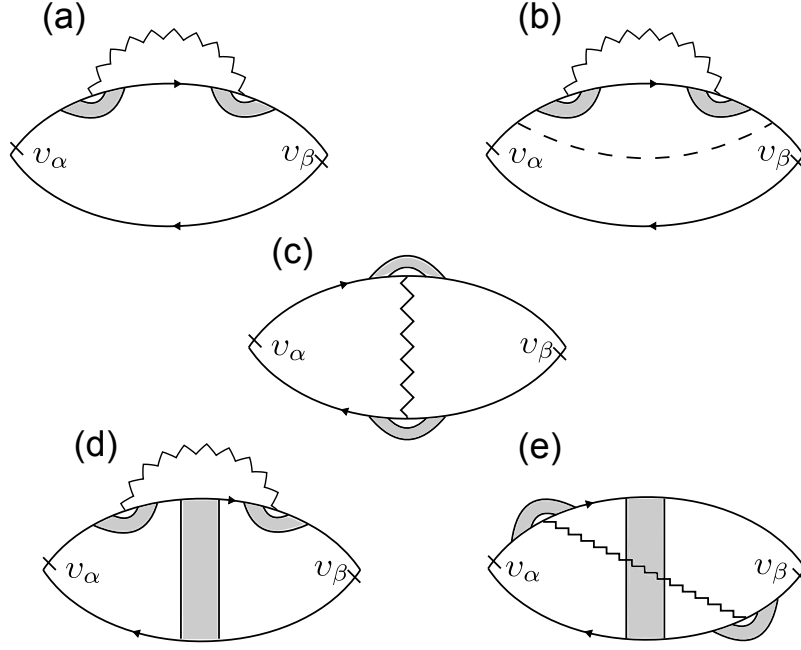


Рис. 4: Диаграммы, отображающие поправки Альтшулера-Аронова-Ли к проводимости  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta}$  от э-э взаимодействия в разупорядоченных системах. Изображены вклады в коррелятор ток-ток. У некоторых диаграмм имеются симметричные аналоги.

Лидирующий вклад дают диаграммы, содержащие наибольшее количество диффузионных лестниц. В нашем случае это — диаграммы (d) и (e), содержащие три диффузона. Диаграммы (a) — (c) содержат только два диффузона, а помимо этого они полностью сокращаются друг с другом. Вычисление при температуре  $T$  дает [26]:

$$\delta\sigma = \frac{e^2}{2\pi^2} \begin{cases} \ln T\tau, & (2D), \\ 0.61\sqrt{\frac{T}{\hbar D}}, & (3D). \end{cases} \quad (13)$$

В работе [28] полученные результаты были обобщены на случай  $T\tau \gtrsim 1$ . При этом возникала необходимость рассматривать не только диффузионные лестничные диаграммы, но и баллистические (отвечающие рассеянию на одной примеси). Это служит еще одной мотивацией к рассмотрению баллистического режима (см. Раздел 3.2). Также в этой работе содержится красивая физическая интерпретация рассматриваемого эффекта, как дифракции электронов на осцилляциях Фриделя, вызванных наличием примесей.

### 3 Основная часть

В этом разделе мы излагаем суть настоящей работы — вычисление в реальной трехмерной геометрии пленки вкладов различных областей параметров (диффузионного и баллистического) в сдвиг температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$ , вызванное совместным влиянием э-э отталкивания и беспорядка. С целью упрощения понимания здесь предлагается более прозрачный и физически понятный вывод, некоторые аспекты которого, однако, могут показаться не вполне убедительными. Более строгое (но менее компактное) вычисление, приводящее к тем же результатам, находится в Приложении В, как и доказательство некоторых утверждений, приведенных бездоказательно в настоящем разделе.

Мы рассматриваем модель сверхпроводника с гамильтонианом  $H = H_0 + H_{ee} + H_{ph} + H_{dis}$ . Предполагается, что гамильтониан свободных электронов  $H_0$  имеет изотропную дисперсию,  $H_{ph}$  описывает притяжение, связанное с обменом фононом, имеющее потенциал  $V_{ph}(\mathbf{r}) = -(\lambda_{ph}/2\nu)\delta(\mathbf{r})$  и действующее в полосе энергий шириной  $\omega_D$ , прилегающей к энергии Ферми, наконец,  $H_{ee}$  — слабое точечное э-э отталкивание с потенциалом  $V(\mathbf{r}) = (\lambda/2\nu)\delta(\mathbf{r})$ . Беспорядок ( $H_{dis}$ ) описывается гауссовым ансамблем потенциала  $U(r)$  с коррелятором  $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2\pi\nu\tau$ . Здесь  $\nu$  — плотность состояний на уровне Ферми в расчете на одну проекцию спина, а  $\tau$  — время рассеяния на примесях.

В отсутствие беспорядка, критическая температура описывается обычным соотношением теории БКШ:

$$T_{c0} = \omega_D \exp(-1/\lambda_{BCS}), \quad (14)$$

где эффективная константа связи дается следующим выражением [31–33]:

$$\lambda_{BCS} = \lambda_{ph} - \frac{\lambda}{1 + \lambda \log E_F/\omega_D}. \quad (15)$$

Здесь последний член носит название кулоновского псевдопотенциала (имеется также выражение “толмачевский логарифм” в отечественной литературе). Он учитывает э-э отталкивание, которое логарифмически подавляется благодаря перенормировке в куперовском канале. Вывод этого выражения приведен в Приложении В.

В приближении среднего поля система описывается гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_{ee} + H_{dis} - \lambda_{BCS} \int d\mathbf{r} (\Delta^\dagger \psi_\uparrow(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r}) + \text{h.c.}), \quad (16)$$

где  $\lambda_{BCS}$  по-прежнему дается выражением (15). Этот гамильтониан следует понимать, как задающий эффективную теорию на энергиях, меньших  $\omega_D$ . При таком подходе не следует учитывать такие эффекты от  $H_{int}$ , которые уже учтены во вкладе перенормированной  $\lambda$  в эффективную константу связи  $\lambda_{BCS}$  [см. (15)]. (В приложении В приведено вычисление в перенормированной теории, которое является более строгим и более громоздким). Сверхпроводящий параметр порядка определяется следующим условием самосогласования:  $\Delta = \langle \psi_\uparrow \psi_\downarrow \rangle$ . Раскладывая правую часть по степеням  $\Delta$  до первого порядка, мы получаем

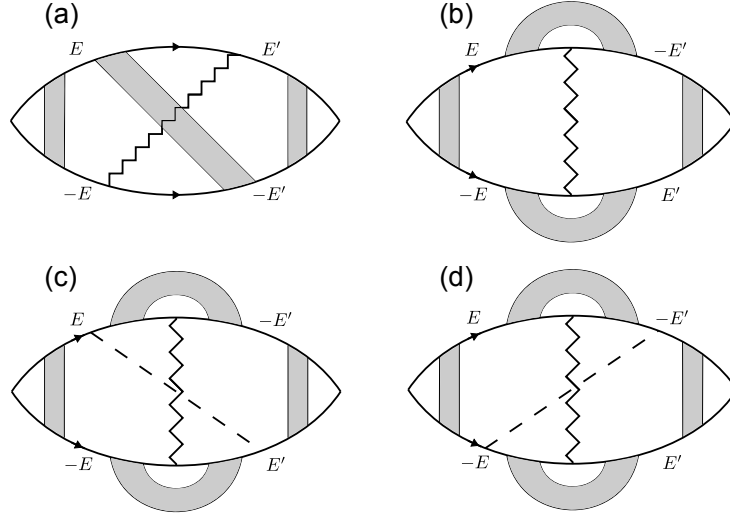


Рис. 5: Диаграммы, дающие ведущий диффузионный вклад в сдвиг  $T_c$  [у диаграммы (а) есть симметричный аналог]. Затененные блоки обозначают купероны и диффузоны. В диффузионной области наличие диффузонов и куперонов требует различных знаков энергий  $E$  и  $E'$ .

уравнения, определяющее критическую температуру:

$$\lambda_{\text{BCS}}^{-1} = -\Pi/\nu, \quad (17)$$

где  $\Pi$  — куперовская восприимчивость, вычисленная на нулевом импульсе.

$$\Pi = \int d\mathbf{r} \int^{1/T} d\tau \langle \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}(0, 0) \psi_{\downarrow}(0, 0) \rangle. \quad (18)$$

Интеграл по мнимому времени  $\tau$  должен быть ультрафиолетово регуляризован, что в энергетическом представлении мацубаровской диаграммной техники соответствует обрезке по энергии на  $\omega_D$  для тех функций Грина, которые примыкают к концам диаграмм. На этом этапе также предполагается усреднение по беспорядку, которое мы выполняем в пунтирной диаграммной технике [21]. В отсутствие беспорядка, куперовская восприимчивость равна

$$\Pi_0 = \nu \ln(\omega_D/T), \quad (19)$$

что при подстановке в (17) приводит к выражению (14) для критической температуры.

Рассмотрим изменения, возникающие при наличии разупорядочения в системе. Теорема Андерсона говорит о том, что в отсутствие э-э отталкивания потенциальный беспорядок не влияет на  $T_c$  в ведущем порядке по  $1/(k_F l)$ , что связано с тем, что интеграл от пары функций Грина  $G_E G_{-E}$  по импульсам не меняется при усреднении по беспорядку. Однако, при наличии э-э отталкивания возникают заметные поправки к  $\Pi_0$ . В ведущем порядке поправка  $\delta\Pi$  приводит к сдвигу  $T_c$  вида:

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{1}{\nu} \delta\Pi. \quad (20)$$

Мы будем изучать эти поправки с помощью мацубаровской диаграммной техники для теории возмущений по параметру  $1/(k_F l)$ , обозначая примесную линию пунктиром, линию взаимодействия зигзагом, а купероны и диффузоны — затененными блоками. Не следует рассматривать диаграммы, содержащие лестницы линий взаимодействия, не пересеченных куперонами или диффузонами, так как они описывают перенормировку  $\lambda$  и уже учтены в (15).

Диаграммы, дающие ведущий *двумерный диффузионный* вклад (1) представлены на Рис. 5. Они были рассмотрены в работах [4–9], где было также показано, что упругие диаграммы (линия взаимодействия не соединяет верхнюю и нижнюю функции Грина) того же порядка не дают вклада в лидирующий член. Рассмотрим здесь эти диаграммы за рамками диффузионной области (которая есть  $q \ll 1/l$  и  $E, E' \ll 1/\tau$ , где  $q$  — импульс, переносимый линией взаимодействия), для того, чтобы проследить кроссовер в баллистическую область.

В диффузионной области есть условие на знаки энергий:  $E, E' > 0$  или  $E, E' < 0$  (в противном случае при вычислении одной ступеньки диффузионной лестницы “интегрированием по  $\xi$ ” полюса функций Грина оказываются с одной стороны действительной оси и результат получается гораздо меньшим). В баллистической области подобное ограничение отсутствует.

Начнем рассмотрение с диаграммы (а) Рис. 5. При  $E, E' > 0$  или  $E, E' < 0$  она дает [см. (20)] следующий вклад в сдвиг  $T_c$ , которое получается взятием “по  $\xi$ ” интегралов по импульсам  $p_i$  от соответствующих блоков, образованных функциями Грина (мы не предполагаем  $q \ll 1/l$  и  $E, E' \ll 1/\tau$ , однако все же берем  $q \ll k_F$ ):

$$\frac{\delta T_c^{(a)}}{T_{c0}} = -\frac{2\pi\lambda}{\nu} T^2 \sum_{E, E' > 0}^{\omega_D} \frac{I^{(a)}(E, E')}{EE'}, \quad (21)$$

где  $I$  в геометрии пленки выражается через двукратный интеграл по составляющим импульса  $q_{\parallel}$ , лежащим в плоскости пленки, и сумму по поперечной компоненте импульса  $q_z = 2\pi m/d$  ( $m$  целые):

$$I^{(a)}(E, E') = \frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{dq_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E + E')^2}{1 - f_q(E + E')}, \quad (22)$$

где

$$f_q(E) = (ql)^{-1} \arctan \left[ \frac{ql}{1 + |\omega|\tau} \right], \quad (23)$$

а  $q^2 = q_{\parallel}^2 + q_z^2$ . Выражение  $f_q(E)$  представляет собой одну ступень диффузионной лестницы, вычисленную при произвольном соотношении между  $q$  и  $1/l$  (см. Приложение А). Суммирование всей лестницы дает  $1/[2\pi\nu\tau(1 - f)]$ . При взятии интеграла по импульсам от каждого Хиками блока из 3-х функций Грина также возникает  $f$ , итого  $f^2$  в числителе (22). Множители  $1/(EE')$  в этом же выражении берут начало от двух боковых куперонов. Отметим также, что в выражениях для треугольных блоков Хиками возникают множители  $1/(1 + (E + E')\tau)$ , которые сокращаются с множителями  $1 + (E + E')\tau$ , происходящими от участков диаграмм, содержащих концевые купероны (при этом для аккуратного вычисления нужно также учесть диаграммы, в которых в этих участках нет ни одного пунктира).

