
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЫ В ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ДИССИПАТИВНОЙ ДИНАМИКЕ

(магистерская диссертация)

Студент:

Люблинская Анастасия Александровна

(подпись студента)

Научный руководитель:

Бурмистров Игорь Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук, проф.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2023

Аннотация

Для двумерной фермионной системы, подверженной действию диссипации, описываемой в рамках уравнения Горини-Косаковски-Сударшан-Линдблада, с помощью подхода келдышевского функционального интеграла показано наличие интервала пространственных и временных масштабов с диффузионным движением квазичастиц путём вычисления лестничного ряда. Учтены первые порядки собственной энергии диффузона, приводящие к изменению коэффициента диффузии и определяющие, является ли устойчивым тривиальное стационарное состояние.

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи	6
2.1	Уравнение Горини-Коссаковски-Сударшана-Линдблада . . .	6
2.2	Келдышевский формализм	7
2.3	Функции Грина	10
3	Вычисления	12
3.1	Микроскопические предпосылки модели	12
3.2	Диффузон	13
3.2.1	Первое и второе слагаемое в лестничном ряду u -диффузона	14
3.2.2	Суммирование лестничного ряда для u -диффузона	17
3.2.3	dd -диффузон	19
3.2.4	ud - и du -диффузоны	21
3.3	Собственная энергия диффузона	21
3.3.1	Собственная энергия в главном порядке по коэффициенту диссипации	23
3.3.2	Первая поправка к собственной энергии	32
4	Результаты и обсуждение	36
5	Список литературы	38
6	Приложение	40

1. Введение

В последнее время ведутся активные исследования многочастичных открытых квантовых систем с диссипативной динамикой [1]-[3]. Такие системы имеют нетепловые стационарные состояния с неравновесными переходными процессами. Эти отличия от равновесных состояний и унитарной динамики, присущих привычным гамильтоновым системам, приводят к интересным и неожиданным физическим результатам.

Основным техническим инструментом для построения теории в области квантовых систем с диссипативной динамикой является уравнение Горини-Коссаковски-Сударшана-Линдблада (ГКСЛ) [4], описывающее как гамильтонову, так и неунитарную эволюцию матрицы плотности, вводящуюся при помощи прыжковых операторов. Для построения диаграммной техники в таких задачах часто используют келдышевский формализм [5], который при наличии диффузионных мод открывает путь к построению келдышевской сигма-модели [6]-[8].

В рамках этой научной деятельности в недавней работе [9] была представлена двухзонная фермионная модель с сохраняющими число частиц прыжковыми операторами, которые опустошают верхнюю зону спектра и заполняют нижнюю. Анализ в рамках метода среднего поля показывает, что в результате действия диссипации система стремится занять основное состояние гамильтониана, так называемое *dark state*, со скоростью, не зависящей от размера системы.

В последовавшей дальше статье [10] был исследован вопрос о том, что происходит за рамками приближения среднего поля. В этой работе был проведён анализ вершинных поправок в диаграммной технике келдышевского формализма и показано наличие диффузионного режима в динамике возбуждений плотности частиц и дырок. Также во втором порядке по отклонениям плотности от заполнения *dark state* была описана рекомбинация частиц из верхней зоны с дырками в нижней, а во втором порядке по константе диссипации была обнаружена накачка заселённости снизу вверх. Эти два эффекта межзонных переходов в сочетании с диффузией приводят к описанию плотности частиц в рамках уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (ФКПП), а также указывают на неустойчивость *dark state*.

Данная работа посвящена более строгому описанию диффузионного режима в представленной фермионной системе. При помощи диаграммной техники в келдышевском формализме посчитана лестничная диаграмма для диффузона и воспроизведён коэффициент диффузии, полученный в [10]. Далее в этот ряд добавлены вставки собственной энергии,

которые в главном порядке по коэффициенту диссипации дают поправку к коэффициенту диффузии, а в следующем порядке вводят конечную массу для диффузонов. Эта масса либо подтверждает предсказание авторов [10] о существовании накачки и неустойчивости dark state, будучи формально отрицательной, либо опровергает его в обратном случае.

Помимо изучения диффузии мы задались вопросом о возможных физических реализациях рассматриваемой модели и предлагаем описание бозонной системы, подходящей на роль бани для создания соответствующих прыжковых операторов. Эта система должна обладать шумом с неравновесными корреляторами специфического вида и формально соответствует бесконечной температуре частиц бани.

