

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Флуктуационная проводимость чистых
сверхпроводящих пленок»
(Дипломная работа магистра)

студента 028 группы
Степанов Н.А.
научный руководитель
д.ф.-м.н. Скворцов М.А.

Черноголовка, 2016

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Флуктуационная проводимость	3
1.2	Ранее полученные результаты	4
1.3	Постановка задачи	5
2	Общие выражения для проводимости	8
2.1	Поправки к проводимости	8
2.2	Исходные диаграммы для проводимости	8
2.3	Общие выражения для поправок	10
3	Вблизи критической температуры	13
3.1	Упрощения вблизи перехода	13
3.2	DOS и регулярная часть МТ поправки	14
3.3	Вклад Асламазова-Ларкина	15
3.4	Аномальная МТ поправка	19
3.5	Общая поправка к проводимости вблизи T_c	22
4	Вдали от критической температуры	23
4.1	Упрощения вдали от перехода	23
4.2	Диффузная область вдали от перехода	24
4.3	Баллистический режим	27
5	Заключение	29
	Приложения	30
1.	Приложение А. Пропагатор вблизи перехода	30
6	Список литературы	31

Глава 1

Введение

1.1 Флуктуационная проводимость

Хорошо известно, что ниже критической температуры сопротивление сверхпроводника равно нулю. Ниже перехода в сверхпроводнике образуются устойчивые куперовские пары, которые не рассеиваются в металле, в отличие от обычных электронных состояний. Такие устойчивые состояния обеспечивают бесконечную проводимость. Выше точки перехода устойчивые куперовские пары не могут существовать. Но могут появляться флуктуационные пары, которые в состоянии перенести заряд до момента, пока сами не разрушатся теми же тепловыми флуктуациями. Этот эффект, называемый парапроводимостью, впервые был исследован в работе Асламазова и Ларкина (AL) [1].

Наряду с прямым вкладом куперовских пар в проводимость существует два других. Один из них, называемый вкладом DOS, связан с тем, что электроны, создавая флуктуационные пары, перестают вносить вклад в электронную проводимость, чем, в большинстве случаев, понижают ее. Наконец, существует еще и третий, чисто квантовый, вклад Маки-Томпсона (MT) в проводимость [3, 4]. Этот вклад связывают с когерентным рассеянием электронов на флуктуационных куперовских парах.

Поведение флуктуационной проводимостью зависит от близости к переходу и чистоты образца. В нулевом магнитном поле, разные случаи отвечают различным соотношением между характерными пространственными масштабами: длиной свободного пробега l , нультемпературной длиной когерентности ξ_0 и расходящейся вблизи перехода тепловой длиной когерентности $\xi(T)$. Наиболее изученным является грязный предел, когда длина свободного пробега оказывается самым малым масштабом в задаче ($l \ll \xi_0$) [7]. Вблизи перехода чистый предел ($l \gg \xi_0$) принято разделять на две области: умеренно чистый предел $\xi_0 \ll l \ll \xi(T)$ и суперчистый предел $\xi(T) \ll l$.

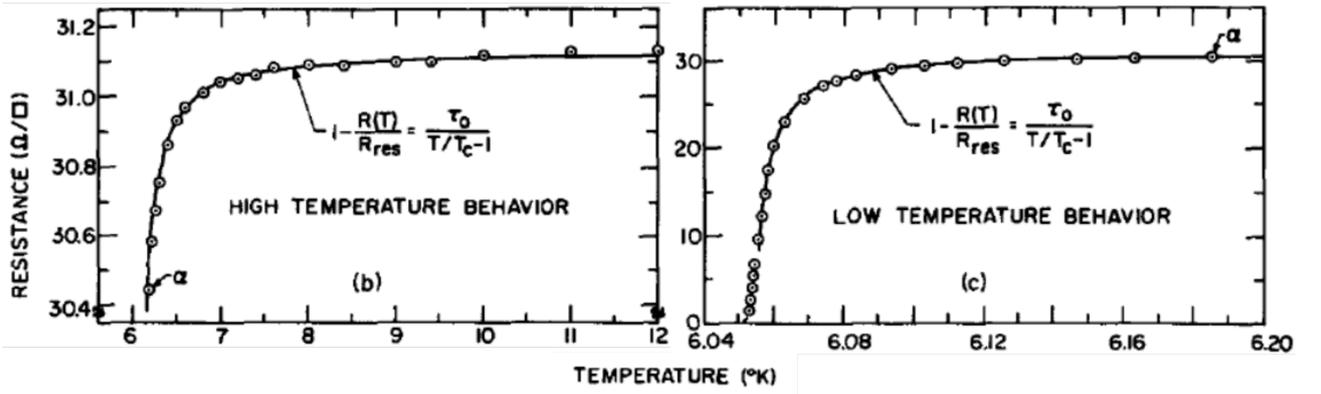


Рис. 1.1: Флуктуационная проводимость пленок Висмута [5].

1.2 Ранее полученные результаты

Первый эксперимент, где наблюдалась флуктуационная проводимость, был проведен Гловером на пленках Висмута в 1967 году [5]. Полученный экспериментальный результат – проводимость хорошо описывалась зависимостью $1 - R(T)/R_{res} = \tau_0/(T/T_c - 1)$ (Рис. 1.1). Тогда еще не было теоретического описания этого явления.

Основы микроскопической теории флуктуаций сверхпроводников были заложены Асламазовым и Ларкиным (1968) [1]. Они вычислили самые сингулярные поправки по близости к переходу к проводимости в размерностях $d = 1, 2, 3$. Для сверхпроводящих пленок поправка к проводимости выглядит так (тут и далее в единицах e^2/h):

$$\delta\sigma_{AL} = \frac{1}{16\epsilon}, \quad (1.1)$$

где $\epsilon = \ln(T/T_c) \ll 1$. Стоит отметить, что поправка остается неизменной во всех режимах, будь то грязный или чистый образец.

В следующей важной работе по этой области, проделанной К. Маки [3], было исследовано еще несколько вкладов в проводимость в диффузном режиме. Самым интересным результатом стал тот факт, что в менее сингулярных по ϵ поправках имеется расходящийся на малых импульсах член. Такая расходимость означает, что модели используемые ранее не учитывали какое-то важное обстоятельство. В последующей работе R.S. Thompson [4] предложил обрезать интеграл на длине рассеяния с переворотом спина. В последствии в связи с развитием теории металлов стало ясно, что аномальный вклад Маки-Thompson(АМТ), как и локализационная поправка к проводимости, [6] обрезается на длине сбоя фазы L_ϕ . В итоге, аномальный вклад Маки-Thompson(АМТ) для пленок стал иметь вид [3, 4]:

$$\delta\sigma_{AMT} = \frac{1}{8} \frac{\ln(\epsilon/\gamma_\phi)}{\epsilon - \gamma_\phi}, \quad \gamma_\phi = \frac{\pi}{8T_c\tau_\phi}, \quad (1.2)$$

где τ_ϕ время сбоя фазы. При $\epsilon \gg \gamma_\phi$, эта поправка может стать более важной, чем привычный вклад Асламазова-Ларкина. Она уже не имеет той универсальности и зависит от примесей через время сбоя фазы, однако в умеренно-чистом случае сохраняет такой же

вид с переопределенной γ_ϕ [7] см. формулу (3.55). В суперчистом режиме АМТ вклад был вычислен в работе [8]:

$$\delta\sigma_{\text{AMT}} \propto \frac{T_c\tau}{\sqrt{\epsilon}} \ln(T_c\tau\sqrt{\epsilon}), \quad (1.3)$$

который в большой области параметров оказывается самым важным.

Поправки DOS и регулярная часть МТ в грязном пределе $T_c\tau \ll 1$ имеют вид: [14, 7]:

$$\delta\sigma_{\text{DOS}}^{\text{dirty}} = \delta\sigma_{\text{RMT}}^{\text{dirty}} = -\frac{14\zeta(3)}{\pi^4} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (1.4)$$

Те же самые величины были исследованы в умеренно чистом случае $1 \ll T_c\tau \ll 1/\sqrt{\epsilon}$ [11]:

$$\delta\sigma_{\text{DOS}}^{\text{clean}} = -\frac{2\pi^2}{7\zeta(3)} (T_c\tau)^2 \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad \delta\sigma_{\text{RMT}}^{\text{clean}} = -\frac{2}{\pi} (T_c\tau)^1 \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (1.5)$$

В чистом случае поправка, предсказываемая формулой (1.5), растет пропорционально τ^2 , то есть быстрее друдевской проводимости. Понимая, что в пределе $\tau \rightarrow \infty$ ответа пропорционального τ^2 быть не может, авторы [10] высказали гипотезу, по которой главный член в $\delta\sigma_{\text{DOS}}^{\text{clean}}$ должен сокращаться аномальным вкладом МТ. Данное предположение основано на том, что, несмотря на разные зависимости от $T - T_c$, на границе умеренно чистой и сверхчистой областей вклады DOS (1.5) и АМТ оказываются одного порядка.

В диффузной области вдали от перехода флуктуационное спаривание куперовских пар подавлено температурой, и в этом режиме поправки становятся малыми. Роль разных вкладов меняется местами, в отличии от критической области, самым важным вкладом становится DOS+МТ [14, 15]:

$$\delta\sigma_{\text{DOS+RMT}} \propto \ln \frac{\ln 1/T_c\tau}{\ln T/T_c}. \quad (1.6)$$

Низкочастотная зависимость флуктуационной проводимости в случае абсолютно чистого сверхпроводника (примесное рассеяние отсутствует, $l = \infty$) была рассмотрена в работе [9]. В ней было показано, что несмотря на то, что DOS и МТ вклады отдельно имеют сингулярную зависимость от частоты типа $\delta\sigma(\omega) = A\omega^{-2} + B\omega^{-1} + C\omega^0 + \dots$, первые три члена ряда Лорана сокращают друг друга, если поправки МТ и DOS рассматривать вместе. В работе [10] была рассмотрена статическая проводимость ($\omega = 0$) в образце с малым числом примесей ($T\tau \gg 1$). В этой работе утверждается, что параметр $1/\tau$ играет роль частоты, описывается аналогичное сокращение трех ведущих членов ряда Лорана по параметру $T\tau$ и делается утверждение, что флуктуационная проводимость чистого сверхпроводника ведет себя как $O(1/T\tau)$.

1.3 Постановка задачи

В этой работе мы ставим себе задачу вывести общее выражение для флуктуационной проводимости двумерных сверхпроводящих пленок при произвольной силе примесей

и температуре $T > T_c$ и его исследовать его вблизи и вдали от перехода. Для описания электронной системы мы будем использовать модель ферми-газа с притяжением в присутствии примесей.

1.3.1 Электроны и примеси

В качестве модели примесей мы выбираем гауссов дельта-коррелированный шум с коррелятором:

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi\nu\tau}. \quad (1.7)$$

Такая модель соответствует большому числу слабых точечных примесей. В диффузном режиме вся роль примесей сводится к коэффициенту диффузии D и не зависит от микроскопических деталей. В баллистическом случае предположение (1.7) становится модельным.

Для начала укажем как меняется поведение ферми-газа в присутствии примесей. Запавдывающая, опережающая и мацубаровская функция Грина ферми газа [12]:

$$G^{R,A}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \left(\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) \pm \frac{i}{2\tau} \right)^{-1}, \quad G_{\varepsilon_k}(\mathbf{p}) = \left(i\varepsilon_k - \xi(\mathbf{p}) + i\frac{\text{sign } \varepsilon_k}{2\tau} \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

Диаграммная техника позволяет, работая в рамках теории возмущений, суммировать бесконечное число самых важных вкладов. Чтобы учесть влияние примесей на поправки к проводимости, нужно вычислить примесную лестницу – куперон.