Учет остальных диаграмм (b) – (d) требует вычисления баллистического блока Хиками из 4-х функций Грина (что сделано в Приложении А) и приводит к общему выражению, которое имеет вид (21), где вместо  $I^{(a)}$  стоит

$$I(E, E') = \frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E + E')^2}{1 - f_q(E + E')} [3 - f_q(E + E')]. \quad (24)$$

Начнем с изучения вклада диффузионной области.

### 3.1 Диффузионный вклад

Сперва изучим вклад в  $I(E, E')$ , проистекающий из диффузионной области

$$q < 1/l, \quad E, E' < 1/\tau. \quad (25)$$

В этой области  $f_q(\omega) \approx 1$  и  $1 - f_q(\omega) \approx \tau(Dq^2 + \omega)$ . Тогда (24) сводится к выражению

$$I^{(\text{diff})}(E, E') = \frac{2}{d} \sum_{q_z} \int^{1/l} \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{1}{Dq^2 + E + E'}. \quad (26)$$

Суммируя по дискретным частотам  $q_z$  и затем интегрируя по  $\mathbf{q}_{\parallel}$  до  $q_{\parallel} \sim 1/l$ , мы получаем:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} I^{(\text{diff})}(E, E') &= \frac{1}{D} \int^{1/l} \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{1/l} (d^2\mathbf{q}_{\parallel}) \frac{\text{cth} \frac{d}{2} \sqrt{q_{\parallel}^2 + (E + E')/D}}{\sqrt{q_{\parallel}^2 + (E + E')/D}} = \\ &= \frac{\#}{Dl} - \frac{1}{\pi d D} \log \sinh \frac{d}{2} \sqrt{\frac{E + E'}{D}}, \end{aligned} \quad (27)$$

где численный коэффициент  $\# \sim 1$  связан с верхней обрезкой диффузионной области. Обычный двумерный вклад, содержащий множитель  $\log^3$ , проистекает от области, в которой обе энергии меньше энергии Таулесса на толщине пленки ( $E_1, E_2 < E_d$ )<sup>3</sup>

$$\frac{\delta T_c^{(\text{diff}, 2D)}}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{4(k_F l)(k_F d)} \ln^3 \frac{4E_d}{T_{c0}}. \quad (28)$$

Хочется подчеркнуть, что мы получили  $\ln^3(E_d/T_{c0})$  вместо широко используемого  $\log^3(1/T_{c0}\tau)$  [см. (1)], что связано с тем, что в наших предположениях (6)  $l \ll d$ .

Помимо этого, наблюдаем наличие других членов, наличие которых связано с трехмерной геометрией пленки. Они не будут содержать третью степень логарифма, но могут быть больше

<sup>2</sup>Несколько несамосогласованным является то, что мы не обрезаем суммирование по  $q_z$  на  $1/l$ . Это, однако, не скажется на двумерном вкладе (28), который набирается с энергиями  $E, E' < E_d$ . Что же касается вклада (29), проистекающего от верхней обрезки на  $1/\tau$ , то мы ограничиваемся размерными множителями и не стремимся определить численный коэффициент, см. Приложение В.

<sup>3</sup>При формальном вычислении в (28) получается  $\log 4E_d/T_{c0}$ . Однако, численный множитель 4 под логарифмом представляет собой часть вклада, пропорционального  $\log^2 E_d/T_{c0}$ , который мы не вычисляли в связи с тем, что он не является ведущим. Таким образом, оставление 4 в (28) было бы превышением точности.

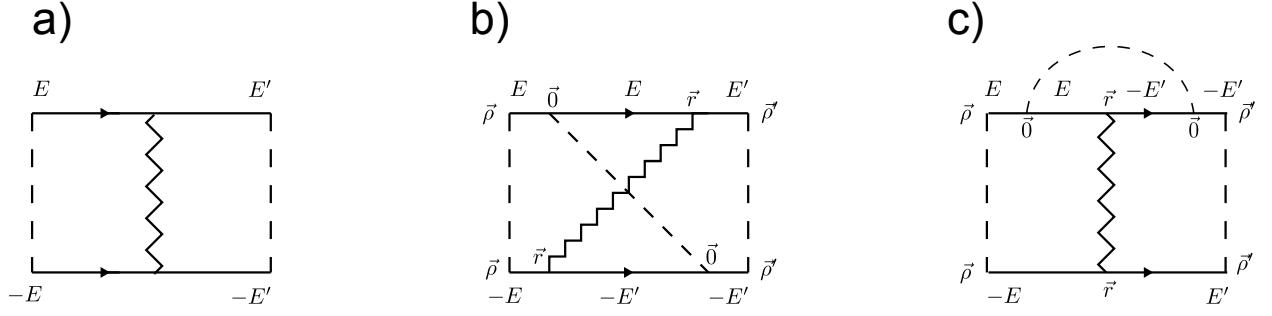


Рис. 6: Диаграммы, дающие баллистические поправки к отталкивательной вершине  $\lambda$ . У обеих диаграмм есть симметричные аналоги. Концевые примесные линии не включаются в определение диаграммы.

вклада (28) благодаря множителю  $d/l$ . В частности, из первого члена в (27) получаем вклад верхней границы диффузионной области:

$$\frac{\delta T_c^{(\text{diff}, 3\text{D})}}{T_{c0}} = -\frac{\#\lambda}{(k_F l)^2} \ln^2 \frac{\omega_D}{T_{c0}}. \quad (29)$$

Этот вклад происходит от области больших импульсов (но все еще  $q < 1/l$ ) и является мотивацией для изучения еще больших импульсов  $q > 1/l$ , к исследованию которых мы и переходим.

### 3.2 Баллистический вклад

В этом разделе мы изучим *баллистический* вклад. Часть этого вклада дается выражениями (21) и (24) за рамками области (25), другая же получается из тех же диаграмм с Рис. 6 рассмотрением случая противоположных знаков энергий  $E$  и  $E'$ . В баллистической области  $f_q(E + E') \sim 1/(ql)$  (либо  $\sim 1/[(E + E')\tau]$  для больших энергий). Поэтому в диффузионных лестницах на соответствующих диаграммах первый член (с одной примесной линией) является доминирующим и мы оставим только его, что физически соответствует вкладу от рассеяния на одной примеси. Вклад упругих диаграмм по-прежнему зануляется в ведущем порядке, доказательство этого факта приведено в Приложении С. Интеграл (24) ультрафиолетово расходится, так что обрезав его на  $\Lambda \sim k_F$  (что является простейшей моделью зоны конечной ширины) мы получили бы вклад  $\propto 1/(k_F l)$ . Однако в настоящем формализме, использующем псевдопотенциал (15) и представляющим собой эффективную теорию (16) куперовского канала на энергиях  $E, E' \lesssim \omega_D$ , аккуратное вычисление, дающее логарифмические перенормировочные множители в формуле (8), невозможно, ибо баллистический вклад возникает на всех энергиях вплоть до фермиевской. Один из способов решить эту проблему состоит в вычислении в неперенормированной теории, этот способ излагается в Приложении В. Другой, более простой и физически наглядный (но менее строгий) способ излагается

ниже.

Баллистический вклад может быть корректно описан, если рассматривать его, как поправку к голой (неперенормированной) константе отталкивательного взаимодействия  $\lambda$ , см. Рис. 6. При этом важно, что рассматривается куперовский канал, а именно, куперовская восприимчивость на нулевом импульсе и частоте. Также важно, что блоки, описывающие поправки к  $\lambda$  присоединяются к примесной линии, которая является точечной в координатном представлении. При всех этих условиях, диаграммы с Рис. 6 можно эффективно учесть, вводя добавку  $\delta\lambda$  к константе взаимодействия вида

$$\frac{\delta\lambda(E, E')}{\lambda} = 2 \frac{(b) + (c)}{(a)} = \frac{2[P(E, E') + P(E, -E')]}{(2\pi\nu\tau)^2 f_0(E) f_0(E') \lambda}, \quad (30)$$

где члены в скобках соответствуют диаграммам (b) и (c), соответственно, а дополнительный множитель 2 возник из-за учета диаграмм, симметричных к (b) и (c). Эти диаграммы удобно вычислять в координатном представлении.

Так как и примесные линии, и э-э отталкивание являются точечными, имеем всего одно интегрирование по радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , соединяющему примесь и точку, в которой происходит э-э взаимодействие (см. Рис. 6) и мы получаем для  $P(E, E')$ :

$$P = \frac{\lambda/2}{2\pi\nu\tau} \int d\mathbf{r} G_+ G'_- [G_+ G_-] [G'_+ G'_-], \quad (31)$$

где усредненные по беспорядку функции Грина  $G_{\pm} = G_{\pm iE}(r)$ , а штрих относится к зависимости от энергии  $E'$ . Было также введено обозначение:

$$[G_+ G_-] = \int G_+(\boldsymbol{\rho}) G_-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}. \quad (32)$$

Так как интеграл по  $\mathbf{r}$  в (31) сходится на масштабе  $1/k_F$  [см. (35)], мы можем использовать следующее приближение, корректное при  $r \ll l$  и  $E, E' \ll E_F$ :

$$G_{\pm} \approx -\pi\nu \frac{e^{\pm ik_F r}}{k_F r}, \quad [G_+ G_-] = \frac{2\pi\nu\tau}{1 + 2E\tau} \frac{\sin k_F r}{k_F r}. \quad (33)$$

Для разных знаков энергии  $E$  и  $E'$  в выражение для  $P$  войдет интеграл

$$P(E, E')|_{EE' < 0} \propto \int d\mathbf{r} \frac{e^{\pm 2ik_F r}}{(k_F r)^2} \left( \frac{\sin k_F r}{k_F r} \right)^2 + \text{c.c.} = \frac{1}{k_F^3} 4\pi \ln 2 \times i + \text{c.c.} = 0. \quad (34)$$

Таким образом, получаем  $P(E, E') \propto \theta(EE')$ . Тогда, подставляя выражение (33) в уравнение (31) и, затем, в (30), мы замечаем, что множители  $(1 + 2E\tau)$  в знаменателе  $G_+ G_-$  [уравнение (33)] сокращают такие же множители в числителе уравнения (30), так что  $\delta\lambda(E, E')$  перестает зависеть от энергии:

$$\delta\lambda = \frac{\pi\nu\lambda}{2\tau} \int \frac{d\mathbf{r}}{(k_F r)^2} \left( \frac{\sin k_F r}{k_F r} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{k_F l}. \quad (35)$$

Эта поправка к  $\lambda$ , вызванная наличием беспорядка, увеличивает вклад кулоновского псевдопотенциала в константу связи БКШ (15) и уменьшает критическую температуру. Считая

эту поправку малой, дифференцируя (15) по  $\lambda$ , а (14) по  $\lambda_{\text{VCS}}$ , получаем ведущий баллистический вклад [ср. с (7), (8)]

$$\frac{\delta T_c^{(\text{ball})}}{T_{c0}} = -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{k_F l} \left[ \frac{\ln \frac{\omega_D}{T_{c0}}}{1 + \lambda \ln \frac{E_F}{\omega_D}} \right]^2. \quad (36)$$

Выражение (36) является главным результатом настоящей работы. По сравнению с известным двумерным вкладом (28) оно не содержит малого множителя  $1/(k_F d)$ , но также имеет меньший логарифмический множитель. Для большинства экспериментальных ситуаций (см. раздел 4) первое обстоятельство является, по-видимому, более существенным. Это означает, что вклад (36) является доминирующим.