Работа состоит из нескольких частей. В разделе 2 представлена подробная постановка задачи с математической точки зрения: в подразделе 2.1 дано описание динамики на уровне уравнения ГКСЛ, в 2.2 совершён переход к келдышевскому формализму, а в 2.3 приведены среднеполевые функции Грина, необходимые для дальнейшего построения диаграммной техники. В разделе 3 описаны все оригинальные вычисления. Сначала в подразделе 3.1 представлены рассуждения о микроскопических предпосылках модели, потом в 3.2 проведено вычисление лестничного ряда диффузора, а в 3.3 описаны различные вклады в собственную энергию и их эффект после вставки в ряд. В конце в разделе 4 собраны все результаты и их обсуждение, а также приведён список использованной литературы в разделе 5. Некоторые детали расчетов представлены в приложении.

2. Постановка задачи

Рассматриваемая система предложена в статье [9]. Гамильтониан описывает двумерный фермионный газ с квадратичным спектром и двумя зонами. Диссипация вводится через прыжковые операторы в терминах уравнения Горини-Коссаковски-Сударшана-Линдблада (ГКСЛ).

В этом разделе будут даны основные обозначения, а также описан переход от уравнения ГКСЛ к келдышевскому формализму, в рамках которого пойдут дальнейшие вычисления.

2.1. Уравнение Горини-Коссаковски-Сударшана-Линдблада

Уравнение ГКСЛ, описывающее динамику матрицы плотности системы, имеет вид

$$\frac{d}{dt}\rho = \int_{\mathbf{x}} \left(i [\rho, H_0] + \sum_{j=1}^4 \gamma \left[2L_j \rho L_j^\dagger - \{L_j^\dagger L_j, \rho\} \right] \right). \quad (1)$$

Для краткости использовано обозначение $\int_{\mathbf{x}}$ для интегрирования $\int d^2x$ по координате двумерного пространства.

Гамильтонова часть (1) выражается через фермионные операторы рождения, $\psi_{\mathbf{q}} = (\psi_{u\mathbf{q}}, \psi_{d\mathbf{q}})^T$, и уничтожения, $\psi_{\mathbf{q}}^\dagger = (\psi_{u\mathbf{q}}^\dagger, \psi_{d\mathbf{q}}^\dagger)$, по формулам

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbf{x}} H_0 = \int_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}}^\dagger (\mathbf{d}_{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi_{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{d}_{\mathbf{q}} = (2mq_x, 2mq_y, q^2 - m^2). \quad (2)$$

По аналогии с интегрированием по координатам, введено обозначение $\int_{\mathbf{q}}$ для интегрирования $\int d^2q/(2\pi)^2$ по импульсному пространству. Матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ действуют в пространстве зон спектра (up-down). Данный гамильтониан можно диагонализировать, перейдя в базис $c_{\mathbf{q}} = (c_{u\mathbf{q}}, c_{d\mathbf{q}})^T = U_{\mathbf{q}}^\dagger \psi_{\mathbf{q}}$ и $c_{\mathbf{q}}^\dagger = (c_{u\mathbf{q}}^\dagger, c_{d\mathbf{q}}^\dagger) = \psi_{\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{q}}$.

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}}^\dagger (d_{\mathbf{q}} \sigma_z) c_{\mathbf{q}}, \quad U_{\mathbf{q}} = \frac{q_x \sigma_0 - iq_y \sigma_z - im \sigma_y}{\sqrt{d_{\mathbf{q}}}}, \quad d_{\mathbf{q}} = |\mathbf{d}_{\mathbf{q}}| = m^2 + q^2. \quad (3)$$

В диагональном базисе видно, что спектр состоит из двух зон: $d_{\mathbf{q}} = m^2 + q^2$ и $-d_{\mathbf{q}}$. Основное состояние, которое мы вслед за авторами [9]

будем называть dark state, представляет собой полностью заполненную нижнюю зону и пустую верхнюю.