Ступенька примесной лестницы для произвольного импульса и мацубаровских энергий может быть записана в виде:

$$P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q) = \int (d\mathbf{p}) G_{\varepsilon_1}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) G_{\varepsilon_2}(-\mathbf{p}) = \theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2) 2\pi\nu\tau f_1(\omega, q). \quad (1.9)$$

Наличие $\theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2)$ обеспечивает противоположные знаки энергий ε_1 и ε_2 (иначе полюса в интеграле (1.9) оказываются с одной стороны и результат становится нулевым), а их разность обозначена посредством $\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Входящее в выражение (1.9) функция $f_d(\omega)$ есть результат усреднения по единичной сфере в d -мерном пространстве:

$$f_1(\omega, q) = \left\langle \frac{1}{1 + |\omega|\tau + iqln_x} \right\rangle_{\mathbf{n}}. \quad (1.10)$$

В явном виде, для пленок и объемных образцов:

$$f_1^{2D}(\omega, q) = \frac{1}{\sqrt{(1 + |\omega|\tau)^2 + (ql)^2}}, \quad f_1^{3D}(\omega, q) = \frac{1}{ql} \arctan \frac{ql}{1 + |\omega|\tau}. \quad (1.11)$$

Суммируя стандартную лестничную последовательность, находим явное выражение для куперона при произвольном беспорядке:

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q) = \frac{P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q)}{1 - P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, q)/(2\pi\nu\tau)} = \theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2) 2\pi\nu\tau \frac{f_q(\omega)}{1 - f_q(\omega)}. \quad (1.12)$$

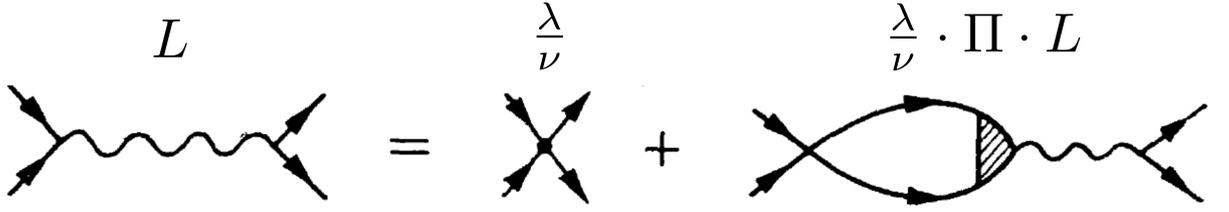


Рис. 1.2: Уравнение Дайсона для флуктуационного пропагатора.

1.3.2 Флуктуационный пропагатор

В качестве механизма куперовского спаривания, мы выбираем модель постоянного взаимодействия между электронами в узкой полосе шириной ω_D (ширина фононного спектра) возле поверхности ферми.

В такой модели пропагатор сверхпроводящих флуктуаций $L(\Omega, k)$ на мацубаровских частотах определяется посредством уравнения Дайсона, графически показанного на рисунке (1.2):

$$-[\nu L(\Omega, k)]^{-1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{\Pi(\Omega, k)}{\nu}, \quad (1.13)$$

где λ — константа притяжения в куперовском канале, а $\Pi(\Omega, q)$ — просуммированный по мацубаровским энергиям куперон:

$$\Pi(\Omega_k, q) = T \sum_{\varepsilon_n} C(\varepsilon_{n+k}, -\varepsilon_n, q) = 4\pi\nu\tau T \sum_{\varepsilon>0}^{\omega_D} \frac{1}{f_q^{-1}(2\varepsilon + |\Omega_k|) - 1}, \quad (1.14)$$

где $\varepsilon_n = \pi T(2n + 1)$. Исключая λ с помощью уравнения на T_c , получаем общее выражение для флуктуационного пропагатора, где суммирование может быть распространено до бесконечности. Поскольку ниже мы будем работать в келдышевском представлении, запишем выражения для запаздывающей и опережающей компоненты флуктуационного пропагатора:

$$-[\nu L^{R,A}(\Omega, q)]^{-1} = \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{4\pi T\tau}{f_1^{-1}[4\pi T(n + 1/2) \mp i\Omega, q] - 1} \right\}, \quad (1.15)$$

где

$$\epsilon = \ln \frac{T}{T_c} \quad (1.16)$$

стандартным образом определяет безразмерную близость к тепловому сверхпроводящему переходу. В двумерном случае ($d = 2$) выражение (1.15) совпадает с (7.55) из книги [7].

Глава 2

Общие выражения для проводимости

2.1 Поправки к проводимости

Электронная проводимость – это отклик тока на электрическое поле: $j(\omega) = \sigma(\omega)E(\omega)$. Следуя общим правилам вычисления линейного отклика, мы будем использовать формулу Кубо, а значит, нам нужно вычислить запаздывающий коррелятор ток-ток. Для флуктуационных поправок до усреднения по примесям, имеется всего 3 типа скелетных диаграмм (AL, DOS, MT). В грязном случае после усреднения возникают диаграммы, представленные на рисунке 2.1. При выходе за грязный предел необходимо учитывать те же скелетные диаграммы, однако при усреднении по беспорядку дают вклад также графики, не содержащие куперонов на концах флуктуационного пропагатора.

2.2 Исходные диаграммы для проводимости

Для получения общего выражения, справедливого при произвольной температуре и силе беспорядка, оказывается значительно удобнее использовать не мацубаровскую, а келдышевскую диаграммную технику. До усреднения по случайному потенциалу имеются всего три скелетных диаграммы: DOS, MT и AL, в одной из вершин которых стоит квантовая компонента скорости $\hat{v}_2 = \sigma_1 \hat{v}$, а в другой — классическая $\hat{v}_1 = \hat{v}$. Исходные выражения для вкладов в однородное по пространству ($q = 0$) ядро отклика имеют вид:

$$Q^{\text{DOS}}(\omega) = \frac{i}{2} \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \\ \times \text{tr}\{\sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \gamma^b G_E(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \hat{v}_x G_{E-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0)\} L_{ab}(\Omega; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (2.1)$$

$$Q^{\text{MT}}(\omega) = \frac{i}{2} \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \\ \times \text{tr}\{\sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{v}_x \tilde{G}_{E-\Omega-\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \gamma^b G_{E-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0)\} L_{ab}(\Omega; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3), \quad (2.2)$$

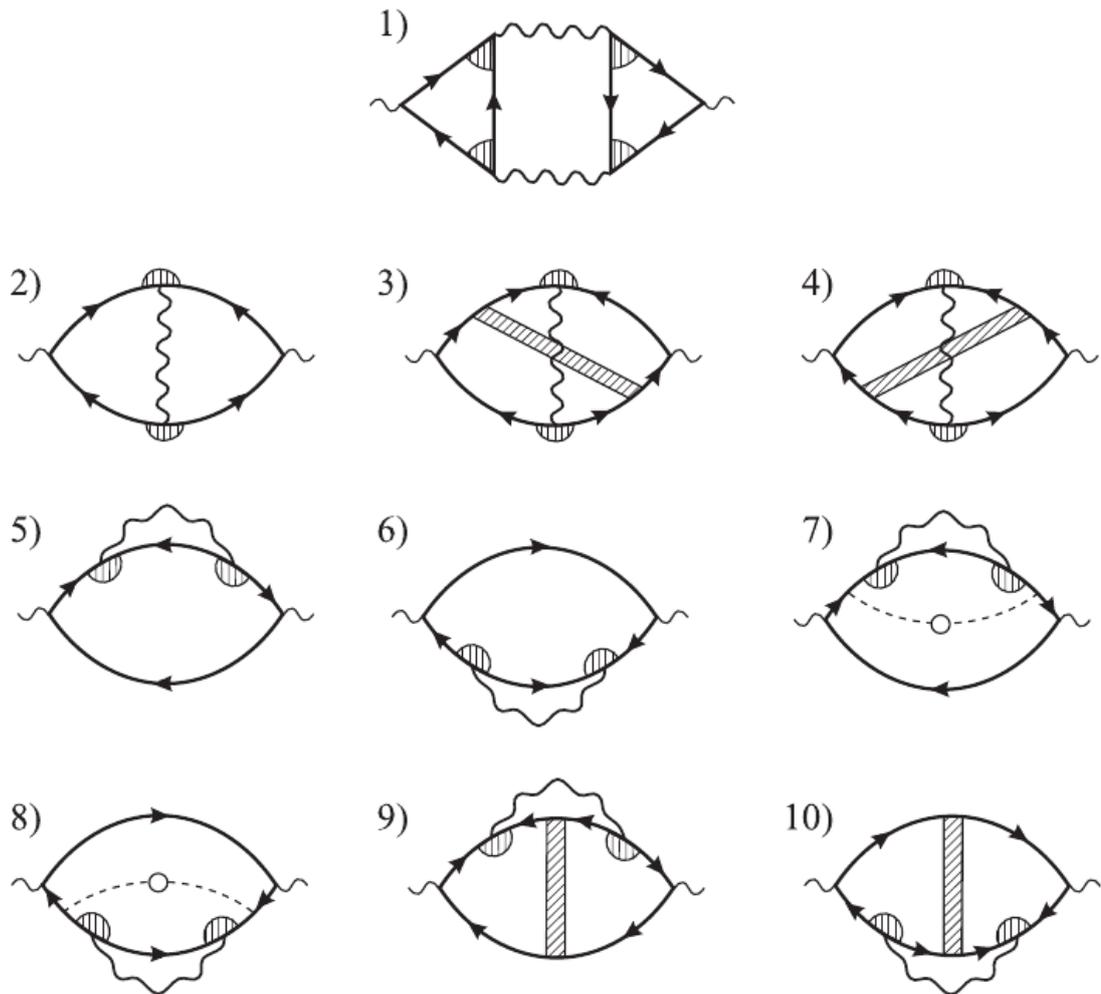


Рис. 2.1: Диаграммы для коррелятора ток-ток в грязном пределе: вклады Асламазова-Ларкина (1), Маки-Томпсона (2-4) и вклад от изменения плотности состояний (5-10).

$$\begin{aligned}
Q^{\text{AL}}(\omega) = & -2 \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{dE'}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 d\mathbf{r}_5 \\
& \times \text{tr}\{\sigma_1 \hat{v}_x G_E(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \gamma^a \tilde{G}_{E-\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \gamma^b G_{E-\omega}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)\} \\
& \times \text{tr}\{\hat{v}_x G_{E'-\omega}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \gamma^c \tilde{G}_{E'-\Omega}(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5) \gamma^d G_{E'}(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_3)\} \\
& \times L_{ad}(\Omega; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5) L_{cb}(\Omega - \omega; \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Здесь G и \tilde{G} — функции Грина электронов и дырок. После келдышевского поворота они имеют стандартную структуру [13]:

$$G_E = \begin{pmatrix} G_E^R & G_E^K \\ 0 & G_E^A \end{pmatrix}, \quad G_E^K = F(E)[G_E^R - G_E^A], \quad (2.4)$$

где $F(E) = \tanh(E/2T)$ — равновесная функция распределения фермионов. Функция Грина для дырок выражается через функцию Грина для электронов с помощью соотношений

$$G_E^{R,A}(\mathbf{p}) = G_{-E}^{A,R}(-\mathbf{p}). \quad (2.5)$$

Флуктуационный пропагатор имеет вид

$$L(\omega, q) = \begin{pmatrix} L^K(\omega, q) & L^R(\omega, q) \\ L^A(\omega, q) & 0 \end{pmatrix}, \quad L^K(\omega, q) = B(\omega)[L^R(\omega, q) - L^A(\omega, q)], \quad (2.6)$$

где $B(\omega) = \coth(\omega/2T)$ — равновесная функция распределения бозонов. Через γ^i обозначены матрицы $\gamma^1 = \sigma_0$ и $\gamma^2 = \sigma_1$.