До сих пор э-э взаимодействие в нашей модели предполагалось точечным и мгновенным, что не вполне соответствует ситуации в реальных металлах. В Приложении D излагается исследование эффектов неточности, из которого следует, что пока э-э отталкивание "размазано" на масштабе  $\sim 1/k_F$ , выражение (36) остается верным с точностью до численного множителя. Учитывая то, что в реальных металлах кулоновское взаимодействие имеет радиус экранировки порядка фермиевского, разумно ожидать, что главный баллистический вклад имеет вид второго слагаемого в (7) с  $\alpha \sim 1$ .



Таблица 1: Различные параметры разупорядоченных сверхпроводящих пленок.

Материал	Статья	$T_{c0}, K$	$d, A$	$l, A$	$\gamma^{-1}, \text{fit}$	$\ln 1/(T_{c0}\tau)$	$\ln 4E_d/T^*$
W-Re <sup>1,2</sup>	[14]	6.0	30 – 1200	4	7.4	6.1	2.7 – 0
Mo-Ge <sup>1,2</sup>	[10]	5.8 – 7.6	15 – 1000	4	7.0	6.1	4.0 – 0
Mo-Si <sup>2</sup>	[15]	7.3	12 – 200	5	7.0	5.6	4.7 – 0
Ti-N <sup>1</sup>	[17]	0.45 – 1.3	36 – 50	3	6.2	8.9	6.4 – 2.4
Nb (O)	[16]	6.5	25 – 263	18	11.7	5.2	4.8 – 0
Nb-N	[13]	17.	$\gtrsim 500$	0.3 – 7.0	–	4.8	$\sim 0$
Nb-N	[20]	7.0 – 15.	20 – 150	$\sim 5$	5.0	5.65	5.6 – 3.4
Nb-N	[19]	14.9	10–260	2	8.3	7.2	6.2– 2.1
Mo-C <sup>2</sup>	[18]	8.0	30 – 300	0.9 – 3.5	7.5	5.5	3.2 – 0.9

\* — в этом месте мы решили оставить 4, получающуюся при вычислении формулы (28), несмотря на некоторую условность такого подхода. См. сноску к формуле (28).

<sup>1</sup> — для оценки мы взяли  $1/k_F \sim l \sim a$ , где  $a$  — постоянная решетки.

<sup>2</sup> — для оценки мы считали эффективную массу электрона равной массе электрона, как элементарной частицы.

## 4 Сравнение с экспериментом

В таблице 1 приведены параметры пленок, изучавшихся в ряде экспериментов.

Как видно,  $d \gg l$ , что означает неприменимость формул (1) и (2) в их обычном виде (с  $\ln 1/(T_{c0}\tau)$ ). Замена же верхней обрезки логарифма на  $E_d$  [см. (28)] приводит к слишком малым значениям  $\gamma^{-1}$  для того, чтобы соответствовать экспериментальным данным. Таким образом, формула Финкельштейна (2) не может претендовать на полноценное объяснение физики явления и позволяет лишь феноменологически фиттировать результаты эксперимента.

Более того, согласно недавнему обзору [11] эксперимент свидетельствует о том, что нельзя считать  $\delta T_c$  зависящим только от кондатанса пленки  $g$ .<sup>4</sup> (В этой работе предлагалась эмпирическая формула  $T_c \propto (1/d)g^B$  с константой  $B \sim 1$ .)

Согласно нашим результатам, для достаточно разупорядоченных и толстых пленок ожидается, что вклад (36) является лидирующим и  $\delta T_c = -\alpha/(k_F l)$ ,  $\alpha \sim 1$ . Поэтому мы предприняли попытку фиттировать этой зависимостью (от одного параметра  $k_F l$ ) имеющиеся у нас экспериментальные данные и получили в некоторых случаях хорошие результаты, что представлено на Рис. 4.

<sup>4</sup>Вообще говоря, учет взаимодействия в триплетном канале в теории Финкельштейна приводит к появлению зависимости сдвига  $T_c$  от силы обменного взаимодействия и может в некоторой степени усилить эффект. Однако нам не известны успешные попытки описания эксперимента такой теорией. Остается верной последующая аргументация о том, что вклад Финкельштейна с обрезкой на  $E_d$  существенно меньше, чем наблюдаемый эффект и меньше, чем баллистический вклад.

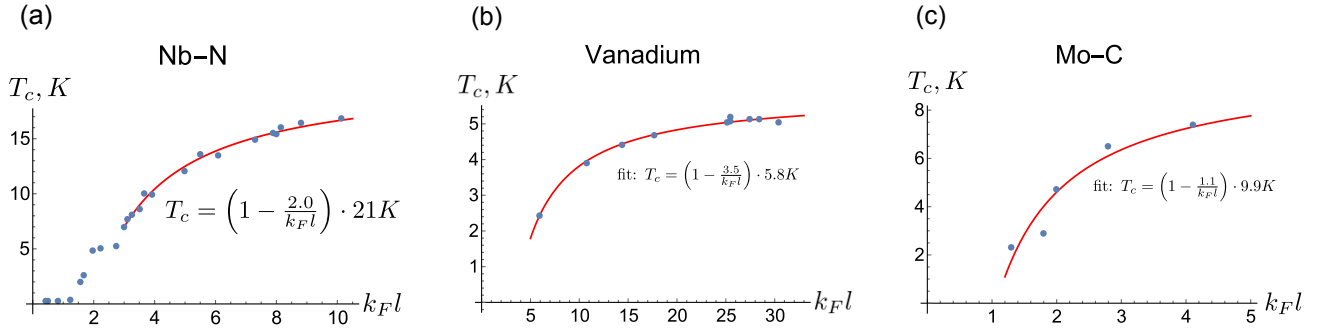


Рис. 7: Фиттирование экспериментальных данных по зависимости  $T_c$  от  $k_F l$  формулой  $T_c = T_{c0} [1 - \alpha/(k_F l)]$ . (a) Nb-N пленки [13] (b) Пленки из ванадия [12] (c) Mo-C пленки [18].

## 5 Заключение

В этой работе было проведено последовательное изучение двумерных и трехмерных вкладов различных областей импульса (переносимого линией э-э взаимодействия) в эффект понижения критической температуры перехода электрон-электронным отталкиванием, усиленным беспорядком в реальной трехмерной геометрии пленки. Электрон-электронное взаимодействие моделировалось точечным взаимодействием, однако, было также изучено, к чему приводит размытие потенциала э-э взаимодействия. Была предложена прозрачная физическая интерпретация баллистического вклада, как поправки к голой константе э-э взаимодействия в куперовском канале. По результатам работы можно сделать следующие выводы:

- Классические формулы (1) и (2) с обрезкой логарифма на границе диффузной области  $1/\tau$  не применимы к большинству экспериментальных реализаций, так как  $d \gg l$ .
- Формулы (1) и (2) с обрезкой логарифма на энергии Таулесса  $E_d$  (для толщины пленки) дают результат, существенно меньший, чем экспериментально наблюдаемый.
- Таким образом, теория Финкельштейна не может претендовать на полноценное объяснение физики явления и позволяет лишь в некоторых случаях феноменологически фиттировать результаты эксперимента.
- Необходимо последовательно учитывать двумерные и трехмерные вклады для реальных пленок с  $d \gg l$ .
- Необходимо также учитывать вклад от баллистической области (что соответствует импульсам  $q \sim k_F$ ), не ограничиваясь диффузионным вкладом.
- Часто баллистический вклад является лидирующим и согласуется с результатами некоторых экспериментов.

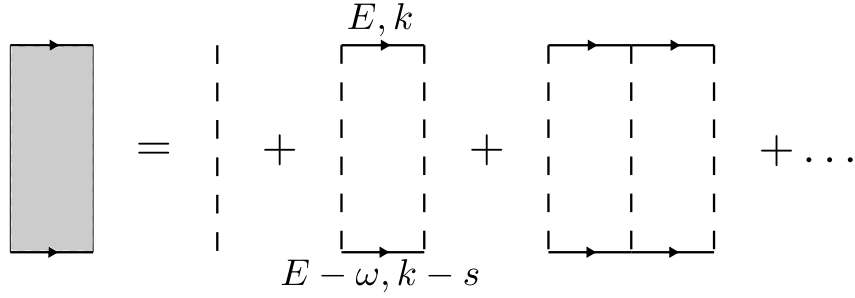


Рис. 8: Уравнение, определяющее куперон  $\mathcal{C}(s, \omega)$ . Пунктир отвечает примесной линии.

## Приложение А. Баллистическая диффузионная лестница и блок Хиками

В разделах 3 и Приложении В нам потребовались выражения для ”баллистического“ диффузионной лестницы  $\mathcal{C}(\mathbf{q}, \omega)$  [см Рис. 8], полученное за рамками условия  $q \ll 1/l, \omega \ll 1/\tau$  (но все еще  $q \ll k_F$  и  $\omega \ll E_F$ ). Взяв  $E > 0$  и  $E - \omega < 0$ , мы получим для одной ступени лестницы:

$$\begin{aligned} f_q(\omega) &= \frac{\nu}{2\pi\nu\tau} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int d\xi \frac{1}{iE - \xi + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{i(E - \omega) - \xi - \mathbf{v}\mathbf{q} - \frac{i}{2\tau}} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{1 + \omega\tau - i\tau\mathbf{v}\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{ql} \operatorname{arctg} \frac{ql}{1 + \omega\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Суммируя геометрический ряд с Рис. 8, мы получаем

$$\mathcal{C}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{1}{1 - f_q(\omega)}. \quad (\text{A.2})$$

В частности, на нулевом импульсе:

$$\mathcal{C}(0, \omega) = \frac{1}{2\pi\nu\tau} \frac{1 + \omega\tau}{\omega\tau}. \quad (\text{A.3})$$

Также при вычислении диаграмм (b) — (d) Рис. 5 и 13 нам потребуется выражение для четверного блока Хиками, вычисленного за рамками диффузионного приближения (см. Рис. 9). Вычислим его здесь:

Берем  $E_1 = E, E_2 = -E', E_3 = E', E_4 = -E, q = 0$ .

Ограничения на энергии следующие:  $E_i \ll E_F, |E_i - E_j| \ll \tau^{-1}$ .

Выражения для диаграмм, дающих вклад в блок Хиками:

$$B(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = B_1(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}) + B_2(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}) + B_3(\omega, \mathbf{q}, \mathbf{k}), \quad (\text{A.4})$$

$$B_1 = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G_{E_1}^R(p+q/2+k/2) G_{E_3}^R(-p+k/2+q/2) G_{E_4}^A(p+k/2-q/2) G_{E_2}^A(-p+k/2-q/2), \quad (\text{A.5})$$

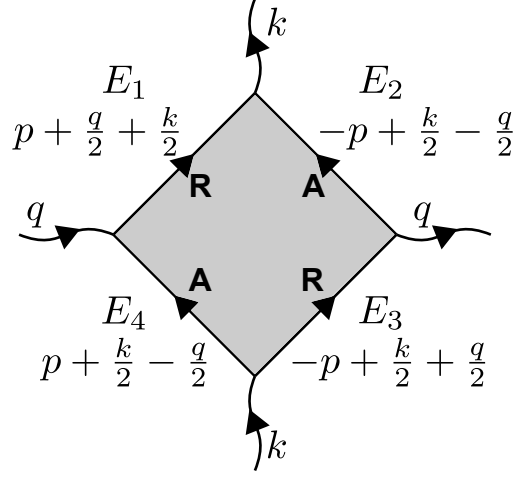


Рис. 9: Блок Хиками.