Диссипация в уравнении (1) описывается константой диссипации γ , которую мы в дальнейшем будем считать малым параметром, и прыжковыми операторами

$$L_{1/2}(\mathbf{x}) = \psi_{u/d}^\dagger(\mathbf{x})l_u(\mathbf{x}), \quad L_{3/4} = \psi_{u/d}(\mathbf{x})l_d^\dagger(\mathbf{x}), \quad l_q = \sqrt{d_q}c_q. \quad (4)$$

Как видно из определения, операторы $L_\alpha(\mathbf{x})$ нелокальны в импульсном пространстве и переносят частицы либо в рамках одной зоны, либо сверху вниз. При этом общее число частиц в системе сохраняется.

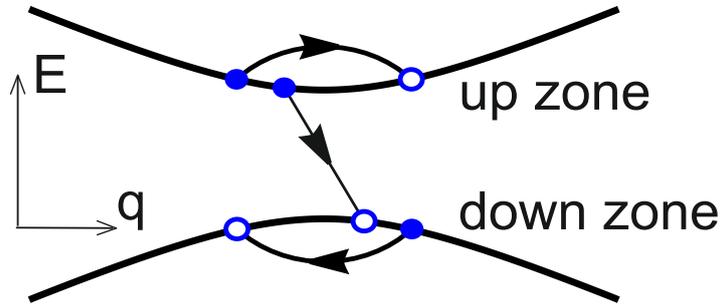


Рис. 1: Действие прыжковых операторов: перераспределение частиц в рамках одной зоны, либо перемещение их сверху вниз.

Так, операторы L_1 и L_4 меняют состояние частиц в верхней и нижней зонах соответственно, а L_2 и L_3 уничтожают частицу в верхней зоне и рождают в нижней.

Несложно проверить, что dark state является стационарным состоянием уравнения (1): действуя на него, прыжковые операторы дают ноль.

2.2. Келдышевский формализм

Далее нам будет удобно работать в технике Келдыша. Подробный переход от уравнения ГКСЛ (1) к келдышевскому формализму проделан в обзоре [4]. Статсумма примет вид

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_0[\bar{\psi},\psi] + iS_L[\bar{\psi},\psi]}. \quad (5)$$

Здесь введены фермионные поля $\psi = (\psi_{u+}, \psi_{d+}, \psi_{u-}, \psi_{d-})^T$ с удвоенным числом степеней свободы, а также действие, состоящее из гамиль-

тоновой,

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{\mathbf{q},t} \bar{\psi}_{\mathbf{q}}(t) (i\sigma_0\partial_t - \mathbf{d}_{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \tau_3 \psi_{\mathbf{q}}(t) = \\ &= \int_{\mathbf{q},t} \bar{c}_{\mathbf{q}}(t) (i\sigma_0\partial_t - d_{\mathbf{q}}\sigma_z) \tau_3 c_{\mathbf{q}}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

и диссипативной,

$$\begin{aligned} S_L &= -i\gamma \int_{t,\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 \left[2L_{j+}(t-\delta)\bar{L}_{j-}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \bar{L}_{j+}(t)L_{j+}(t-\delta) - \bar{L}_{j-}(t)L_{j-}(t+\delta) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

частей. Матрицы Паули (τ_1, τ_2, τ_3) действуют в келдышевском пространстве. Прыжковые операторы определяются через фермионные поля по аналогии с (4):

$$\begin{aligned} L_{1/2} &= \bar{\psi}_{u/d}(\mathbf{x})l_u(\mathbf{x}), & L_{3/4} &= \psi_{u/d}(\mathbf{x})\bar{l}_d(\mathbf{x}), \\ \bar{L}_{1/2} &= \bar{l}_u(\mathbf{x})\psi_{u/d}(\mathbf{x}), & \bar{L}_{3/4} &= l_d(\mathbf{x})\bar{\psi}_{u/d}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (8)$$

Связи между полями в разных базисах определяются той же матрицей $U_{\mathbf{q}}$, что и в формулах (3):

$$l_{\mathbf{q}} = \sqrt{d_{\mathbf{q}}}c_{\mathbf{q}} = \sqrt{d_{\mathbf{q}}}U_{\mathbf{q}}^{\dagger}\psi_{\mathbf{q}}, \quad \bar{l}_{\mathbf{q}} = \sqrt{d_{\mathbf{q}}}\bar{c}_{\mathbf{q}} = \sqrt{d_{\mathbf{q}}}U_{\mathbf{q}}\bar{\psi}_{\mathbf{q}}. \quad (9)$$