2.3 Общие выражения для поправок

Поправка к статической проводимости (в единицах e^2/\hbar) определяется из уравнения

$$\delta\sigma = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Q(\omega)}{\omega}. \quad (2.7)$$

Извлекая линейный по ω член, находим

$$\delta\sigma = \delta\sigma^{\text{DOS}(1)} + \delta\sigma^{\text{DOS}(2)} + \delta\sigma^{\text{MT}(1)} + \delta\sigma^{\text{MT}(2)} + \delta\sigma^{\text{AL}}, \quad (2.8)$$

где явные формулы для различных вкладов приведены ниже. Вклад диаграммы DOS (без зачеркивания куперона (5)-(8) на рис. (2.1)):

$$\begin{aligned}
\delta\sigma^{\text{DOS}(1)} = & -i\pi\nu D\tau^2 \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} F'(E) \\
& \left\{ L^K(\Omega) [(f_1^R + f_3^R)(\gamma^R)^2 + (f_1^A + f_3^A)(\gamma^A)^2] \right. \\
& + L^R(\Omega) F(E - \Omega) [(f_1^R + f_3^R)(\gamma^R)^2 + f_1^A] \\
& \left. - L^A(\Omega) F(E - \Omega) [(f_1^A + f_3^A)(\gamma^A)^2 + f_1^R] \right\}. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Существует еще диаграмма DOS с дополнительным купероном см. Рис. (2.1) (9,10), однако в диффузном режиме она, как и член МТ(2), не имеет особенностей на малых импульсах, и поэтому не является сингулярным при $T \rightarrow T_c$. А также имеет дополнительную малость $1/(T\tau)$ в баллистическом пределе. Вклад диаграммы МТ (без зачеркивания купероном (2) Рис. (2.1)):

$$\begin{aligned} \delta\sigma^{\text{MT}(1)} = & -i\pi\nu D\tau^2 \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} F'(E) \\ & \left\{ L^K(\Omega) (f_3^R(\gamma^R)^2 + f_3^A(\gamma^A)^2 - (f_1^R + f_1^A)\gamma^R\gamma^A) \right. \\ & - L^A(\Omega)F(E - \Omega) [f_3^A(\gamma^A)^2 - f_3^R(\gamma^R)^2 - (f_1^R + f_1^A)\gamma^R\gamma^A - 2f_2^R\gamma^R] \\ & \left. - L^R(\Omega)F(E - \Omega) [f_3^A(\gamma^A)^2 - f_3^R(\gamma^R)^2 + (f_1^R + f_1^A)\gamma^R\gamma^A + 2f_2^A\gamma^A] \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вклад диаграммы МТ с дополнительным купероном ((3)-(4) на Рис. (2.1)):

$$\begin{aligned} \delta\sigma^{\text{MT}(2)} = & i\pi\nu D\tau^2 \int \frac{dE}{2\pi} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} F'(E) \\ & \left\{ L^K(\Omega) [f_1^R(g_2^R)^2(\gamma^R)^3 + f_1^A(g_2^A)^2(\gamma^A)^3] \right. \\ & - L^R(\Omega)F(E - \Omega) [2f_1^A g_1^A g_2^A(\gamma^A)^2 + f_1^A(g_2^A)^2(\gamma^A)^3 - f_1^R(g_2^R)^2(\gamma^R)^3] \\ & \left. - L^A(\Omega)F(E - \Omega) [f_1^A(g_2^A)^2(\gamma^A)^3 - f_1^R(g_2^R)^2(\gamma^R)^3 - 2f_1^R g_1^R g_2^R(\gamma^R)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В выражениях (2.9) – (2.11) $L(\Omega) \equiv L(\Omega, q)$ обозначает флуктуационный пропагатор, определенный в уравнении (1.15), а функции f_i , g_i и γ берутся с аргументами $2E - \Omega$ и q . Данные функции определены посредством:

$$f_m^{R,A}(\omega, q) = \left\langle \frac{1}{(1 \mp i\omega\tau + iqln_x)^m} \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (2.12)$$

$$g_m^{R,A}(\omega, q) = \left\langle \frac{in_x}{(1 \mp i\omega\tau + iqln_x)^m} \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (2.13)$$

$$\gamma^{R,A}(\omega, q) = \frac{1}{1 - f_1^{R,A}(\omega, q)}. \quad (2.14)$$

В явном виде, для пленок и объемных образцов:

$$2\text{D: } f_1^{R,A}(\omega, q) = \frac{1}{\sqrt{(1 \mp i\omega\tau)^2 + (ql)^2}}, \quad 3\text{D: } f_1^{R,A}(\omega, q) = \frac{1}{ql} \arctan \frac{ql}{1 \mp i\omega\tau}, \quad (2.15)$$

а остальные $f_i(\omega, q)$ и $g_i(\omega, q)$ могут быть получены из $f_1(\omega, q)$ путем дифференцирования по ω и q .

Наконец, вклад Асламазова-Ларкина может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \delta\sigma^{\text{AL}} = & 2\pi^2\nu^2\tau^3 D \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \\ & \times \left\{ B'(\Omega) \left[L^R L^A (\Phi_{2,2}^R + \Phi_{2,2}^A)^2 - 2(L^R \Phi_{2,2}^R + L^A \Phi_{2,2}^A)^2 \right] \right. \\ & \left. + 2B(\Omega) \left[(L^R)^2 \Phi_{2,2}^R (\Psi_{2,2}^R + 2\Psi_{1,1}^R) + (L^A)^2 \Phi_{2,2}^A (\Psi_{2,2}^A + 2\Psi_{1,1}^A) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь аргументы всех функций есть Ω и q . Входящие сюда функции $\Phi_{m,n}$ и $\Psi_{m,n}$ определены посредством

$$\Phi_{m,s}^{R,A}(\Omega, q) = \int \frac{dE}{2\pi} F(E) g_m^{A,R}(2E - \Omega, q) [\gamma^{A,R}(2E - \Omega, q)]^s, \quad (2.17a)$$

$$\Psi_{m,s}^{R,A}(\Omega, q) = \int \frac{dE}{2\pi} F'(E) g_m^{A,R}(2E - \Omega, q) [\gamma^{A,R}(2E - \Omega, q)]^s. \quad (2.17b)$$

Для приведения выражения для вклада AL к компактному виду (2.16) потребовалось интегрирование по частям, использование условия детального баланса:

$$B(\Omega)[F(E) - F(E - \Omega)] = 1 - F(E)F(E - \Omega) \quad (2.18)$$

и учет аналитических свойств.

Глава 3

Вблизи критической температуры

Выше мы получили общие выражения для поправок, при произвольной силе примесей и температуре (2.9) – (2.16), это позволяет нам заняться анализом всех режимов в задаче. В этой главе мы исследуем область $T \rightarrow T_c$. В диффузном пределе мы воспроизведем ранее полученные ответы, а в баллистическом некоторые результаты будут отличаться.

3.1 Упрощения вблизи перехода

Существенное упрощение достигается вблизи перехода, при $\epsilon \rightarrow 0$. В этом случае, независимо от силы случайного потенциала, флуктуационный пропагатор может быть записан в так называемом локальном виде, когда в уравнении (1.15) удерживается только квадратичный по q член. Согласно (A.2)–(A.3)

$$L^{R,A}(\Omega, q) = \frac{-1/\nu}{\epsilon + \alpha(\hat{D}q^2 \mp i\Omega)}. \quad (3.1)$$

где $\alpha = \pi/8T$, а \hat{D} – обобщенный коэффициент диффузии, описывающий длинноволновую дисперсию сверхпроводящих флуктуаций [1, 7]:

$$\frac{\hat{D}}{D} = \frac{\psi'(1/2) - 4\pi T\tau[\psi(1/2 + 1/4\pi T\tau) - \psi(1/2)]}{\psi'(1/2)}. \quad (3.2)$$

В грязном случае \hat{D} совпадает D , а в чистом (как в умеренно, так и в сверхчистом пределе) оказывается подавлен по $T\tau$:

$$\frac{\hat{D}}{D} = \begin{cases} 1, & T\tau \ll 1 \\ \frac{7\zeta(3)}{2\pi^3 T\tau}, & T\tau \gg 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Как и следовало ожидать, в чистом случае \hat{D} не зависит от степени беспорядка:

$$\hat{D}_{\text{clean}} = \frac{7\zeta(3)}{2\pi^3 d} \frac{v_F^2}{T}, \quad (3.4)$$

где d — эффективная размерность образца. Далее мы будем работать с $d = 2$, что соответствует тонким пленкам.

Таким образом, вблизи перехода характерные значения бозонной частоты $\Omega \sim \epsilon T \ll T$, и, следовательно, при вычислении интегралов по E можно пренебречь Ω . После этого приближения интеграл по Ω легко берется, при этом ведущий вклад набирается от члена, содержащего $L^K(\Omega)$ в уравнениях (2.9)–(2.11) и от члена $B'(\Omega)$ в уравнении (2.16), так как они самые сингулярные по $\Omega \rightarrow 0$.

3.2 DOS и регулярная часть МТ поправки

Вычисления вблизи T_c мы начнем со вкладов DOS и регулярная часть МТ (RMT). В выражении (2.9)–(2.10) удерживаем член $\sim L^K(\Omega)$ по причине самой большой сингулярности на малых Ω :

$$\frac{\delta\sigma_{\text{DOS}}}{-i\pi\nu D\tau^2} = \int (dq) \int (d\Omega) L^K(\Omega) \int (dE) F'(E) \{ (f_1^R + f_3^R)(\gamma^R)^2 + (f_1^A + f_3^A)(\gamma^A)^2 \}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\delta\sigma_{\text{MT}}}{-i\pi\nu D\tau^2} = \int (dq) \int (d\Omega) L^K(\Omega) \int (dE) F'(E) \{ f_3^R(\gamma^R)^2 + f_3^A(\gamma^A)^2 - (f_1^R + f_1^A)\gamma^A\gamma^R \}. \quad (3.6)$$

Структура L_K определяет область: $\{\Omega, \hat{D}q^2\} \sim \epsilon T$, в которой набираются интегралы. Это обстоятельство позволяет нам, в главном порядке, пренебречь Ω, q в $f_i^{R,A}(2E - \Omega, q)$ и записать ее как функцию энергии E :

$$f_m^{R,A} \approx \frac{1}{(1 \mp 2iE\tau)^m}, \quad \gamma_{R,A} \approx \frac{1 \mp 2iE\tau}{0 \mp 2iE\tau}. \quad (3.7)$$

Далее интеграл по частоте и энергии считаем независимо:

$$\int (d\Omega) L^K(\Omega, q) = -\frac{i\pi}{4\alpha\nu} \frac{1}{\epsilon + \alpha\hat{D}q^2}; \quad (3.8)$$

Интеграл по E вычисляем, замыкая контур на особенности подынтегральных функций. Для этого нам нужно знать аналитическую структуру выражений в плоскости E : тут имеется вклад от полюсов $F'(E)$, а также вклад от особенностей функций $f^{R,A}$. Для большинства слагаемых контур можно замыкать, захватывая только полюса $F'(E)$: для запаздывающих функций замыкаем сверху, для опережающих — снизу. Помимо функций аналитических в верхней или нижней полуплоскости, имеется член $\gamma^R\gamma^A$, который содержит особенности (в общем случае — разрезы) с обеих сторон от действительной оси. Вклад от этих особенностей определяет АМТ, он будет вычислен в Главе 3.4. Итак, вклад от полюсов $F'(E)$:

$$\int (dE) F'(E) \{ (f_1^R + f_3^R)(\gamma^R)^2 \} = \frac{\psi'(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - \frac{1}{2\pi T\tau} \psi''(\frac{1}{2})}{4\pi^2 \tau T}, \quad (3.9)$$

$$\int (dE) F'(E) \{f_3^R(\gamma^R)^2 - f_1^R \gamma^R \gamma^A\} \rightarrow \frac{\psi'(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - 2\psi'(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2\pi T\tau} \psi''(\frac{1}{2})}{4\pi^2 T\tau}, \quad (3.10)$$

где мы проинтегрировали по частям и учли, что $\text{res } F(E_k) = 2T$ в полюсах $E_k = i\pi T(2k+1)$.