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G_{E_1}^R(p + q/2 + k/2) G_{E_3}^R(-p + k/2 + q/2) G_{E_2}^A(-p + k/2 - q/2) \times \\
&\times \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} G_{E_1}^R(p_1 + q/2 + k/2) G_{E_3}^R(-p_1 + k/2 + q/2) G_{E_4}^A(p_1 + k/2 - q/2), \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G_{E_3}^R(-p + k/2 + q/2) G_{E_4}^A(p + k/2 - q/2) G_{E_2}^A(-p + k/2 - q/2) \times \\
&\times \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} G_{E_1}^R(p_1 + q/2 + k/2) G_{E_4}^A(p_1 + k/2 - q/2) G_{E_2}^A(-p_1 + k/2 - q/2). \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

Для начала произведем вычисление на нулевом  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{k}$  и совпадающих энергиях  $E_i = \varepsilon$  :

$$B_1(0) = \nu_0 \int d\xi \frac{1}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi - \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi - \frac{i}{2\tau}} = \nu_0 \int d\xi \frac{1}{(\xi^2 + \frac{1}{4\tau^2})^2} = 4\pi\nu_0\tau^3, \quad (\text{A.8})$$

$$B_2(0) = \frac{\nu_0}{2\pi\tau} \left( \int d\xi \frac{1}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi - \frac{i}{2\tau}} \right)^2 = \frac{\nu_0}{2\pi\tau} (-2\pi i\tau^2)^2 = -2\pi\nu_0\tau^3, \quad (\text{A.9})$$

$$B_3(0) = \frac{\nu_0}{2\pi\tau} \left( \int d\xi \frac{1}{\varepsilon - \xi + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi - \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\varepsilon - \xi - \frac{i}{2\tau}} \right)^2 = \frac{\nu_0}{2\pi\tau} (2\pi i\tau^2)^2 = -2\pi\nu_0\tau^3, \quad (\text{A.10})$$

Вклады сокращаются:

$$B(0) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Теперь будем раскладывать в ряд по параметрам  $\omega$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ ) (возьмем первый порядок по  $\omega$  и второй по импульсам):

$$\begin{aligned}
B_1 &= \nu_0 \int d\xi_p \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{E_1 - \xi_p - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{E_3 - \xi_p + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_4 - \xi_p + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{E_2 - \xi_p - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \frac{i}{2\tau}} = \\
&= \nu_0 \int d\xi \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{\xi - E_1 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\xi - E_3 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\xi - E_4 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\xi - E_2 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} = \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Берем интеграл по  $\xi$ , замыкая контур против часовой стрелки. Имеем вклады от полюсов:

$$\xi \rightarrow E_1 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}, \tag{A.13}$$

$$\xi \rightarrow E_3 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}. \tag{A.14}$$

Тогда (вводим обозначения  $E_{ij} = E_i - E_j$ ),

$$\begin{aligned}
B_1 &= 2\pi i\nu_0 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{E_1 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau} - E_3 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_1 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau} - E_4 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_1 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau} - E_2 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} + \\
&+ 2\pi i\nu_0 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{E_3 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau} - E_1 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) - \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_3 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau} - E_4 - v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_3 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau} - E_2 + v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} - \frac{\mathbf{k}}{2} \right) + \frac{i}{2\tau}} = \\
&= 2\pi i\nu_0 \int \frac{do}{S_d} \left( \frac{1}{E_{13} - 2v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right)} \frac{1}{E_{14} - v_F \mathbf{n} \mathbf{q} + \frac{i}{\tau}} \frac{1}{E_{12} - v_F \mathbf{n} \mathbf{k} + \frac{i}{\tau}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{-E_{13} + 2v_F \mathbf{n} \left( \frac{\mathbf{q}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right)} \frac{1}{E_{34} + v_F \mathbf{n} \mathbf{k} + \frac{i}{\tau}} \frac{1}{E_{32} + v_F \mathbf{n} \mathbf{q} + \frac{i}{\tau}} \right) = \\
&= \frac{2\pi i\nu_0}{v_F} \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{-E_{13}/v_F + \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k})} \left( \frac{1}{E_{34} + v_F \mathbf{n} \mathbf{k} + \frac{i}{\tau}} \frac{1}{E_{32} + v_F \mathbf{n} \mathbf{q} + \frac{i}{\tau}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{E_{14} - v_F \mathbf{n} \mathbf{q} + \frac{i}{\tau}} \frac{1}{E_{12} - v_F \mathbf{n} \mathbf{k} + \frac{i}{\tau}} \right) = \\
&= -\tau^2 \frac{2\pi i\nu_0}{v_F} \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{-E_{13}/v_F + \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k})} \left( \frac{1}{1 - i\tau E_{34} - i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} \frac{1}{1 - i\tau E_{32} - i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{q}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 - i\tau E_{14} + i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{q}} \frac{1}{1 - i\tau E_{12} + i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} \right) \approx \\
&\approx -\tau^2 \frac{2\pi i\nu_0}{v_F} \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{-(E - E')/v_F + \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k})} \left( \frac{1}{1 - i\tau(E' + E) - i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} \frac{1}{1 - i\tau 2E'} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 - i\tau 2E} \frac{1}{1 - i\tau(E + E') + i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} \right) = \\
&= -\tau^2 \frac{2\pi i\nu_0}{v_F} 2i\tau v_F \frac{1 - i(E + E')\tau}{(1 - 2iE\tau)(1 - 2iE'\tau)} \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{(1 - i(E + E')\tau)^2 + \tau^2 v_F^2 (\mathbf{n} \mathbf{k})^2} = \\
&= \tau^3 \frac{4\pi\nu_0}{v_F} \frac{1 - i(E + E')\tau}{(1 - 2iE\tau)(1 - 2iE'\tau)} \frac{1}{\tau v_F k (1 - i(E + E')\tau)} \arctan \frac{\tau v_F k}{1 - i(E + E')\tau} = \\
&= \tau^3 4\pi\nu_0 \frac{1}{(1 - 2iE\tau)(1 - 2iE'\tau)} f_k(-i(E + E')). \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Сначала вычислим:

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G_{E_1}^R(p + q/2 + k/2) G_{E_3}^R(-p + k/2 + q/2) G_{E_2}^A(-p + k/2 - q/2) = \\
&= \nu_0 \int d\xi_p \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{E_1 - \xi_p - \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) + \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{E_3 - \xi_p + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) + \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_2 - \xi_p + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(-\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau}} = \\
&= -\nu_0 \int d\xi \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{\xi - E_1 + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau}} \frac{1}{\xi - E_3 - \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\xi - E_2 - \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(-\mathbf{q} + \mathbf{k}) + \frac{i}{2\tau}} = \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Замыкаем контур по часовой стрелке,  $\xi \rightarrow E_2 + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(-\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau}$ ,

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2\pi i \nu_0 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{E_2 + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(-\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau} - E_1 + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{E_2 + \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(-\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau} - E_3 - \frac{v_F}{2} \mathbf{n}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) - \frac{i}{2\tau}} = \\
&= 2\pi i \nu_0 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{-E_{12} + v_F \mathbf{n} \mathbf{k} - \frac{i}{\tau} - E_{32} - v_F \mathbf{n} \mathbf{q} - \frac{i}{\tau}} = \\
&= 2\pi i \nu_0 (i\tau)^2 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 - i\tau E_{12} + i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} \frac{1}{1 - i\tau E_{32} - i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{q}} = \\
&= 2\pi i \nu_0 (i\tau)^2 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 - i\tau(E + E') + i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} \frac{1}{1 - i\tau 2E'} = \\
&= -2\pi i \nu_0 \tau^2 \frac{1}{1 - i\tau 2E'} \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 - i\tau(E + E') + i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} = \\
&= -2\pi i \nu_0 \tau^2 \frac{1}{1 - i\tau 2E'} f_k(-i(E + E')). \tag{A.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(E_2 \rightarrow E_4, k \leftrightarrow q) &= 2\pi i \nu_0 (i\tau)^2 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 - i\tau 2E} \frac{1}{1 - i\tau(E + E') - i\tau v_F \mathbf{n} \mathbf{k}} = \\
&= -2\pi i \nu_0 \tau^2 \frac{1}{1 - 2i\tau E} f_k(-i(E + E')). \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{2\pi \nu_0 \tau} J_2 \cdot J_2(E_2 \rightarrow E_4, k \leftrightarrow q) = \frac{1}{2\pi \nu_0 \tau} (-2\pi i \nu_0 \tau^2)^2 \times \\
&\quad \times \frac{1}{1 - i\tau 2E'} f_k(-i(E + E')) \frac{1}{1 - 2i\tau E} f_k(-i(E + E')) = \\
&= -2\pi \nu_0 \tau^3 \frac{f_k^2(-i(E + E'))}{[1 - 2i\tau E][1 - i\tau 2E']}. \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Для вычисления  $B_3$  сначала найдем

$$J_3 = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G_{E_3}^R(-p + k/2 + q/2) G_{E_4}^A(p + k/2 - q/2) G_{E_2}^A(-p + k/2 - q/2). \tag{A.20}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
J_3 &= J_2^*(E_2 \rightarrow E_3, E_1 \rightarrow E_4, E_3 \rightarrow E_2, \mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}) = \\
&= -2\pi i\nu_0\tau^2 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 + i\tau E_{43} - i\tau v_F \mathbf{n}\mathbf{k}} \frac{1}{1 + i\tau E_{23}} = \\
&= -2\pi i\nu_0\tau^2 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 - i\tau(E + E') - i\tau v_F \mathbf{n}\mathbf{k}} \frac{1}{1 - i\tau 2E'} = \\
&= -2\pi i\nu_0\tau^2 \frac{1}{1 - i\tau 2E'} f_k(-i(E + E')). \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3(E_3 \rightarrow E_1, k \leftrightarrow q) &= -2\pi i\nu_0\tau^2 \int \frac{do}{S_d} \frac{1}{1 - 2i\tau E} \frac{1}{1 - i\tau(E + E') + i\tau v_F \mathbf{n}\mathbf{k}} = \\
&= -2\pi i\nu_0\tau^2 \frac{1}{1 - 2i\tau E} f_k(-i(E + E')). \tag{A.22}
\end{aligned}$$

Тогда,

$$B_3 = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} J_3 \cdot J_3(E_3 \rightarrow E_1, k \leftrightarrow q) = -2\pi\nu_0\tau^3 \frac{f_k^2(-i(E + E'))}{[1 - 2i\tau E][1 - i\tau 2E']} \tag{A.23}$$

Собирая вклады, имеем:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 4\pi\nu_0\tau^3 \frac{1}{(1 - 2iE\tau)(1 - 2iE'\tau)} f_k(-i(E + E')) (1 - f_k(-i(E + E'))). \tag{A.24}$$

Полученный результат также выразился через функцию  $f_q$ , введенную ранее [см. (A.1)].



# Приложение В. Вычисления в неперенормированной теории

В этом приложении представлено изложение основной части работы, выполненное в менее изящном, но более последовательном формализме, использующем теорию, описывающую взаимодействие электронов на всех энергиях вплоть до фермиевской. Он позволяет корректно учесть вклады, возникающие на разных масштабах энергии и импульсов.