После вычисления интегралов по E и Ω оставшийся интеграл по импульсам (3.8) расходится логарифмически, однако он должен быть обрезан на больших импульсах: $\alpha \hat{D} q^2 \sim T$, где перестают работать приближение (3.7):

$$\int \frac{(dq)}{\epsilon + \alpha \hat{D} q^2} \rightarrow \frac{1}{4\pi \alpha \hat{D}} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.11)$$

Объединяя (3.8)–(3.10) и используя выражение для обобщенного коэффициента диффузии (3.2), получаем для поправок выражения:

$$\delta\sigma_{\text{DOS}} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\psi'(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - \frac{1}{2\pi T\tau} \psi''(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - \psi(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4\pi T\tau} \psi'(\frac{1}{2})} \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (3.12)$$

$$\delta\sigma_{\text{RMT}} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\psi'(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - 2\psi'(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2\pi T\tau} \psi''(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - \psi(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4\pi T\tau} \psi'(\frac{1}{2})} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.13)$$

Заметим, что эти выражения были получены в предположении $\epsilon \ll 1$ при произвольном параметре $T\tau$.

В диффузном случае ($T_c\tau \ll 1$) мы воспроизводим известный результат (1.4):

$$\delta\sigma_{\text{DOS}}^{\text{dirty}} = -\frac{14\zeta(3)}{\pi^4} \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad \delta\sigma_{\text{RMT}}^{\text{dirty}} = -\frac{14\zeta(3)}{\pi^4} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.14)$$

То есть поправка RMT удваивает DOS.

В баллистическом ($T_c\tau \gg 1$) пределе получаем:

$$\delta\sigma_{\text{DOS}}^{\text{clean}} = -\frac{2\pi^2}{7\zeta(3)} (T\tau)^2 \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{2T\tau}{\pi} \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (3.15)$$

$$\delta\sigma_{\text{RMT}}^{\text{clean}} = \frac{2\pi^2}{7\zeta(3)} (T\tau)^2 \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{2T\tau}{\pi} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) отличается от полученного ранее (1.5) [11], в котором не было члена с зависимостью $(T\tau)^2$. Оказывается, что отдельно обе поправки имеют расходимость $(T\tau)^2$, которая сокращается, если их учитывать вместе:

$$\delta\sigma_{\text{RMT}}^{\text{clean}} + \delta\sigma_{\text{DOS}}^{\text{clean}} = -\frac{4T\tau}{\pi} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.17)$$

Таким образом, мы продемонстрировали, как сокращается τ^2 в чистом режиме.

3.3 Вклад Асламазова-Ларкина

Хорошо известно, что вблизи перехода AL-поправка $\sim \frac{1}{\epsilon}$ и не зависит от $T\tau$, однако за ней имеются следующая менее сингулярная поправка $\sim \ln \frac{1}{\epsilon}$:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} = \frac{1}{16\epsilon} + C^{\text{AL}}(T\tau) \ln \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (3.18)$$

Так как в поправках DOS+RMT зависимость от ϵ логарифмическая, то и тут мы будем интересоваться этими членами, так как они могут зависеть от параметра $T\tau$, который в баллистическом режиме может оказаться важным. Вклад в функцию $C^{AL}(T\tau)$ дается почти всеми слагаемыми выражения (2.16).

3.3.1 Разложение блоков

Вблизи перехода, основной вклад вносят малые импульсы $\hat{D}q^2 \sim \epsilon T$ и малые частоты $\Omega \sim \epsilon T$. Поэтому вычислим блоки (2.17) в главном порядке по q и Ω . Так же как и в (3.7) полагаем:

$$g_m^{R,A}(\Omega, q) \approx \frac{m}{2} \frac{ql}{(1 \mp i\Omega\tau)^{m+1}}. \quad (3.19)$$

После этого вычисляем блоки Ψ Φ , замыкая контур на полюса $F(E)$:

$$\partial_q \Phi_{2,2}^{R,A}(0, 0) = 2iTqvl \sum_{E_k} \frac{1}{(1 \pm 2iE_k\tau)} \frac{1}{(0 \pm 2iE_k\tau)^2} = \mp \frac{iv}{16\tau T} \hat{D}, \quad (3.20a)$$

$$\partial_q \Psi_{1,1}^{R,A}(0, 0) = \frac{v}{8\pi^2 T} \left(\psi' \left(\frac{1}{2} \right) - \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) \right), \quad (3.20b)$$

$$\partial_q \Psi_{2,2}^{R,A}(0, 0) = \frac{v}{4\pi^2 T} \left(\psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) - \psi' \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4\pi\tau T} \psi'' \left(\frac{1}{2} \right) \right), \quad (3.20c)$$

$$\partial_q^3 \Phi_{2,2}^{R,A}(0, 0) = \pm \frac{27i}{2\pi} \tau^2 v^3 \left(\psi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{\psi' \left(\frac{1}{2} \right)}{12\pi T\tau} - \frac{\psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right)}{6\pi\tau T} + \frac{\psi'' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau} \right)}{96\pi^2 \tau^2 T^2} \right), \quad (3.20d)$$

где \hat{D} определено (3.2). Также для разложения по Ω нам понадобится точное тождество:

$$\partial_\Omega \Phi_{m,s}^{R,A} = \frac{1}{2} \Psi_{m,s}^{R,A}. \quad (3.21)$$

Для удобства разделим (2.16) на две части, первая содержит $B'(\Omega)$, вторая – $B(\Omega)$.

3.3.2 Часть с $B'(\Omega)$

Начнем с вычисления традиционного вклада Асламазова Ларкина, для этого в (2.16) подставляем блоки (3.20) на нулевой Ω и учитывая соотношение $\Phi_{2,2}^R(0, q) + \Phi_{2,2}^A(0, q) = 0$, записываем:

$$\delta\sigma_{B'}^{AL} = -4\pi^2 \nu^2 \tau^3 D \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} [\Phi_{2,2}^R(0, q)]^2 \int \frac{d\Omega}{2\pi} B'(\Omega) (L^R - L^A)^2. \quad (3.22)$$

В первую очередь вычисляется интеграл по Ω :

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi} B'(\Omega) [L^R(\Omega) - L^A(\Omega)]^2 = \frac{2\alpha T}{\nu^2} \frac{1}{(\epsilon + \alpha \hat{D}q^2)^3}. \quad (3.23)$$

Разлагая блок $\Phi_{2,2}$ по импульсу и вычисляя интеграл (тут и далее аргументы Φ и Ψ подразумеваются нулевыми):

$$\delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,1)} = -8\pi^2\tau^3\alpha DT (\partial_q\Phi_{2,2}^R)^2 \int \frac{dq^2}{4\pi} \frac{q^2}{(\epsilon + \alpha\hat{D}q^2)^3} = -\left(\frac{4T\tau D}{v\hat{D}}\right)^2 (\partial_q\Phi_{2,2}^R)^2 \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.24)$$

Используя выражение (3.20а) для производной блока $\Phi_{2,2}^R$:

$$\delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,1)} = \frac{1}{16\epsilon}. \quad (3.25)$$

Это и есть самое сингулярное по близости к переходу слагаемое, не зависящее от силы примесей [1].

Для вычисления менее сингулярных поправок по ϵ , в слагаемом пропорциональном B' производим разложение до членов линейных по Ω и членов четвертого порядка по q :

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\text{AL}}^{(1)} &= -4\pi^2\nu^2 D\tau^3 \int (dq) \int (d\Omega) B'(\Omega) \\ &\times \left[\frac{2}{3}q^4 \partial_q\Phi_{2,2}^R \partial_q^3\Phi_{2,2}^R (L^R - L^A)^2 + 2\Omega q^2 \left((L^R)^2 - (L^A)^2 \right) \partial_{q,\Omega}\Phi_{2,2}^R \partial_q\Phi_{2,2}^R \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Более высокие по Ω члены разложения добавляют малость ϵ , так как флуктуационный пропагатор $L^{R,A}$ определяет масштаб $\Omega \sim \epsilon T$. Далее вычисляем интегралы по частоте Ω в (3.26):

$$\int (d\Omega) B'(\Omega) (L^R - L^A)^2 = -2\alpha\nu T [L^R(0, q)]^3, \quad (3.27)$$

$$\int (d\Omega) B'(\Omega) \Omega \left((L^R)^2 - (L^A)^2 \right) = -2iT [L^R(0, q)]^2. \quad (3.28)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках (3.26):

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,1)} &= -8\pi^2\tau^3\alpha DT \frac{2}{3!} \partial_q\Phi_{2,2}^R \partial_q^3\Phi_{2,2}^R \int \frac{dq^2}{4\pi} \frac{q^4}{(\epsilon + \alpha\hat{D}q^2)^3} = \\ &= -\frac{2\pi\tau^3\alpha DT}{3} \frac{\partial_q\Phi_{2,2}^R \cdot \partial_q^3\Phi_{2,2}^R}{(\alpha\hat{D})^3} \ln \frac{1}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где логарифмический интеграл обрезаем к в (3.11). Подставляя сюда (3.20а):

$$\delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,1)} = \delta C^{(1,1)}(T\tau) \ln \frac{1}{\epsilon}, \quad (3.30)$$

$$\delta C^{(1,1)}(T\tau) = \frac{9}{4} \frac{\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12\pi T\tau}\psi'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right)}{6\pi\tau T} + \frac{\psi''\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right)}{96\pi^2\tau^2 T^2}}{\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) + \frac{1}{4\pi\tau T}\psi'\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}. \quad (3.31)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках (3.26):

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,2)} &= 4i\pi\tau^3 DT (\partial_{q,\Omega}\Phi_{2,2}^R \partial_q\Phi_{2,2}^R) \int \frac{q^2 dq^2}{(\epsilon + \alpha\hat{D}q^2)^2} = 4i\pi T \left(\frac{\tau D}{\alpha\hat{D}}\right)^2 (\partial_{q,\Omega}\Phi_{2,2}^R \partial_q\Phi_{2,2}^R) \ln \frac{1}{\epsilon} \\ &= \delta C^{(1,2)} \ln \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Это выражение удобно будет объединить с поправкой из члена пропорционального $B(\Omega)$.

3.3.3 Часть с $B(\Omega)$

Член пропорциональный $B(\Omega)$ записываем, в главном порядке по Ω :

$$\delta\sigma_{\text{AL}}^{(2)} = 4\pi^2\nu^2 D\tau^3 \int (dq) q^2 \partial_q \Phi_{2,2}^R (\partial_q \Psi_{2,2}^R + 2\partial_q \Psi_{1,1}^R) \int (d\Omega) B(\Omega) [(L^R)^2 - (L^A)^2]. \quad (3.33)$$

В первую очередь вычисляем интеграл по Ω :

$$\int (d\Omega) B(\Omega) [(L^R(\Omega, q))^2 - (L^A(\Omega, q))^2] = 2iT[L^R(0, q)]^2 \quad (3.34)$$

Обрезая как в (3.11) логарифмический интеграл, получаем:

$$\delta\sigma_{\text{AL}}^{(2)} = \frac{4\pi iT}{v^2} \partial_q \Phi_{2,2}^R (\partial_q \Psi_{2,2}^R + 2\partial_q \Psi_{1,1}^R) \left(\frac{\tau D}{\alpha \hat{D}} \right)^2 \ln \frac{1}{\epsilon} = \delta C^{(2)} \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.35)$$

Удобно записать вместе вклады $\delta\sigma_{\text{AL}}^{(2)}$ и $\delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,2)}$:

$$\begin{aligned} \delta C^{(1,2)}(T\tau) + \delta C^{(2)}(T\tau) &= \frac{32T^2\tau D}{\pi v \hat{D}} (\partial_q \Psi_{2,2}^R + \partial_q \Psi_{1,1}^R) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\psi'(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) - \psi'(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2\pi T\tau} \psi''(\frac{1}{2})}{\psi(\frac{1}{2}) - \psi(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}) + \frac{1}{4\pi T\tau} \psi'(\frac{1}{2})}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.3.4 Окончательное выражение для поправки AL

Вклад в полную поправку AL составляют все полученные слагаемые. Как уже было отмечено поправка, представляется в виде:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} = \delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,1)} + \delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,2)} + \delta\sigma_{\text{AL}}^{(1,3)} + \delta\sigma_{\text{AL}}^{(2)}, \quad (3.37)$$

$$C(T\tau) = \delta C^{(1,2)}(T\tau) + \delta C^{(1,3)}(T\tau) + \delta C^{(2)}(T\tau), \quad (3.38)$$

где различные δC определяются в уравнениях (3.31), (3.32) и (3.35).

В предельных случаях для поправки AL можем записать:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} \approx \frac{1}{16\epsilon} + \begin{cases} \frac{28\zeta(3)}{\pi^4} \ln \frac{1}{\epsilon}, & T_c\tau \ll 1, \\ \frac{4T\tau}{\pi} \ln \frac{1}{\epsilon}, & T_c\tau \gg 1, \end{cases} \quad (3.39)$$

причем член $T\tau$ в баллистике идет только из $\delta C^{(2)}$. В баллистической области к привычному ответу $1/(16\epsilon)$ добавляется менее сингулярное по ϵ , но пропорциональное большому $T\tau$.

3.3.5 AL+DOS+RMT

Учитывая вклады AL+DOS+RMT, то есть все полюсные вклады:

$$\delta\sigma_{\text{AL+DOS+RMT}} \approx \frac{1}{16\epsilon} + \delta C(T\tau) \ln \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (3.40)$$

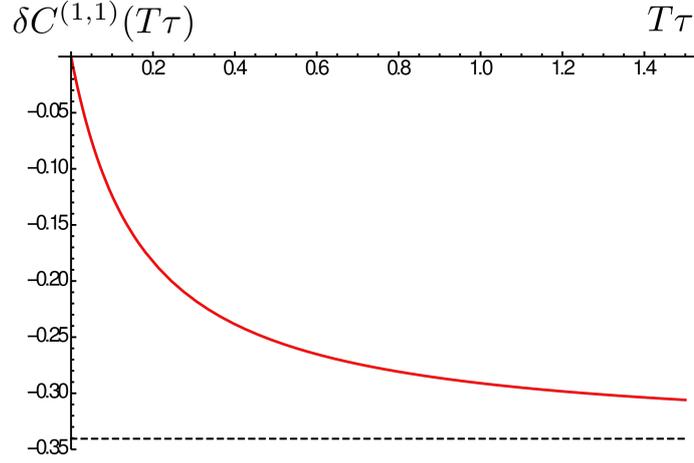


Рис. 3.1: Функция $\delta C^{(1,1)}(T\tau)$ и её асимптотика на бесконечности.

где $\delta C(T\tau) = \delta C^{(1,1)}(T\tau)$ и дается выражением (3.31), которое как функция $T\tau$ построен на рисунке (3.1), а аналитические выражения для асимптотик:

$$\delta C^{(1,1)}(T\tau) = \begin{cases} -\frac{6T\tau}{\pi}, & T\tau \ll 1, \\ -\frac{93}{196} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)^2}, & T\tau \gg 1. \end{cases} \quad (3.41)$$

Тут стоит отметить, что вклад DOS+RMT полностью сокращается суммой $\delta C^{(1,2)}(T\tau) + \delta C^{(2)}(T\tau)$ согласно (3.12)–(3.13) и (3.36), после чего в логарифмическом слагаемом остается только $\delta C^{(1,2)}(T\tau)$.

Оказывается, что нужно учитывать все поправки вместе, чтобы сократить сингулярные члены по $T\tau$.

3.4 Аномальная МТ поправка

Перейдем ко вкладу от разреза функции $\gamma^R \gamma^A$ в верхней полуплоскости. В этом выражении интегрирование по E выполняется только вокруг особенностей функции γ^A . Интеграл по Ω согласно (3.8):

$$\delta\sigma_{\text{RMT}} = -4\pi\nu D\tau^2 T \int (dq) L^R(0, q) \oint_{\text{cut}} (dE) F'(E) (\gamma^R - 1) (\gamma^A - 1) \quad (3.42)$$

Тут мы выделили удобную для вычисления комбинацию: не аналитической и аналитической функции в верхней полуплоскости. От интеграла по энергии переходим к переменной $z = 2\tau E$, и производим замену $F'(E) \rightarrow 1/(2T)$, это накладывает условие $z \ll T\tau$:

$$\delta\sigma_{\text{cut}}^{\text{DOS+MT}} = \frac{4\pi\nu D\tau^2 T}{16\pi^2\nu T\tau} \int_0^\infty \frac{q \cdot dq}{\epsilon + \alpha \hat{D} q^2} \int dz \frac{1}{\sqrt{(1+iz)^2 + q^2 l^2} - 1} \frac{1}{\sqrt{(1-iz)^2 + q^2 l^2} - 1} \quad (3.43)$$

Последний интеграл расходится на малых импульсах. Чтобы избежать этого, мы, следуя стандартной процедуре, добавляем скорость сбега фазы $1/\tau_\phi$ как мнимую часть энергии.

Переходя к переменным $t = ql$ и $t_0 = l/L_\phi$, получаем компактную запись:

$$\delta\sigma_{\text{cut}}^{\text{DOS+MT}} = \frac{2T\tau D}{\pi^2 \hat{D}} \cdot G \left(\sqrt{\frac{\epsilon l^2}{\alpha \hat{D}}} \right) \quad (3.44)$$

Введенная здесь функция $G(b)$ определена посредством

$$G(b) = \int_0^\infty \frac{t \cdot Y(t, t_0)}{b^2 + t^2} dt, \quad (3.45)$$

где

$$Y(t, t_0) = 2 \int_0^\infty dz \frac{1}{\sqrt{(1 + iz - t_0)^2 + t^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - iz - t_0)^2 + t^2 - 1}} \quad (3.46)$$

Для начала вычислим асимптотики функции $Y(t, t_0)$ (интеграл по разрезу), и укажем характерные масштабы z на которых набирается этот интеграл:

$$Y(t, t_0) = \begin{cases} \frac{2\pi}{t^2 + t_0^2}, & t \ll 1, t_0 \ll 1, z \sim t^2; \\ \frac{2}{t} \ln t, & t \gg 1 \gg t_0, z \sim t; \\ \frac{2}{t} \ln \frac{t}{t_0}, & t \gg t_0 \gg 1, z \sim t; \\ \frac{\pi}{t_0}, & t_0 \gg t \gg 1, z \sim t_0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Теперь можно вычислять вклад аномального МТ в разных предельных случаях.

Баллистический АМТ

Далее рассматриваем режимы: $l \gg \xi(T)$. В них мы используем асимптотики $z \sim t$, интегралы по $t \sim b \sim T\tau\sqrt{\epsilon}$ и следовательно обосновывает замену $F'(E) \rightarrow 1/(2T)$, которая верна при $z \ll T\tau$.

Случай $L_\phi \gg l \gg \xi(T)$, в безразмерных единицах имеем $b \gg 1 \gg t_0$. В интеграле по импульсам есть два вклада с больших и малых импульсов:

$$G(b) \approx \int_0^1 \frac{t}{t^2 + b^2} \frac{2\pi}{t^2 + t_0^2} dt + \int_1^\infty \frac{t}{t^2 + b^2} \frac{2}{t} \ln t dt \approx \frac{\pi}{b^2} \ln \frac{1}{t_0} + \frac{\pi}{b} \ln b \quad (3.48)$$

Используя такую асимптотику, получаем для проводимости:

$$\delta\sigma_{\text{AMT}} \approx \frac{1}{8\epsilon} \ln \frac{L_\phi}{l} + \pi \frac{T\tau}{\sqrt{14\zeta(3)\epsilon}} \ln \frac{l}{\xi(T)} = \frac{1}{8\epsilon} \ln \frac{L_\phi}{l} + \frac{\pi}{\sqrt{14\zeta(3)\xi(T)\epsilon}} \ln \frac{l}{\xi(T)} \quad (3.49)$$

Заметим, что вклад с малых импульсов совпадает с аномальным МТ в диффузной области.

Случай $l \gg L_\phi \gg \xi(T)$, в безразмерных единицах $b \gg t_0 \gg 1$. Имеем вклад только с больших импульсов $t \sim b \gg 1 \rightarrow Y(t, t_0) \approx \frac{2}{t} \ln \frac{t}{t_0}$:

$$G(b) \approx 2 \int_0^\infty \frac{\ln \frac{t}{t_0}}{t^2 + b^2} dt \approx \frac{\pi}{b} \ln \frac{b}{t_0}. \quad (3.50)$$

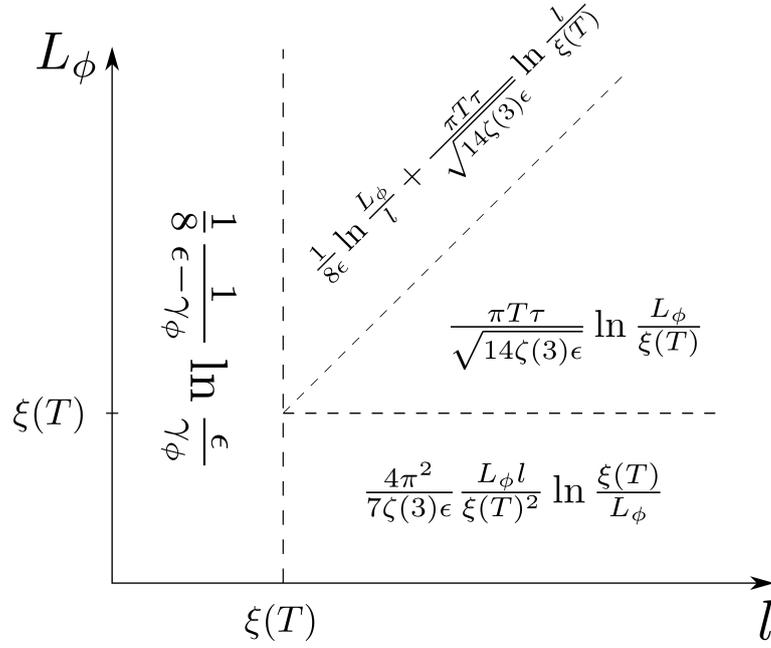


Рис. 3.2: Схематическая диаграмма зависимости аномального АМТ вклада.