Мы изучаем трехмерную систему с геометрией пленки (толщина  $d$ ), которая описывается следующим Гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_{\text{dis}} + H_{\text{ph}} + H_{\text{int}}, \quad (\text{B.1})$$

где

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} v_F (|\mathbf{k}| - k_F) a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.2a})$$

$$H_{\text{dis}} = \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (\text{B.2b})$$

$$H_{\text{ph}}(t) = -\frac{\lambda_{\text{ph}}}{2\nu} \int d\tau \cdot \delta_{\omega_D}(\tau) \int d\mathbf{r} \psi_{\uparrow}^{\dagger}\left(\mathbf{r}, t - \frac{\tau}{2}\right) \psi_{\downarrow}^{\dagger}\left(\mathbf{r}, t + \frac{\tau}{2}\right) \psi_{\downarrow}\left(\mathbf{r}, t + \frac{\tau}{2}\right) \psi_{\uparrow}\left(\mathbf{r}, t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (\text{B.2c})$$

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{\lambda}{2\nu} \int d\tau \cdot \delta_{E_F}(\tau) \int d\mathbf{r} \psi_{\uparrow}^{\dagger}\left(\mathbf{r}, t - \frac{\tau}{2}\right) \psi_{\downarrow}^{\dagger}\left(\mathbf{r}, t + \frac{\tau}{2}\right) \psi_{\downarrow}\left(\mathbf{r}, t + \frac{\tau}{2}\right) \psi_{\uparrow}\left(\mathbf{r}, t - \frac{\tau}{2}\right). \quad (\text{B.2d})$$

Здесь  $a_{\mathbf{k}}$  и  $\psi(\mathbf{r})$  — операторы уничтожения в импульсном и координатном представлениях,  $\lambda_{\text{ph}} \ll \lambda \ll 1$  — константы, которые описывают притяжение, связанное с обменом фононами и электромагнитное отталкивание электронов, а  $\delta_{\omega_D}$  и  $\delta_{E_F}$  —  $\delta$ -функции, размазанные на соответствующем масштабе, так что в энергетическом представлении они превращаются в резкую обрезку по энергии на масштабах  $\omega_D$  и  $E_F$ , соответственно.

Мы начинаем с вычисления куперовской восприимчивости на нулевом импульсе:

$$\Pi_{\text{full}} = \int d\mathbf{r} \int^{1/T} d\tau \langle \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}(0, 0) \psi_{\downarrow}(0, 0) \rangle_{\text{full}}. \quad (\text{B.3})$$

Значение температуры, при котором  $\Pi_{\text{full}}$  обращается в бесконечность, соответствует переходу в сверхпроводящее состояние. Мы будем вычислять  $\Pi$  в ведущем порядке теории возмущений по параметрам  $\lambda_{\text{ph}}$  и  $\lambda$ , используя Мацубаровскую диаграммную технику, в которой будем обозначать отталкивательное взаимодействие зигзагообразной линией, фононное притяжение волнистой линией, а примесные линии пунктиром. Отметим, что хотя  $\lambda \ll 1$ , выражения вида  $\lambda \ln(E_F/\omega_D)$  могут быть много больше 1, делая необходимым суммирование лестничной последовательности диаграмм. Что касается диаграмм с пересечением линий взаимодействия, они не будут содержать достаточное количество больших логарифмов и поэтому не будут рассматриваться. Для усреднения по беспорядку рассмотрим в начале усредненные функции Грина:

$$G_{\pm iE}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pm iE - \xi_{\mathbf{k}} \pm \frac{i}{2\tau}}, \quad (\text{B.4})$$

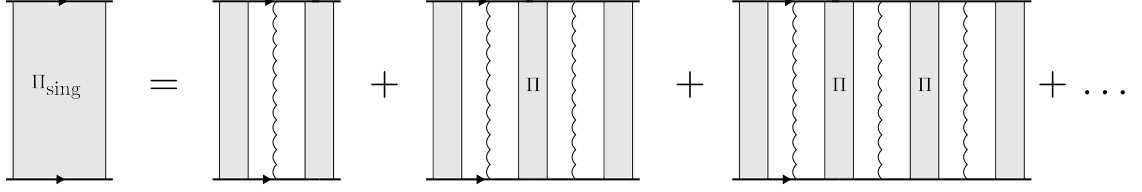


Рис. 10: Последовательность диаграмм, дающая сингулярную часть куперовской восприимчивости. Волнистая линия обозначает притяжение электронов по фононному механизму.

где  $\xi_{\mathbf{k}} = v_F (|\mathbf{k}| - k_F)$ . Мы также добавляем купероны и диффузоны в диаграммы, при этом учет только диаграмм без пересечения не меняет ответ (теорема Андерсона). Затем мы рассматриваем диаграммы с пересечениями, затрагивающими примесные линии, что отвечает теории возмущений по параметру  $1/(k_F l)$ . Пересечения примесных линий с собой лишь перенормируют коэффициент диффузии  $D$  и не приводят к качественно новым эффектам (скажем, они не могут открыть щель в спектре диффузионных мод), поэтому при изучении ведущего вклада мы не должны учитывать эти диаграммы. Что касается пересечений между примесными линиями и линиями взаимодействия, то мы будем рассматривать только пересечения с линиями отталкивательного взаимодействия (константа  $\lambda$ ) что обосновывается условием  $\lambda_{\text{ph}} \ll \lambda$ . Это условие не противоречит наличию сверхпроводимости в системе, так как  $\lambda$  подавляется из-за перенормировки в куперовском канале [см. (B.10)], в то время, как при пересечении линии взаимодействия примесной линией, берется голое значение  $\lambda$ .

Так как мы ищем расходимость в  $\Pi_{\text{full}} = \Pi_{\text{reg}} + \Pi_{\text{sing}}$ , то мы не будем изучать ее регулярную часть  $\Pi_{\text{reg}}$  и рассмотрим сингулярное слагаемое  $\Pi_{\text{sing}}$ , которое образовано лестницей из линий э-э притяжения. Между этими линиями притяжения (константа  $\lambda_{\text{ph}}$ ) может вставлять все, что угодно. Обозначим этот блок  $\Pi$  (см. Рис. 10):

$$\Pi_{\text{sing}} \propto \frac{1}{1 - \lambda_{\text{ph}} \Pi / \nu}. \quad (\text{B.5})$$

Таким образом, уравнение на  $T_c$  записывается так же, как и в основной части:

$$\nu \lambda_{\text{ph}}^{-1} = \Pi(T_c). \quad (\text{B.6})$$

В отличие от раздела (3), здесь обрезка по энергии осуществляется на  $E_F$ . Выражение, соответствующее  $\Pi$  совпадает с выражением, которое мы получим, если будем вычислять (B.3) с гамильтонианом  $H_0 + H_{\text{dis}} + H_{\text{int}}$  (без  $H_{\text{ph}}$ ) и с обрезкой по энергии на  $\omega_D$  для четырех функций Грина, примыкающим к концам диаграмм. То же выражение можно было бы получить через среднеполевой гамильтониан  $H_{\Delta} = - \int d\mathbf{r} (\Delta^+ \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) + \text{h.c.})$  (скажем, с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича) и записывая условие самосогласования для  $\Delta = \lambda_{\text{ph}} \langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$ .

Полезным оказывается введение перенормированной вершины  $v(E)$ , которую мы определяем, как сумму последовательности диаграмм, изображенных на Рис. 11. Перечеркивание

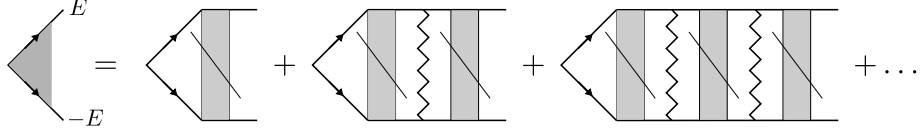


Рис. 11: Диаграммное представление для перенормированной вершины  $v(E)$ . Перечеркивание куперона означает, что нужно учесть также и диаграмму без примесных линий в этом месте. Концевые функции Грина не включаются в выражения для  $v$ .

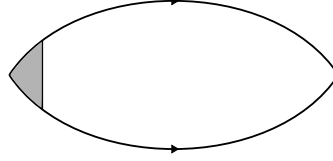


Рис. 12: Куперовская восприимчивость, вычисленная в приближении диаграмм без самопересечений.

куперона означает, что нужно учесть также и диаграмму без примесных линий в этом месте. Напомним, что для функций Грина, примыкающим к концам диаграмм, суммирование по энергии обрывается на  $\omega_D$ , что учитывается введением ступенчатой функции  $\theta_E = \theta(\omega_D - |E|)$ :

$$v(E) = \left( 1 + \frac{2\pi\nu\tau}{1 + 2|E|\tau} \mathcal{C}(0, 2|E|) \right) \times \left[ \theta_E - \lambda\nu^{-1} \left( T \sum_{E'} \frac{\pi\nu\theta_{E'}}{E'} \right) + (-\lambda\nu^{-1})^2 \left( T \sum_{E''} \frac{\pi\nu\theta_{E''}}{E''} \right) \left( T \sum_E \frac{\pi\nu}{E} \right) + \dots \right]. \quad (\text{B.7})$$

Суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$v(E) = \frac{1 + 2|E|\tau}{2|E|\tau} \left( \theta_E - \frac{\ln \frac{\omega_D}{T}}{\lambda^{-1} + \ln \frac{E_F}{T}} \right). \quad (\text{B.8})$$

Теперь приступим к вычислению  $\Pi$ . В отсутствие беспорядка  $\Pi$  дается диаграммой, изображенной на Рис. 12, взятой в пределе  $\tau \rightarrow \infty$ . При наличии беспорядка эта же диаграмма описывается  $\Pi$ , вычисленной в приближении диаграмм без самопересечений. Выражение оказывается не зависящим от беспорядка, что и является содержанием теоремы Андерсона. Оно равно:

$$\Pi_0(T) = \sum_E \frac{\pi\nu}{E} \left( \theta_E - \frac{\lambda \ln \left( \frac{\omega_D}{T} \right)}{1 + \lambda \log \left( \frac{E_F}{T} \right)} \right) = \nu \frac{1 + \lambda \ln \left( \frac{\omega_D}{T} \right)}{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{T} \right)} \ln \frac{\omega_D}{T}. \quad (\text{B.9})$$

Решая это уравнение, мы получим для  $\ln(\omega_D/T)$  обычное выражение:

$$\ln^{-1} \left( \frac{\omega_D}{T_{c0}} \right) = \lambda_{\text{ph}} - \frac{\lambda}{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{\omega_D} \right)} = \lambda_{\text{BCS}}. \quad (\text{B.10})$$

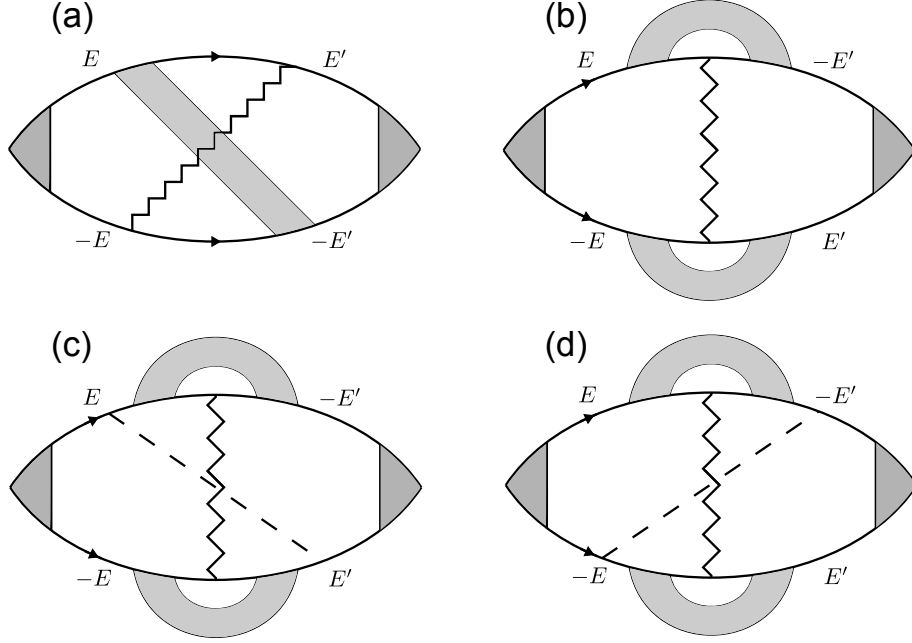


Рис. 13: Диаграммы, дающие ведущий диффузионный вклад в сдвиг  $T_c$  [у диаграммы (а) есть симметричный аналог]. Затененные блоки обозначают купероны и диффузоны. В диффузионной области наличие диффузонов и куперонов требует различных знаков энергий  $E$  и  $E'$ .