Для поправки:

$$\delta\sigma_{\text{АМТ}} \approx \pi \frac{T\tau}{\sqrt{14\zeta(3)\epsilon}} \ln \frac{L_\phi}{\xi(T)} = \frac{\pi}{\sqrt{14\zeta(3)}} \frac{l}{\xi(T)\epsilon} \ln \frac{L_\phi}{\xi(T)} \quad (3.51)$$

Случай $l \gg \xi(T) \gg L_\phi$, в безразмерных единицах $t_0 \gg b \gg 1$. Имеем так же вклад только с больших импульсов $t \sim b \gg 1 \rightarrow Y(t, t_0) \approx \frac{\pi}{\sqrt{t_0^2 + t^2}}$:

$$G(b) \approx \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + b^2} \frac{\pi}{\sqrt{t_0^2 + t^2}} dt \approx \frac{\pi}{t_0} \ln \frac{t_0}{b}. \quad (3.52)$$

Для проводимости запишем:

$$\delta\sigma_{\text{АМТ}} \approx \frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} (T\tau)^2 \frac{L_\phi}{l} \ln \frac{\xi(T)}{L_\phi} = \frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{L_\phi l}{\xi(T)\epsilon} \ln \frac{\xi(T)}{L_\phi} \quad (3.53)$$

Случай $l \ll \xi(T)$ ($b \ll 1$) соответствует грязному и умеренно чистому случаю, вклад только с малых импульсов $t \ll 1$:

$$G(b) \approx \int_0^\infty \frac{tdt}{t^2 + b^2} \frac{2\pi}{t_0^2 + t^2} = \frac{2\pi}{b^2 - t_0^2} \ln \frac{b}{t_0}. \quad (3.54)$$

Проводимость вычисленная по такой асимптотике находится в полном соответствии и полученными ранее результатами [7]:

$$\delta\sigma_{\text{АМТ}} = \frac{1}{8} \frac{\ln(\epsilon/\gamma_\phi)}{\epsilon - \gamma_\phi}, \quad (3.55)$$

где безразмерная величина γ_ϕ есть

$$\gamma_\phi = \frac{\pi}{8T\tau_\phi} \frac{\hat{D}}{D}. \quad (3.56)$$

Ее удобно записать через длины в виде $\gamma_\phi \approx \frac{\xi_0}{L_\phi} \min\{1, \frac{\xi_0}{l}\}$.

Общий ответ удобно изобразить в виде схематической диаграммы, представленной на (Рис.3.2).

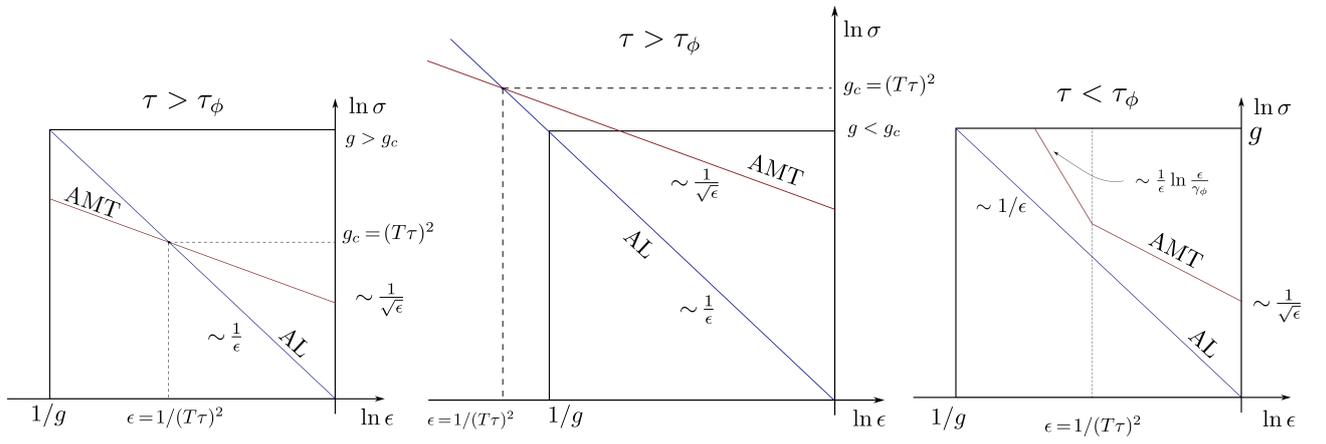


Рис. 3.3: Схема реализующихся режимов в баллистике $T_c\tau \gg 1$.

3.5 Общая поправка к проводимости вблизи T_c

Наиболее интересный случай – это баллистический предел, когда $T_c\tau \gg 1$. Обладая выражениями для всех поправок, мы можем заключить, какая из них самая важная. Объединяя вместе все вклады, запишем:

$$\delta\sigma_{\text{total}} = \frac{1}{16\epsilon} + C(T\tau) \ln \frac{1}{\epsilon} + \delta\sigma_{\text{AMT}}, \quad (3.57)$$

где $\delta\sigma_{\text{AMT}}$ определяется выражениями (3.49), (3.51), (3.53) и (3.55) (все асимптотики собраны на рисунке (3.2)). Функция $C(T\tau)$ в баллистическом режиме выходит на насыщение (3.1) и по этому становится менее интересной, чем поправка Асламазова-Ларкина всюду, чего нельзя было сказать, прежде чем мы сократили растущие с $T\tau$ слагаемые.

Начнем анализ с области температур $\epsilon > \frac{1}{(T_c\tau)^2}$ (суперчистый режим $l \gg \xi(T)$), в ней АМТ всегда важнее АЛ члена, действительно, $\frac{1}{\epsilon} \ll \frac{T_c\tau}{\sqrt{\epsilon}}$. Если спуститься ниже этой температуры, то для выяснения лидирующей поправки нужно сравнивать время сбоя фазы с временем свободного пробега.

В режиме медленного сбоя фазы ($\tau_\phi \gg \tau$) имеем $\gamma_\phi \sim \frac{1}{T^2\tau_\phi\tau} \ll \epsilon$. Такое соотношение параметров означает, что и в этой области АМТ будет больше чем АЛ на большой логарифм $\ln \frac{\epsilon}{\gamma_\phi}$. Однако, если скорость сбоя фазы велика: $\tau_\phi \ll \tau \Rightarrow \epsilon \ll \gamma_\phi$ и тут становится важным вклад Асламазова-Ларкина. Этот результат удобно представить в виде графика зависимости разных поправок от температуры см. рисунок (3.3).

Прежде чем продолжать, стоит сравнить поправку с безразмерным кондактансом g (друдевской проводимостью), если поправка становится больше чем g то теория возмущений перестает работать. Если $g \gtrsim (T_c\tau)^2$, то на границе сверхчистая–чистая область поправка еще мала и значит формулу (3.57) можно использовать в чистой области пока $\epsilon \gtrsim 1/g$. В противном случае область применимости ограничивается еще в суперчистой области: $\epsilon = \frac{(T_c\tau)^2}{g^2}$ и зависимость проводимости от ϵ всегда имеет характер $\sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

Глава 4

Вдали от критической температуры

4.1 Упрощения вдали от перехода

Аналогично ситуации вблизи перехода, вдали от перехода существует упрощение, позволяющее продвинуться в вычислениях. Вдали от перехода эффективная масса флуктуаций $\epsilon = \ln \frac{T_c}{T} \gg 1$ становится большой, а значит, важен вклад с больших импульсов $\hat{D}q^2 \gg 1$ и больших энергий $\Omega \gg T$. Такое предположение позволяет упростить флуктуационный пропагатор.

Упрощение в грязном пределе. В диффузном пределе ($T\tau \ll 1$), следовательно, характерные импульсы $ql \ll 1$ и $\omega\tau \ll 1$, что позволяет произвести разложение для функции $f_1^{R,A}(\omega, q) \approx 1 \pm i\omega\tau - l^2q^2/2$. Такое разложение позволяет вычислить в явном виде флуктуационный пропагатор (1.15):

$$-[\nu L^{R,A}(\Omega, q)]^{-1} = \epsilon + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{Dq^2 \mp i\Omega}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (4.1)$$

Вдали от перехода можно воспользоваться асимптотическим выражением дигамма функции $\psi(z) \approx \ln z$ при $z \rightarrow \infty$ и получить

$$-[\nu L^{R,A}(\Omega, q)]^{-1} \approx \epsilon + \ln \frac{Dq^2 \mp i\Omega}{4\pi T}. \quad (4.2)$$

Упрощение в чистом пределе. В чистом пределе ($\tau \rightarrow \infty$) в двумерном случае:

$$-[\nu L^{R,A}(\Omega, q)]^{-1} = \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1/2} - \frac{1}{\sqrt{(n+1/2 \mp \frac{i\Omega}{4\pi T})^2 + (\frac{vq}{4\pi T})^2}} \right]. \quad (4.3)$$

Вдали от перехода для больших qv и Ω это выражение может быть упрощено как:

$$-[\nu L^{R,A}(\Omega, q)]^{-1} \approx \epsilon + \ln \left(\frac{\sqrt{(vq)^2 + (i\Omega)^2} \mp i\Omega}{4\pi T} \right). \quad (4.4)$$

4.2 Диффузная область вдали от перехода

В этом режиме $T \ll 1/\tau$ а $\epsilon \gg 1 \Rightarrow$ как видно из (4.13) $\{Dq^2, \Omega\} \sim \epsilon T$, поэтому важна область $T \ll \{Dq^2, \Omega\} \ll \frac{1}{\tau}$. Работая в таком приближении полагаем:

$$f_i \rightarrow 1, \quad \gamma^{R,A} \rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{1}{Dq^2 \mp i\Omega}, \quad g_m^{R,A} \rightarrow \frac{m}{2} ql; \quad (4.5)$$

4.2.1 Вклад Асламазова-Ларкина

Вычисление (2.16) начнем с вычисления блоков (2.17). Интегралы вычисляем, высаживая на полюса $F(E)$, где используем замену (4.5):

$$\begin{aligned} \Phi_{2,2}^{R,A}(\Omega, q) &= \frac{qv}{2\pi\tau} \int dE \frac{F(E)}{(Dq^2 \pm i(2E - \Omega))^2} = \\ &= \mp i \frac{qv}{\tau} \sum_{E_k > 0} 2T \frac{1}{(Dq^2 \mp i\Omega - 2iE_k)^2} \rightarrow \mp i \frac{qv}{2\pi\tau} \frac{1}{Dq^2 \mp i\Omega}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где мы перешли в сумме по полюсам к интегралу по правилу:

$$T \sum_{E_k > 0} W(-iE_k) \rightarrow \int_0^\infty \frac{dz}{2\pi} W(z). \quad (4.7)$$

Для остальных блоков действуем аналогично:

$$\Psi_{1,1}^{R,A}(\Omega, q) = \frac{qv}{2\pi} \frac{1}{Dq^2 \mp i\Omega}, \quad \Psi_{2,2}^{R,A}(\Omega, q) = \frac{qv}{\pi\tau} \frac{1}{(Dq^2 \mp i\Omega)^2}. \quad (4.8)$$

Заметим, что блок $\Psi_{1,1}$ мал по параметру τ по сравнению с $\Psi_{2,2}$, в этом режиме опускаем его.

Слагаемые с $B'(\Omega)$. Тут наличие производной бозонной функции распределения ограничивает область $\Omega \lesssim T$, следовательно, из-за структуры блоков (4.8) $Dq^2 \sim \Omega \lesssim T$. Поэтому можно заменять $L^R \approx L^A \approx -\frac{1}{\nu\epsilon}$, и, как следствие, все слагаемое будет иметь порядок $\frac{1}{\epsilon^2}$. Далее мы продемонстрируем, что слагаемое содержащее $B(\Omega)$ будет больше по параметру ϵ .

Слагаемые с $B(\Omega)$. Согласно сказанному выше, поправку можно записать:

$$\delta\sigma_{AL} = 4\pi^2 \nu^2 D \tau^3 \int (d\Omega) \int (dq) B(\Omega) \left[(L^R)^2 \Phi_{2,2}^R \Psi_{2,2}^R + (L^A)^2 \Phi_{2,2}^A (\Psi_{2,2}^A) \right]. \quad (4.9)$$

В интеграле удобно повернуть контур по Ω на мнимую ось, учитывая, что основной вклад набирается на $\Omega \gg T$, произведем замену $B(\Omega) \rightarrow \text{sign}(\Omega)$. Опишем, как измениться интеграл по Ω после поворота. Пусть у нас есть две функции, связанные соотношением: $K^R(-\Omega) = -K^A(\Omega)$, тогда для них поворот работает как:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \cdot \text{sign}(\Omega) [K^R(\Omega) + K^A(\Omega)] = 2 \int_0^{\infty} d\Omega [K^R(\Omega) + K^A(\Omega)] = 4i \int_0^{\infty} d\omega K^M(\omega), \quad (4.10)$$

тут $K^M(\omega > 0) = K^R(i\Omega)$ и $K^M(\omega < 0) = K^A(-i\Omega)$. В качестве функции K будет выступать $L^2\Phi_{2,2}\Psi_{2,2}$ из (4.9). Действительно согласно (4.6) и (4.8):

$$(L^R(\Omega))^2 \Phi_{2,2}^R(\Omega) \Psi_{2,2}^R(\Omega) = - (L^A(-\Omega))^2 \Phi_{2,2}^A(-\Omega) \Psi_{2,2}^A(-\Omega). \quad (4.11)$$

После чего, мацубаровская K^M :

$$K^M(\omega) = -i \frac{q^2 v^2}{2\pi^2 \nu^2 \tau^2} \frac{1}{(Dq^2 + \omega)^3} \frac{1}{\left(\epsilon + \ln \frac{Dq^2 + \omega}{4\pi T}\right)^2}. \quad (4.12)$$

Подставляя в (4.9):

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\text{AL}} &= 16\pi^2 \nu^2 D\tau^3 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{qdq}{2\pi} \frac{q^2 v^2}{2\pi^2 \nu^2 \tau^2} \frac{1}{(Dq^2 + \omega)^3} \frac{1}{\left(\epsilon + \ln \frac{Dq^2 + \omega}{4\pi T}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(Dq^2) d(Dq^2) d\omega}{(Dq^2 + \omega)^3} \frac{1}{\left(\epsilon + \ln \frac{Dq^2 + \omega}{4\pi T}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вычисляя с логарифмической точностью интеграл по ω и производя замену $z = \frac{Dq^2}{4\pi T}$, получен:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} = \frac{1}{\pi^2} \int_1^{\frac{1}{T\tau}} \frac{d \ln z}{(\epsilon + \ln z)^2} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{\ln \frac{T}{T_c}} - \frac{1}{\ln \frac{1}{T\tau}} \right). \quad (4.14)$$

Последний логарифмический интеграл мы обрезаем на границах применимости наших приближений. На нижнем пределе нельзя пользоваться пропагатором в форме (4.2), на верхнем пределе обрезаем на границе диффузной области. Полученное выражение совпадает с результатом [14], но не совпадает с ответом названным AL в [15], так как в этой работе другое определение величины AL. Как окажется далее, это слагаемое значительно меньше, чем вклад DOS+RMT.

4.2.2 Вклад DOS+RMT

Аналогично, как и в случае поправки AL, важна область $T \ll \{Dq^2, \Omega\} \ll \frac{1}{\tau}$. Из-за наличия $F'(\Omega)$ интегрирование по E тривиально: $\int (dE) F'(E) \rightarrow \frac{1}{\pi}$. В этом режиме надо учитывать все слагаемые с L из (2.9)-(2.10):

$$\frac{\delta\sigma_{\text{DOS+RMT}}}{-i\nu D\tau^2} \approx \int (d\Omega) \int (dq) \{L_k(\Omega) G_1 - L_R(\Omega) F(\Omega) G_2 + L_A(\Omega) F(\Omega) G_3\}, \quad (4.15)$$

тут функции G_i – это комбинации f_i и γ . В главном по τ порядке, используя (4.5), запишем:

$$G_1 = 3(\gamma^R)^2 + 3(\gamma^A)^2 - 2\gamma^R\gamma^A; \quad (4.16)$$

$$G_2 = 3(\gamma^A)^2 - (\gamma^R)^2 - 2\gamma^R\gamma^A; \quad (4.17)$$

$$G_3 = (\gamma^R)^2 - 3(\gamma^A)^2 - 2\gamma^R\gamma^A; \quad (4.18)$$

Далее заменяем $B(\Omega) \approx F(\Omega) \rightarrow \text{sign}(\Omega)$:

$$\delta\sigma_{\text{DOS+RMT}} \approx -4i\nu D\tau^2 \int (dq) \int (d\Omega) \text{sign}(\Omega) \left((\gamma^R)^2 L_R - (\gamma^A)^2 L_A \right); \quad (4.19)$$

Для поворота контура по Ω на мнимую ось, используем правило (4.10) с небольшой модификацией $K^R(\Omega) = K^A(-\Omega)$, что изменяет знаки между слагаемыми. В (4.19) $K = \gamma^2 L$:

$$(\gamma^R(\Omega))^2 L^R(\Omega) = (\gamma^A(-\Omega))^2 L^A(-\Omega), \quad (4.20)$$

тогда для мацубаровской функции K :

$$K^M(\omega) = -\frac{1}{\nu\tau^2} \frac{1}{(Dq^2 + \omega)^2} \frac{1}{\epsilon + \ln \frac{Dq^2 + \omega}{4\pi T}}. \quad (4.21)$$

Используя правило (4.10), получаем:

$$\delta\sigma_{\text{DOS+RMT}} \approx -\frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\omega d(Dq^2)}{(Dq^2 + \omega)^2} \frac{1}{\epsilon + \ln \frac{Dq^2 + \omega}{4\pi T}} = -\frac{2}{\pi^2} \int \frac{d \ln z}{\epsilon + \ln z}. \quad (4.22)$$

Получившийся интеграл медленно расходится на больших импульсах, и с логарифмической точностью должен быть обрезан на границе диффузной области $q_{\text{max}}^2 \sim \frac{1}{D\tau}$. Получаем:

$$\delta\sigma_{\text{DOS+RMT}} = -\frac{2}{\pi^2} \ln \frac{\ln 1/T_c\tau}{\ln T/T_c}. \quad (4.23)$$

Заметим, что полученный коэффициент $-\frac{2}{\pi^2}$ в четыре раза больше полученного в работе [15]. Такое расхождение произошло из-за того, что мы не учли диаграммы DOS(2) и МТ(2), которые оказываются важными только в этой области.

4.2.3 Вклад аномальный МТ

Перейдем к обработке члена $\gamma^A\gamma^R$, который отвечает за аномальный МТ. Для этого слагаемого важна область малых импульсов и частот, по-этому интеграл по E нельзя считать отдельно. Все слагаемые, с учетом замены (4.5):

$$\delta\sigma_{\text{AMT}} = 2i\pi\nu D \int (dE) (d\Omega) (dq) (L^R - L^A) \frac{F'(E) (B(\Omega) + F(E - \Omega))}{(Dq^2)^2 + (2E - \Omega)^2} \quad (4.24)$$

Интеграл имеет особенность при малых импульсах, поэтому важна область $Dq^2 \ll T$ и интеграл по E можно вычислить, замыкая контур сверху и учитывая только полюс от γ^A . В главном по q порядке:

$$\delta\sigma_{\text{AMT}} = \frac{i\nu}{16\pi} \int \frac{d(Dq^2)d\Omega}{Dq^2} (L^R(\Omega, 0) - L^A(\Omega, 0)) F' \left(\frac{\Omega}{2} \right) \left(B(\Omega) - F \left(\frac{\Omega}{2} \right) \right), \quad (4.25)$$

Используя выражения (4.1) для пропагаторов, запишем:

$$(L^R(\Omega, 0) - L^A(\Omega, 0)) \approx -\frac{1}{\nu} \frac{\psi(\frac{1}{2} + \frac{i\Omega}{4\pi T}) - \psi(\frac{1}{2} - \frac{i\Omega}{4\pi T})}{\epsilon^2} = -\frac{i\pi}{\nu\epsilon^2} F \left(\frac{\Omega}{2} \right); \quad (4.26)$$

Тут было использовано тождество $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \cot \pi z$. Прежде чем интегрировать упростим выражение с функциями распределения:

$$F\left(\frac{\Omega}{2}\right) F'\left(\frac{\Omega}{2}\right) \left(B(\Omega) - F\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right) = T \left(F'\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)^2; \quad (4.27)$$

После чего вычисляем по Ω :

$$\int \frac{q\Omega}{4T \cosh^4\left(\frac{\Omega}{4T}\right)} = \frac{4}{3} \quad (4.28)$$

На малых импульсах обрезаем временем сбоя фазы: $q_{\min}^2 \sim 1/(D\tau_\phi)$, на больших – границей диффузной области $q_{\max}^2 \sim T/D$:

$$\delta\sigma_{\text{AMT}} = \frac{1}{12} \frac{\ln T\tau_\phi}{\ln^2 \frac{T}{T_c}}. \quad (4.29)$$

Полученный ответ совпадает с результатами [15] и не совпадает с [7, 14]. Сравнивая АМТ и DOS+RMT поправки, убеждаемся, что в этой области температур DOS+RMT важнее, поскольку $\ln T\tau_\phi \ll \epsilon^2 \ln \epsilon$.

4.3 Баллистический режим

В этой главе мы перейдем к вычислению поправок в баллистическом режиме далеко от перехода. При этом возникнут ультрафиолетовые расходимости связанные со слабым убыванием флуктуационного пропагатора и отсутствием куперонов.