При учете диаграмм с пересечениями возникают поправки  $\delta\Pi$  к  $\Pi_0$ , которые приводят к сдвигу  $T_c$  на  $\delta T_c$ . Предполагая малость  $\delta\Pi$ , получим следующее уравнение для  $\delta T_c$  в первом порядке:

$$\nu\lambda_{\text{ph}}^{-1} = \Pi_0(T_{c0} + \delta T_c) + \delta\Pi(T_{c0}). \quad (\text{B.11})$$

Отсюда имеем

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = \frac{\delta\Pi}{\nu} \left( \frac{\lambda_{\text{ph}}}{\lambda_{\text{BCS}}} \right)^2 = \frac{\delta\Pi}{\nu} \left[ \frac{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{T_{c0}} \right)}{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{\omega_D} \right)} \right]^2. \quad (\text{B.12})$$

Ведущие поправки к  $\Pi_0$  соответствуют диаграммам, представленным на Рис. 13.

Для начала изучим диаграмму (а) для  $E > 0, E' > 0$  (умножим на 2, что учесть также и случай  $E, E' < 0$ , дающий равный вклад). Другая 2-ка возникает из-за наличия симметричного аналога этой диаграммы.

$$\Pi_A = -2 \times 2\lambda\nu^{-1}T^2 \sum_{E, E' > 0} \frac{v(E)v(E')}{(1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} I_A(E, E'), \quad (\text{B.13})$$

где

$$I_A(E, E') = \frac{1}{d} \sum_{q_z=2\pi n/d} \int (d\mathbf{q}_{\parallel}) \mathcal{C}(q, E + E') \times \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} & \times \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{p}') G_{iE}(p) G_{iE}(|\mathbf{p}' - \mathbf{q}|) G_{iE'}(p') G_{-iE}(p) G_{-iE'}(|\mathbf{p} + \mathbf{q}|) G_{-iE'}(p') \\ & = 2\pi\nu\tau^3 \frac{1}{d} \sum_{q_z=2\pi n/d} \int (d\mathbf{q}_{\parallel}) \frac{f_q(E + E')^2}{1 - f_q(E + E')} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

и мы ввели суммирование по составляющей импульса  $q^2 = q_z^2 + q_{\parallel}^2$ , перпендикулярной к пленке. Напоминаем, что мы работаем при следующем предположении (6) соотношении между масштабами: Учет всех баллистических диаграмм с Рис. 5 [все еще для совпадающих знаков  $E, E'$ ] дает после некоторого количества выкладок выражение (B.13), в котором  $I_A(E, E')$  заменено на

$$I(E, E') = 2\pi\nu\tau^3 \frac{1}{d} \sum_{q_z=2\pi n/d} \int (d\mathbf{q}_{\parallel}) \frac{f_q(E + E')^2}{1 - f_q(E + E')} [3 - f_q(E + E')]. \quad (\text{B.16})$$

## B.1 Диффузионный вклад

Для начала изучим диффузионную область  $q \ll 1/l, E + E' \ll 1/\tau$ , в которой  $f_q(\omega) \approx 1$  и  $1 - f_q(\omega) \approx \tau(Dq^2 + \omega)$  так, что баллистический диффузон/куперон сводится к обычному. В качестве приближения мы обрежем интегрирование по  $q_{\parallel}$  на  $1/l$ , а суммирование по энергиям на  $E + E' = 1/\tau$ . Несколько непоследовательным является то, что мы не останавливаем суммирование по  $q_z$  на  $q_z \sim 1/l$ , но эта неточность не скажется на вкладе (B.19), так как  $E_d \ll 1/\tau$ . А при вычислении вклада (B.18) мы не ставим целью отыскать численный коэффициент в этом выражении. Тогда можно вычислить интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{\text{diff}}(E, E') &= 4\pi\nu\tau^2 \frac{1}{d} \sum_{q_z=2\pi n/d} \int_0^{1/l} (d\mathbf{q}_{\parallel}) \frac{1}{Dq^2 + E + E'} = \\ &= 2\pi\nu\tau^2 \frac{1}{2D} \int_0^{1/l} (d\mathbf{q}_{\parallel}) \frac{\coth \frac{d}{2} \sqrt{q_{\parallel}^2 + (E + E')/D}}{\sqrt{q_{\parallel}^2 + (E + E')/D}} = \\ &= 2 \frac{\nu\tau^2}{2Dd} \left( \ln \sinh \sqrt{\frac{d^2}{4} \left( \frac{1}{l^2} + \frac{E + E'}{D} \right)} - \ln \sinh \sqrt{\frac{d^2}{4} \frac{E + E'}{D}} \right) \\ &\approx 2 \frac{\nu\tau^2}{4D} \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{E + E'}{D}} - 2 \frac{\nu\tau^2}{2Dd} \ln \sinh \sqrt{\frac{E + E'}{E_d}}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Подставляя это выражение в (B.13), а затем в (B.12) мы получим несколько вкладов. Из первого члена в (26):

$$\frac{\delta T_c^{(\text{diff}, 3\text{D})}}{T_{c0}} = -\frac{\#\lambda}{(k_F l)^2} \ln^2 \left( \frac{\omega_D}{T_{c0}} \right) \left[ \frac{1 + \lambda \ln(E_F \tau)}{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{\omega_D} \right)} \right]^2. \quad (\text{B.18})$$

При рассмотрении второго члена будем разделять две области. Первая, определенная условием  $E + E' < E_d$  даст обычный двумерный вклад, но с обрезкой на  $E_d$  вместо  $1/\tau$ . С логарифмической точностью:

$$\frac{\delta T_c^{(\text{diff}, 2\text{D})}}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{4(k_F l)(k_F d)} \ln^3 \frac{E_d}{T_{c0}}. \quad (\text{B.19})$$

Вторая область ( $E + E' > E_d$ ) дает:

$$\frac{\delta T_c^{(\text{diff}, ?)}}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{(k_F l)^2} \ln^2 \left( \frac{\omega_D}{T} \right) \left\{ \frac{\#}{\ln \left( \frac{\omega_D}{T} \right)} \sqrt{\omega_D \tau} \left[ \frac{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{T} \right)}{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{\omega_D} \right)} \right]^2 - \# \frac{1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{T} \right)}{\left[ 1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{\omega_D} \right) \right]^2} + \# \frac{\ln \left( \frac{1}{\tau T} \right)}{\left[ 1 + \lambda \ln \left( \frac{E_F}{\omega_D} \right) \right]^2} \right\}, \quad (\text{B.20})$$

которая, как и (B.18) содержит множитель  $1/(k_F l)^2$ . Вклады (B.18) и (B.20) могут быть больше классического результата (B.19). Однако еще больший вклад (B.23) происходит от области импульсов  $q \sim k_F$ , к изучению которого мы и переходим.

## В.2 Баллистический вклад

Теперь изучим область, в которой либо  $q \gg 1/l$ , либо  $E + E' \gg 1/\tau$ . Мы обрежем интегрирование по  $q$  на  $k_F$ , смоделировав простейшим образом зону конечной ширины. Как мы увидим ниже, главный вклад возникает при  $q \sim k_F$ , в котором выражения (A.1) уже не является точным. С другой стороны, в этой области  $f_q(E + E') \ll 1$ , что означает, что можно оставить всего одну примесную линию на месте диффузионных лестниц, что соответствует приближению:

$$I_{\text{ball}}(E, E') = 6\pi\nu\tau^3 \int^{k_F} (d\mathbf{q}) f_q(E + E')^2, \quad (\text{B.21})$$

где мы также перешли от суммирования по  $q_z$  к интегрированию по нему. Вычисление (B.21) за рамками приближения (A.1) [ но с искусственной обрезкой по энергии на  $E_F$  вместо обрезки по импульсу на  $k_F$ ] было проведено в разделе 3, в котором мы прибегали к координатному представлению. Для того, чтобы проиллюстрировать переход от диффузионной области к баллистической мы покажем ниже, что в приближении (A.1), вычисление (B.21) дает с точностью до численного множителя такое же выражение для сдвига  $T_c$ , как и (36). Также, мы покажем, что благодаря обрезке интеграла по импульсам на  $\Lambda \sim k_F$ , естественным образом возникает мягкая обрезка по энергии на  $E_F$ . В самом деле, численное вычисление  $I(E, E')$  дает функцию от  $E + E'$  монотонно убывающую на масштабе  $E_F$ . Так как мы будем вычислять интеграл по энергиям с логарифмической точностью, то нам потребуется только значение  $I$  на энергиях, много меньших  $E_F$ . Поэтому мы подставим в (B.13)  $I(E = 0, E' = 0)$  и обрежем интеграл на  $E_F$ . Раскладывая по  $1/(k_F l)$ , имеем

$$I_{\text{ball}}(0, 0) = \frac{3\pi}{4} \frac{\nu k_F \tau^2}{v_F l} \left( 1 + \frac{\#}{(k_F l)^2} + \dots \right), \quad (\text{B.22})$$

что дает следующий ведущий по  $1/(k_F l)$  вклад в сдвиг  $T_c$ :

$$\frac{\delta T_c^{(\text{ball})}}{T_{c0}} = -\frac{\#\lambda}{k_F l} \left[ \frac{\ln \frac{\omega_D}{T_{c0}}}{1 + \lambda \ln \frac{E_F}{\omega_D}} \right]^2. \quad (\text{B.23})$$

Это выражение совпадает с (36) с точностью до численного множителя, как и было заявлено и объяснено выше.

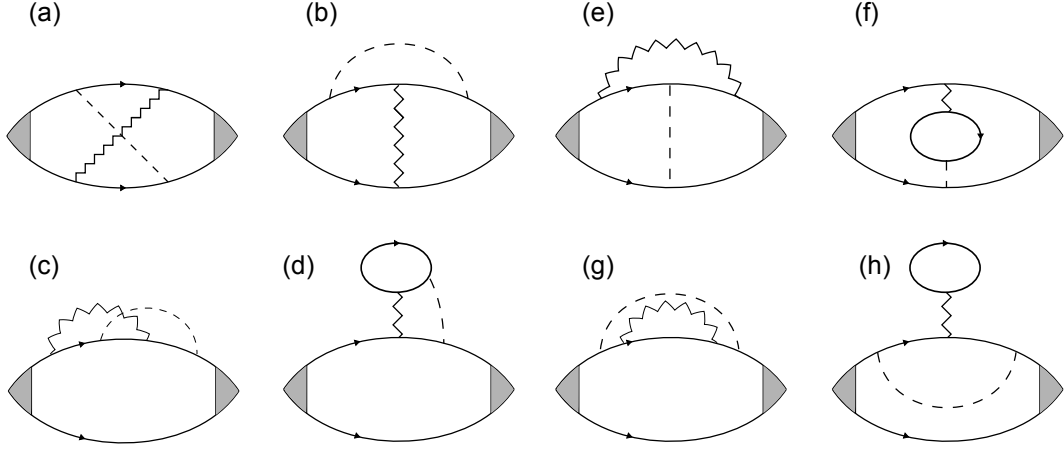


Рис. 14: Все диаграммы, выражающие баллистический вклад в сдвиг  $T_c$  в первом порядке теории возмущений. У некоторых имеются симметричные аналоги.

## Приложение С. Отсутствие вклада диаграмм (с) — (h)

Диаграммы, выражающие баллистический вклад в сдвиг  $T_c$ , изображены на Рис. С. Диаграммы а) и б) были рассмотрены ранее. Они дают главный результат работы (36). В этом разделе мы покажем, что остальные диаграммы (с) — (h) не дают вклада в ведущий по  $1/(k_F l)$  член теории возмущений.

Вклад каждой диаграммы имеет вид

$$\frac{\delta T_c^i}{T_c} = -\frac{2}{\pi} \lambda \nu^{-3} \tau^{-1} T^2 \sum_{E, E'} v(E) v(E') P_i, \quad (\text{C.1})$$

где  $P_i$  соответствует центральной части диаграммы.