4.3.1 Поправка Асламазова-Ларкина

Рассмотрим вклад AL в пределе больших $T\tau \gg 1$ и $\epsilon \gg 1$. Для больших τ : $\Psi_{m,s} \sim \tau^{-m}$, в ведущем порядке:

$$\frac{\delta\sigma_{\text{AL}}}{8\pi^2\nu^2\tau^3D} = \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} B(\Omega) \left[(L^R)^2 \Phi_{2,2}^R \Psi_{1,1}^R + (L^A)^2 \Phi_{2,2}^A \Psi_{1,1}^A \right]. \quad (4.30)$$

Вычисленные на больших импульсах и энергиях блоки:

$$\Psi_{1,1}^{R,A}(\Omega, q) \approx \int \frac{dE}{2\pi} F'(E) g_1^{A,R}(2E - \Omega, q) \approx \frac{g_1^{R,A}(\Omega, q)}{\pi}, \quad (4.31)$$

$$\Phi_{2,2}^{R,A}(\Omega, q) = \mp \frac{i}{2\tau} \Psi_{1,1}^{R,A}(\Omega, q), \quad g_1^{R,A} = \frac{1}{qv\tau} \left(1 \pm \frac{i\Omega}{\sqrt{(qv)^2 - (\Omega \pm i0)^2}} \right). \quad (4.32)$$

После чего интеграл по Ω замыкаем на полюса $B(\Omega)$, которые определяются $\Omega = i\Omega_k = 2ik\pi T$:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} = 4\pi\tau^3 \int vqd(vq) \sum_k T(-\nu L_0^M(\Omega_k))^2 (\Psi_{1,1}^R(i\Omega_k))^2; \quad (4.33)$$

$$[-\nu L_0^M(\Omega_k)]^{-1} \approx \epsilon + \ln \left(\frac{\sqrt{(vq)^2 + \Omega_k^2} + \Omega_k}{4\pi T} \right), \quad \Psi_{1,1}^R(i\Omega_k) \approx \frac{1}{qv\tau} \left(1 - \frac{\Omega_k}{\sqrt{(qv)^2 + \Omega_k^2}} \right) \quad (4.34)$$

В сумме по k можно перейти к интегрированию и вычислить интеграл с логарифмической точностью (для этого мы пренебрегаем зависимостью L^M от Ω_k):

$$\sum_k T [\Psi_{1,1}^R(i\Omega_k)]^2 \approx \frac{1}{(qv\tau)^2} \int_0^\infty \frac{d\Omega_k}{2\pi} \left(1 - \frac{\Omega_k}{\sqrt{\Omega_k^2 + (qv)^2}} \right)^2 = \frac{4-\pi}{4\pi} \frac{1}{qv\tau^2}; \quad (4.35)$$

Оставшийся интеграл по импульсам расходится ультрафиолетово:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} = (4-\pi)\tau \int \frac{d(qv)}{(\epsilon + \ln(\frac{qv}{4\pi T}))^2}; \quad (4.36)$$

Однако результат не зависит от температуры, поскольку

$$\ln \frac{T}{T_c} + \ln \left(\frac{qv}{4\pi T} \right) = \ln \frac{qv}{4\pi T_c}. \quad (4.37)$$

Следовательно, данный вклад экспериментально не измерим.

Чтобы получить зависящую от температуры поправку, из расходящегося интеграла для проводимости, в котором мы не будем делать приближений больших импульсов, вычтем (4.36). После вычитания интеграл будет набраться на масштабах $qv, \Omega \sim T$, и аналитически уже нельзя будет его посчитать. В этом месте посчитаем интеграл численно.

4.3.2 Численный результат для поправок

Для поиска асимптотического выражения для поправки при $\epsilon \gg 1$, разделим флуктуационный пропагатор на две части:

$$(-\nu L^M)^{-1} = (-\nu L_0^M)^{-1} + \delta\Pi^M, \quad (4.38)$$

где $(-\nu L_0^M)^{-1}$ не несет зависимости от T , а в пределе больших ϵ $(-\nu L_0^M)^{-1} \gg \delta\Pi^M$. На больших импульсах $\delta\Pi^M \sim 1/q^2$, что позволяет разложить $(-\nu L^M)^{-1}$ (так как интеграл по импульсам становится сходящимся) по малости $1/\epsilon$:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{\text{AL}} - \delta\sigma_{\text{AL}}^{(0)} &= 4\pi\tau^3 \int vqd(vq) \sum_k T(\Psi_{1,1}^R(i\Omega_k))^2 [(-\nu L^M(\Omega_k))^2 - (-\nu L_0^M(\Omega_k))^2] \\ &\approx -\frac{8\pi\tau^3}{\epsilon^3} \int vqd(vq) \sum_k T(\Psi_{1,1}^R(i\Omega_k))^2 \delta\Pi^M(\Omega_k). \end{aligned} \quad (4.39)$$

После разложения флуктуационного пропагатора по параметру $\epsilon \rightarrow \infty$, и численного вычисления регуляризованной поправки проводимости:

$$\delta\sigma_{\text{AL}} - \delta\sigma_{\text{AL}}^{(0)} \approx -0.056 \cdot \frac{T\tau}{\epsilon^3}. \quad (4.40)$$

Аналогичные вычисления, для поправки DOS+RMT, приводят к ответу:

$$\delta\sigma_{\text{DOS+RMT}} - \delta\sigma_{\text{DOS+RMT}}^{(0)} \approx 0.073 \cdot \frac{T\tau}{\epsilon^2}. \quad (4.41)$$

Которая больше по параметру $\epsilon = \ln \frac{T}{T_c} \gg 1$.

Глава 5

Заключение

Мы вывели общее выражение для флуктуационного ядра отклика двумерных сверхпроводящих пленок при произвольной силе примесей, частоте и температуре и получили общее выражение для поправки к статической проводимости при произвольном τ и T . В диффузном пределе воспроизвели известные результаты, за исключением вклада DOS+RMT вдали от перехода.

Впервые продемонстрировано, явное сокращение первых двух слагаемых в разложении проводимости по большому $T\tau$ (чистый предел) вблизи перехода:

$$\delta\sigma = \frac{1}{16\epsilon} + [C_2(T\tau)^2 + C_1(T\tau) + C_0(T\tau)^0 + \dots] \ln \frac{1}{\epsilon} + \delta\sigma_{\text{AMT}}; \quad (5.1)$$

$$C_2 = C_1 = 0 \quad (5.2)$$

С нашей точки зрения, у авторов [11], исследовавших чистую и суперчистую области, неверно вычислен вклад RMT(3.16), из-за этого мы считаем, что схема сокращения τ^2 , описанная в [7], не является правильной.

Тем самым было обнаружено, что в большом диапазоне параметров τ_ϕ, τ (см. Рис. (3.3)) в баллистическом режиме, самым важным вкладом является аномальный Маки-Томпсон. В режиме, когда $\tau_\phi > \tau$ всегда будет важен АМТ, а в случае $\tau_\phi < \tau$ вклад АЛ может быть важен если число Гинзбурга (по порядку величины $g \sim Gi^{-1}$) будет велико $Gi^{-1} \gtrsim (T_c\tau)^2$ в области температур $(T_c\tau)^{-2} \gtrsim \epsilon \gtrsim Gi$ (3.5).

В этой работе мы не вычислили вклад диаграммы DOS(2) и MT(2), которые важны только в диффузной области вдали от перехода. Так же мы планируем вычислить численное значение поправки DOS+RMT вдали от перехода.

1. Приложение А. Пропагатор вблизи перехода

Запаздывающий и опережающий пропагаторы связаны комплексным сопряжением, поэтому вычисляем $L^R(\Omega, q)$. Для начала вычислим на малых импульсах блок функций Грина f_1^R :

$$f_1^R(E, q) = \left\langle \frac{1}{1 - i\tau E + iql \cos \phi} \right\rangle \approx \frac{1}{1 - i\tau E} - \frac{1}{d} \frac{q^2 l^2}{(1 - i\tau E)^2}, \quad (\text{A.1})$$

тут среднее $\langle \cos^2 \phi \rangle = 1/d$ вычислено для сферической поверхности ферми (в случае не сферической поверхности, ответ также выражается через коэффициент диффузии). Используя выражение (A.1) запишем для запаздывающего пропагатора (тут $E_n = i\pi T(2n + 1)$):

$$\begin{aligned} (-\nu L_R(\Omega, q))^{-1} &\approx \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{4\pi T\tau}{f_1^{-1}[2E_n - \Omega, q] - 1} \right\} \approx \\ &\approx \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{4\pi T\tau}{-i\tau(2E_n - \Omega) + \tau \frac{Dq^2}{1 - i\tau(2E_n - \Omega)}} \right\} \approx \\ &\approx \epsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + 1/2 + \frac{i\Omega}{4\pi T}} + \frac{Dq^2}{4\pi T} \frac{1}{(1 + 4\pi T\tau(n + 1/2))(n + 1/2)^2} \right\} \approx \\ &\approx \epsilon + \psi(1/2 + \frac{i\Omega}{4\pi T}) - \psi(1/2) + \alpha \hat{D}q^2 \approx \epsilon + \alpha (\hat{D}q^2 + i\Omega), \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

обобщенный коэффициент диффузии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + 4\pi T\tau(n + 1/2))(n + 1/2)^2} = \psi'(1/2) \frac{\hat{D}}{D}, \quad (\text{A.3})$$

где мы воспользовались известным тождеством для дигамма функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + x} - \frac{1}{n + y} \right\} = \psi(y) - \psi(x), \quad (\text{A.4})$$

а также значением $\psi'(1/2) = \pi^2/2$.

Глава 6

Список литературы

- [1] Л. Г. Асламазов, А. И. Ларкин, Физика твердого тела. Т.**10**, 4, 1104 (1968).
- [2] G. Balestrino, E. Milani, A. Varlamov, Physica, C **210**, 386 (1993).
- [3] K. Maki, Progress in Theoretical Physics **39**, 897 (1968).
- [4] R. S. Thompson, Phys. Rev. B **1**, 327 (1970).
- [5] R. E. Glover, Phys. Lett. A **25** (7), 542 (1967).
- [6] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmel'nitsky. J. Phys. C **15** (36), 7367 (1982).
- [7] А. А. Варламов и А. И. Ларкин, Теория флуктуаций в сверхпроводниках, М.: Добросвет (2007).
- [8] M. Randeria, A. Varlamov, Phys. Rev. B **50**, 10401 (1994).
- [9] L. Reggiani, R. Vaglio and A. A. Varlamov, Phys. Rev. B **44**, 9541 (1991).
- [10] D. V. Livanov, G. Savona, and A. A. Varlamov, Phys. Rev. B **62**, 8675 (2000).
- [11] V. V. Dorin, A. Klemm, A. A. Varlamov, Phys. Rev. B **48**, 12951 (1993).
- [12] Л. С. Левитов, А. В. Шитов, Функции Грина. Задачи и решения, М.: ФИЗМАТЛИТ (2003).
- [13] A. Kamenev, A. Levchenko, Adv. Phys. **58**, 197 (2009).
- [14] B. L. Al'tshuler, A. A. Varlamov, and M. Yu. Reizer. Zh. Eksp. Teor. Fiz. **84**, 2280-2289 (1983).
- [15] K. S. Tikhonov, G. Schwiete, A. M. Finkel'stein, Phys. Rev. B **85**, 174527 (2012).