Так же, как и в разделе 3, мы произведем вычисление в координатном представлении, используя обозначения  $G_{\pm} = G_{\pm iE}(r)$ ,  $G'_{\pm} = G_{\pm iE'}(r)$  and  $[G_+ G_-] = \int d\mathbf{p} / (2\pi)^3 G_{iE}(p) G_{-iE}(p) e^{-i\mathbf{p}r}$  в следующем приближении, справедливом при  $r \ll l$  and  $E, E' \ll E_F$ :

$$G_{\pm iE}(r) = -\frac{\pi \nu}{k_F r} e^{\pm i k_F r} e^{-\frac{r}{2i} - \frac{E}{v_F} r} \approx -\frac{\pi \nu}{k_F r} e^{\pm i k_F r} \quad (\text{C.2})$$

и

$$[G_+ G_-] = \frac{-i\tau}{1 + 2E\tau} [G_+ - G_-] = \frac{2\pi \nu \tau}{1 + 2E\tau} \frac{\sin k_F r}{k_F r}. \quad (\text{C.3})$$

Соотношение между знаками энергий  $E$  и  $E'$  произвольное в противоположность диффузионному случаю, в котором наличие диффузионной моды накладывала условие того, что они имеют одинаковые знаки.

### С.1 Диаграммы (с) и (d)

1)  $E, E' > 0$  or  $E, E' < 0$ :

Диаграмма d) соответствует такому же выражению, как и с), но с дополнительным множи-

телем 2 (спиновой природы):

$$P_{\text{cl}} = \frac{1}{2}P_{\text{cl}} = \frac{\lambda}{2 \times 2\pi\nu^2\tau} \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \times \\ \times [G_{iE}(p)G_{iE'}(k)G_{iE'}(q)G_{iE}(k')G_{iE}(p)G_{-iE}(-p) + \text{c.c.}]. \quad (\text{C.4})$$

Симметричные диаграммы дают такие же выражения. Взяв интеграл по импульсам, переходим в координатное представление:

$$P_{\text{cl}} = \frac{\lambda}{4\pi\nu^2\tau} \int d\mathbf{r} [G_+^2 G_-] G_+ G_+^{\prime 2}, \quad (\text{C.5})$$

где

$$[G_+ G_+ G_-] = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G_{iE}^2(p) G_{-iE}(p) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{-i\tau}{1+2E\tau} [G_+(G_+ - G_-)] = \\ = \frac{-i\tau}{1+2E\tau} \left[ -i \frac{\partial G_+}{\partial E} - \frac{-i\tau}{1+2E\tau} (G_+ - G_-) \right]. \quad (\text{C.6})$$

Для вычисления  $\partial G_+/\partial E$  мы сперва дифференцируем по энергии  $E$ , а потом пренебрегаем ей [см. (C.2)]. Подставляя, получим:

$$P_{\text{cl}} = \frac{-i\tau}{1+2E\tau} \frac{\lambda}{4\pi\nu^2\tau} \int d\mathbf{r} \left[ \frac{r}{v_F} \frac{-\pi\nu}{k_{Fr}} e^{ik_{Fr}} - \frac{2\pi\nu\tau}{1+2E\tau} \frac{\sin k_{Fr}}{k_{Fr}} \right] (-\pi\nu)^3 \frac{e^{3ik_{Fr}}}{(k_{Fr})^3} + \text{c.c.} \quad (\text{C.7})$$

Первый член приведет к выражению, которое содержит дополнительный множитель  $1/(k_{Fl})$ .

Таким образом, извлекая ведущий член, имеем:

$$P_{\text{cl}} \rightarrow \frac{\lambda\pi^3\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2} \int d\mathbf{r} \frac{\sin(k_{Fr}) \cdot \sin(3ik_{Fr})}{(k_{Fr})^4} = \frac{2\lambda\pi^5\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2}. \quad (\text{C.8})$$

II)  $E > 0, E' < 0$  or  $E < 0, E' > 0$ :

Проводя аналогичные вычисления для этого случая, получаем:

$$P_{\text{clII}} = \frac{1}{2}P_{\text{clII}} \rightarrow -\frac{\lambda\pi^3\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2} \int d\mathbf{r} \frac{\sin^2(k_{Fr})}{(k_{Fr})^4} = \frac{-2\lambda\pi^5\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2}. \quad (\text{C.9})$$

Таким образом, вклады сокращаются и дополнительного вклада в ведущий порядок от этих диаграмм нет.

## C.2 Диаграммы (e) и (f)

I)  $E, E' > 0$  or  $E, E' < 0$ :

Выражение, соответствующее каждой из диаграмм имеет вид:

$$P_{\text{eI}} = \frac{1}{2}P_{\text{fI}} = \frac{\lambda}{4\pi\nu^2\tau} \int d\mathbf{r} G_+^{\prime 2} [G_+ G_-]^2 + \text{c.c.} = \\ = \frac{\pi^3\lambda\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2} \int d\mathbf{r} \left( \frac{\sin k_{Fr}}{k_{Fr}} \right)^2 \frac{e^{2ik_{Fr}}}{(k_{Fr})^2} + \text{c.c.} = \frac{4i\pi^4 \ln 2\lambda\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2} + \text{c.c.} = 0. \quad (\text{C.10})$$

II)  $E > 0, E' < 0$  or  $E < 0, E' > 0$ :

$$P_{\text{eII}} = \frac{1}{2}P_{\text{fII}} = \frac{\lambda}{4\pi\nu^2\tau} \int d\mathbf{r} G_-^{\prime 2} [G_+ G_-]^2 + \text{c.c.} = \\ = \frac{\pi^3\lambda\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2} \int d\mathbf{r} \left( \frac{\sin k_{Fr}}{k_{Fr}} \right)^2 \frac{e^{-2ik_{Fr}}}{(k_{Fr})^2} + \text{c.c.} = \frac{-4i\pi^4 \ln 2\lambda\nu^2\tau}{(1+2E\tau)^2} + \text{c.c.} = 0. \quad (\text{C.11})$$



### С.3 Диаграмма (g)

При вычислении этой диаграммы в импульсном представлении возникает интеграл от пары функций Грина  $G_E G_E$ . При взятии интеграла "по  $\xi$ " полюса функций Грина оказываются с одной стороны действительной оси, следовательно, такая диаграмма будет подавлена.

### С.4 Диаграмма (h)

Эта диаграмма компенсируется аналогичной диаграммой, описывающей взаимодействие с фоном положительных ионов.

## Приложение D. Случай неточечного э-э взаимодействия

В этом разделе мы рассматриваем случай неточечного э-э взаимодействия вида

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nu^{-1} \lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{D.1})$$

Мы исследуем, как изменится  $P$  в выражении (31) [см. также (C.1)].

Диаграмма (a)

1) Область  $EE' > 0$ .

В этом случае

$$\begin{aligned} P_{a1} &= \int d\mathbf{r} \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^R(iE', q) \\ &\quad G^A(-iE, p) G^A(-iE', k') G^A(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(q - k) = \\ &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') (d\mathbf{s}) G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^R(iE', q) \\ &\quad G^A(-iE, p) G^A(-iE', k') G^A(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(\mathbf{s}) e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{s})\mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Вычисляя в координатном представлении, имеем:

$$\begin{aligned} P_{a1} &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' G^R(iE, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) G^A(-iE', r) [G^R(iE) G^A(-iE)](r) [G^R(iE') G^A(-iE')](|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \lambda(\mathbf{r}') \\ &= \frac{(-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2}{(1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \int d\mathbf{r}' \lambda(\mathbf{r}') \frac{1}{k_F^3} K_{a1}(\mathbf{r}') = (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \frac{1}{k_F^3} \int (d\mathbf{q}) \lambda(q) K_{a1}(q), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

где ядро  $K_{a1}(q)$  is defined as

$$\begin{aligned} K_{a1}(q) &= \frac{k_F^3}{(-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2} \left[ \int d\mathbf{r} [G^R(iE) G^A(-iE)](r) G^A(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] \times \\ &\quad \times \left[ \int d\mathbf{r} [G^R(iE') G^A(-iE')](r) G^R(iE, r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Два интеграла в уравнении (D.4) комплексно сопряжены друг другу. Вычислим:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} [G^R(iE) G^A(-iE)](r) G^A(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} &= -\frac{2\pi^2\nu^2\tau}{1 + 2E\tau} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{\sin k_F r}{(k_F r)^2} e^{-ik_F r} \\ &= -\frac{2\pi^2\nu^2\tau 2\pi}{1 + 2E\tau} \int_0^\infty dr \frac{\sin k_F r}{k_F^2} e^{-ik_F r} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{-iqr \cos\theta} \\ &= -\frac{8\pi^3\nu^2\tau}{k_F^2 q (1 + 2E\tau)} \int_0^\infty dr \frac{\sin k_F r}{r} \sin qr e^{-ik_F r} = \frac{8\pi^3\nu^2\tau}{k_F^2 q (1 + 2E\tau)} \left( \frac{1}{4} \ln \frac{|q - 2k_F|}{q + 2k_F} + \frac{i\pi}{4} \theta(2k_F - q) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Тогда получим для ядра  $K_{a1}(q)$ :

$$K_{a1}(q) = \frac{\pi^2}{k_F^2 q^2 (1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \left( \ln^2 \frac{q + 2k_F}{|q - 2k_F|} + \pi^2 \theta(2k_F - q) \right). \quad (\text{D.6})$$

2) Область  $E > 0, E' < 0$  or  $E < 0, E' > 0$

В этом случае

$$\begin{aligned}
P_{a2} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^A(iE', q) \\
&\quad G^A(-iE, p) G^R(-iE', k') G^R(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(q - k) + \text{c.c.} = \quad (\text{D.7}) \\
&= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') (d\mathbf{s}) G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^A(iE', q) \\
&\quad G^A(-iE, p) G^R(-iE', k') G^R(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' - \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(\mathbf{s}) e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{k} - \mathbf{s})\mathbf{r}'} + \text{c.c.}
\end{aligned}$$

Вычисляем в координатном представлении:

$$\begin{aligned}
P_{a2} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' G^R(iE, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) G^R(-iE', r) \times \\
&\quad \times [G^R(iE) G^A(-iE)](r) [G^R(-iE') G^A(iE')] (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \lambda(\mathbf{r}') + \text{c.c.} \\
&= \frac{1}{2} (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \int d\mathbf{r}' \lambda(\mathbf{r}') \frac{1}{k_F^3} K_{a2}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \frac{1}{k_F^3} \int (d\mathbf{q}) \lambda(q) K_{a2}(q),
\end{aligned}$$

где ядро  $K_{a2}(q)$  отличается от ядра  $K_1(q)$  заменой одной опережающей функции Грина на запаздывающую.

$$\begin{aligned}
K_2(q) &= \frac{k_F^3}{2(-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2} \left[ \int d\mathbf{r} [G^R(iE) G^A(-iE)](r) G^R(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] \times \quad (\text{D.8}) \\
&\quad \times \left[ \int d\mathbf{r} [G^R(-iE') G^A(iE')] (r) G^R(iE, r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] + \text{c.c.}
\end{aligned}$$

Вычисляя аналогичным образом, получим:

$$K_{a2}(q) = \frac{\pi^2}{k_F q^2 (1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \left( \ln^2 \frac{q + 2k_F}{|q - 2k_F|} - \pi^2 \theta(2k_F - q) \right). \quad (\text{D.9})$$

Полный вклад диаграммы (а) задается ядром

$$K_a(q) = K_{a1}(q) + K_{a2}(q) = \frac{2\pi^2}{k_F q^2 (1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \ln^2 \frac{q + 2k_F}{|q - 2k_F|}. \quad (\text{D.10})$$

Диаграмма (b)

1) Область  $EE' > 0$

Аналогично предыдущему вычислению имеем:

$$\begin{aligned}
P_{b1} &= \int d\mathbf{r} \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^R(iE', q) \\
&\quad G^A(-iE, p) G^A(-iE', k') G^A(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' + \mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(p - q) = \quad (\text{D.11}) \\
&= \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') (d\mathbf{s}) G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^R(iE', q) \\
&\quad G^A(-iE, p) G^A(-iE', k') G^A(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' + \mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(\mathbf{s}) e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{s})\mathbf{r}'}.
\end{aligned}$$

Вычисляя в координатном представлении, имеем:

$$\begin{aligned}
P_{\text{IIa}} &= \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' G^R(iE, r) G^A(-iE', r) [G^R(iE) G^A(-iE)] (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) [G^R(iE') G^A(-iE')] (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \lambda(\mathbf{r}') \\
&= (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \int d\mathbf{r}' \lambda(\mathbf{r}') \frac{1}{k_F^3} K_{b1}(\mathbf{r}') = (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \frac{1}{k_F^3} \int (d\mathbf{q}) \lambda(q) K_{b1}(q), \quad (\text{D.12})
\end{aligned}$$

где ядро  $K_{b1}(q)$  определено так:

$$K_{b1}(q) = \frac{k_F^3}{(-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2} \left[ \int d\mathbf{r} G^R(iE, r) G^A(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] \times \quad (D.13)$$

$$\times \left[ \int d\mathbf{r} [G^R(iE)G^A(-iE)](r) [G^R(iE')G^A(-iE')](r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right].$$

Посчитаем интегралы:

$$\int d\mathbf{r} G^R(iE, r) G^A(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \pi^2 \nu^2 \int d\mathbf{r} \frac{e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{(k_F r)^2} = \pi^2 \nu^2 \frac{4\pi}{q} \frac{1}{k_F^2} \int_0^\infty \frac{\sin qr}{r} dr = \frac{2\pi^4 \nu^2}{q k_F^2} \quad (D.14)$$

и

$$\int d\mathbf{r} [G^R(iE)G^A(-iE)](r) [G^R(iE')G^A(-iE')](r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \frac{4\pi^2 \nu^2 \tau^2}{(1+2E\tau)(1+2E'\tau)} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{\sin^2 k_F r}{(k_F r)^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 \nu^2 \tau^2}{(1+2E\tau)(1+2E'\tau)} \frac{4\pi}{q} \frac{1}{k_F^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 k_F r}{r} \sin qr dr = \frac{4\pi^4 \nu^2 \tau^2}{q k_F^2 (1+2E\tau)(1+2E'\tau)} \theta(2k_F - q). \quad (D.15)$$

Тогда:

$$K_{b1}(q) = \frac{2\pi^4}{k_F q^2 (1+2E\tau)(1+2E'\tau)} \theta(2k_F - q). \quad (D.16)$$

b) Область  $E > 0, E' < 0$  or  $E < 0, E' > 0$

Здесь

$$P_{b2} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^A(iE', q)$$

$$G^A(-iE, p) G^R(-iE', k') G^R(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' + \mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(p - q) + \text{c.c} = \quad (D.17)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \int (d\mathbf{p}) (d\mathbf{q}) (d\mathbf{k}) (d\mathbf{k}') (d\mathbf{s}) G^R(iE, p) G^R(iE, k) G^A(iE', q)$$

$$G^A(-iE, p) G^R(-iE', k') G^R(-iE', q) e^{i(-\mathbf{k}' + \mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{k})\mathbf{r}} \lambda(\mathbf{s}) e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{s})\mathbf{r}'} + \text{c.c.}$$

Вычисляя в координатном представлении, имеем:

$$P_{b2} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' G^R(iE, r) G^R(-iE', r) [G^R(iE)G^A(-iE)](|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) [G^R(-iE')G^A(iE')] (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \lambda(\mathbf{r}')$$

$$+ \text{c.c}$$

$$= \frac{1}{2} (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \int d\mathbf{r}' \lambda(\mathbf{r}') \frac{1}{k_F^3} K_{b2}(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} (-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2 \frac{1}{k_F^3} \int (d\mathbf{q}) \lambda(q) K_{b2}(q),$$

где

$$K_{b2}(q) = \frac{1}{2} \frac{k_F^3}{(-\pi\nu)^2 (2\pi\nu\tau)^2} \left[ \int d\mathbf{r} G^R(iE, r) G^R(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] \times$$

$$\times \left[ \int d\mathbf{r} [G^R(iE)G^A(-iE)](r) [G^R(-iE')G^A(iE')](r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right] + \text{c.c.} \quad (D.18)$$

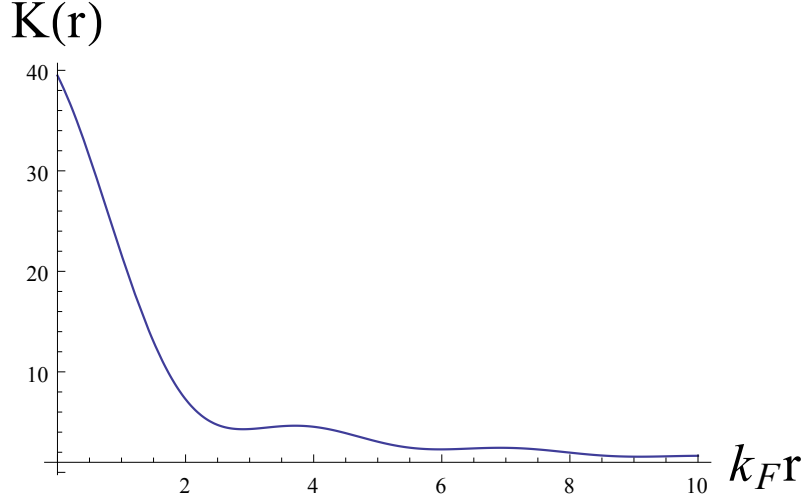


Рис. 15: Зависимость ядра  $K(r)$  [уравнение. (D.22)]. Асимптотика на больших  $r$  есть  $K(r) \sim 1/r$ .

Считаем интегралы:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} G^R(iE, r) G^R(-iE', r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} &= \pi^2 \nu^2 \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{e^{2ik_F r}}{(k_F r)^2} = \pi^2 \nu^2 \frac{4\pi}{q} \frac{1}{k_F^2} \int_0^\infty \frac{\sin qr}{r} e^{2ik_F r} dr = \\ &= \frac{4\pi^3 \nu^2}{q k_F^2} \left( \frac{i}{2} \ln \frac{q + 2k_F}{|q - 2k_F|} + \frac{\pi}{2} \theta(q - 2k_F) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Находим

$$K_{b2}(q) = \frac{4\pi^3}{k_F q^2 (1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \frac{\pi}{2} \theta(q - 2k_F) \theta(2k_F - q) = 0. \quad (\text{D.20})$$

Таким образом, полный вклад второй диаграммы имеет вид

$$K_b(q) = K_{b1}(q) + K_{b1}(q) = \frac{2\pi^4}{k_F q^2 (1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \theta(2k_F - q). \quad (\text{D.21})$$

Суммируя выражения для ядер (D.10) и (D.21) находим полное выражение:

$$K(q) = K_I(q) + K_{II}(q) = \frac{2\pi^2}{k_F q^2 (1 + 2E\tau)(1 + 2E'\tau)} \left[ \ln^2 \frac{q + 2k_F}{|q - 2k_F|} + \pi^2 \theta(2k_F - q) \right]. \quad (\text{D.22})$$

Фурье-образ этой величины  $K(r)$  изображен на Рис. 15.

Полное выражение, отвечающее вкладу обеих диаграмм содержит в качестве множителя свертку  $K(r)$  с  $\lambda(r)$ :

$$P \propto \int d\mathbf{r} \lambda(r) K(r). \quad (\text{D.23})$$

Таким образом из Рис. 15 следует, что размытие  $\lambda(r)$  на масштабе  $k_F$  приводит лишь к домножению диаграммного вклада на численный множитель  $\beta \lesssim 1$ , так что общая картина явления не изменяется.

## Список литературы

- [1] A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **35**, 1558 (1958); **36**, 319 (1959) [Sov. Phys. JETP **8**, 1090 (1959); **9**, 220 (1959)].
- [2] P. W. Anderson, J. Phys. Chem. Sol. **11**, 26 (1959).
- [3] Yu. N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **64**, 719 (1973) [Sov. Phys. JETP **37**, 336 (1973)].
- [4] S. Maekawa and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jpn. **51**, 1380 (1982).
- [5] S. Maekawa, H. Ebisawa and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Jpn. **52**, 1352 (1983).
- [6] H. Takagi and Y. Kuroda, Solid State Commun. **41**, 643 (1982).
- [7] H. Ebisawa, H. Fukuyama, and S. Maekawa, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 2257 (1985).
- [8] A. M. Finkel'stein, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **45**, 37 (1987) [JETP Lett **45**, 46 (1987)].
- [9] A.M. Finkel'stein, Physica B **197**, 636 (1994)
- [10] J. M. Graybeal and M. R. Beasley, Phys. Rev. B **29**, 4167(R) (1984).
- [11] Y. Ivry, C.-S. Kim, A. E. Dane, D. De Fazio, A. N. McCaughan, K. A. Sunter, Q. Zhao, and K. K. Berggren, Phys. Rev. B **90**, 214515 (2014).
- [12] A. A. Теплоу, ЖЭТФ **71**, 802 (1976).
- [13] M. Chand, G. Saraswat, A. Kamlapure, M. Mondal, S. Kumar, J. Jesudasan, V. Bagwe, L. Benfatto, V. Tripathi, P. Raychaudhuri, Phys. Rev. B **85**, 014508 (2012).
- [14] H. Raffy, R. B. Laibowitz, P. Chaudhari, and S. Maekawa, Phys. Rev. B **28**, 6607 (1983).
- [15] N. Ya. Fogel, E. I. Buchstab, A. S. Pokhila, A. I. Erenburg, and V. Langer, Phys. Rev. B **53**, 71 (1995).
- [16] F. Couedo, O. Crauste, L. Berge, Y. Dolgorouky, C. Marrache-Kikuchi, and L. Dumoulin, Journal of Physics: Conference Series **400** 022011 (2012).
- [17] B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Phys. Rev. Lett. **101**, 157006 (2008).
- [18] P. Szabó, T. Samuely, V. Hašková, J. Kačmarčík, M. Žemlička, M. Grajcar, J. G. Rodrigo, and P. Samuely, Phys. Rev. B **93**, 014505 (2016).
- [19] K. Makise, T. Odou, S. Ezaki, T. Asano and B. Shinozaki, Mater. Res. Express **2**, 106001 (2015).

- [20] Y. Noat, V. Cherkez, C. Brun, T. Cren, C. Carbillet, F. Debontridder, K. Ilin, M. Siegel, A. Semenov, H.-W. Hübers and D. Roditchev, *Phys. Rev. B* **88**, 014503 (2013).
- [21] P.A. Lee, T.V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 287 (1985).
- [22] J. L. Langer, T. Neal, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 984 (1966).
- [23] Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, *Письма в ЖЭТФ*, **30**, 248 (1979).
- [24] T. R. Kirkpatrick and D. Belitz, *Phys. Rev. B* **34**, 2168 (1986).
- [25] Б. Л. Альшулер и А. Г. Аронов, *ЖЭТФ*, **77**, 2028 (1979).
- [26] B. L. Altshuler and A. G. Aronov in *Electron-electron Interaction in Disordered Systems*, eds. A. L. Efros, M. Pollak (North-Holland, Amsterdam, 1985).
- [27] B. L. Altshuler, A. G. Aronov and P. A. Lee, *PRL* **44**, 1288 (1980).
- [28] G. Zala, B. N. Narozhny, I. L. Aleiner, *Phys. Rev. B* **64**, 214204 (2001).
- [29] M. A. Skvortsov and M. V. Feigel'man, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 057002 (2005).
- [30] H. Kim, A. Ghimire, S. Jamali, T. K. Djidjou, J. M. Gerton, and A. Rogachev, *Phys. Rev. B* **86**, 024518 (2012).
- [31] N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Shirkov, *A New Method in the Theory of Superconductivity* (Consultants Bureau, New York, 1959).
- [32] P. Morel and P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **125**, 1263 (1962).
- [33] W. L. McMillan, *Phys. Rev.* **167**, 331 (1967).