Для соблюдения причинности на келдышевском контуре, в действии (7) введены бесконечно малые раздвижки по времени δ . Определим вспомогательные матрицы $\mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(j)}$ согласно

$$L_j = \int_{\mathbf{q}\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} \bar{c}_{\mathbf{p}} \mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(j)} c_{\mathbf{q}}, \quad \bar{L}_j = \int_{\mathbf{q}\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{x}} \bar{c}_{\mathbf{p}} \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(j)} c_{\mathbf{q}}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(1/2)} \right]_{ab} &= \sqrt{d_{\mathbf{q}}} [U_{\mathbf{p}}^{\dagger}]_{a,1/2} \delta_{bu}, & \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(3/4)} \right]_{ab} &= -\sqrt{d_{\mathbf{p}}} [U_{\mathbf{q}}]_{1/2,b} \delta_{ad}, \\ \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(j)} &= \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}\mathbf{p}}^{(j)} \right]^{\dagger}. \end{aligned} \quad (11)$$

Или в явном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(1)} &= \sqrt{\frac{d_{\mathbf{q}}}{d_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} p_x + ip_y & 0 \\ -m & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(2)} &= \sqrt{\frac{d_{\mathbf{q}}}{d_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} m & 0 \\ p_x - ip_y & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(3)} &= \sqrt{\frac{d_{\mathbf{p}}}{d_{\mathbf{q}}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q_x + iq_y & m \end{pmatrix}, & \mathcal{L}_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^{(4)} &= -\sqrt{\frac{d_{\mathbf{p}}}{d_{\mathbf{q}}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & q_x + iq_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь можно переписать диссипативное действие (7) в явном виде через поля c_p :

$$S_L = -i\gamma \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \sum_{j=1}^4 \left[2\bar{c}_{\mathbf{p}_1-}(t) \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2-}(t + \epsilon_\alpha) \bar{c}_{\mathbf{p}_3+}(t - \delta) \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4+}(t - \delta - \epsilon_\alpha) - \right. \quad (13)$$

$$- \bar{c}_{\mathbf{p}_1+}(t + \epsilon_\alpha) \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2+}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3+}(t - \delta) \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4+}(t - \delta - \epsilon_\alpha) -$$

$$\left. - \bar{c}_{\mathbf{p}_1-}(t - \epsilon_\alpha) \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2-}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3-}(t + \delta) \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4-}(t + \delta + \epsilon_\alpha) \right].$$

Дополнительные раздвижки ϵ_α являются побочными по отношению к δ и отличаются по знаку: $\epsilon_{1,2} > 0$ и $\epsilon_{3,4} < 0$.

Заметим, что вследствие сохранения полного числа частиц келдышевское действие $S_0 + S_L$, определяющееся формулами (6) и (13), обладает сильной симметрией и инвариантно относительно глобальных $U(1) \times U(1)$ -преобразований, $\bar{c}_\sigma \rightarrow e^{-i\alpha_\sigma} \bar{c}_\sigma$ и $c_\sigma \rightarrow e^{i\alpha_\sigma} c_\sigma$, где индекс $\sigma = \pm$ обозначает ветку келдышевского контура. В то же время трансляционная инвариантность в этой модели является лишь слабой симметрией [11]-[12], потому что действие S_L инвариантно только относительно трансляций, действующих одновременно на прямой и обратной ветвях келдышевского контура. Как следствие, диссипация в данной системе может привести к релаксации полного импульса.

Для завершения процедуры осталось сделать келдышевский поворот от базиса $c = (c_{u+}, c_{d+}, c_{u-}, c_{d-})^T$ к $c = (c_{u1}, c_{d1}, c_{u2}, c_{d2})^T$. При помощи матриц

$$A_+ = \sigma_0(\tau_1 + \tau_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$A_- = \sigma_0(\tau_1 - \tau_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

можно переписать элементы действия (13) вида $\bar{c}_\pm \mathcal{L} c_\pm$ как

$$\bar{c}_\pm \mathcal{L} c_\pm = \frac{1}{2} (\pm \bar{c}_1 + \bar{c}_2) \mathcal{L} (c_1 \pm c_2) = \frac{1}{2} \bar{c} A_\pm \mathcal{L} c. \quad (15)$$

Тогда (13) перейдёт в

$$S_L = -\frac{i\gamma}{4} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \sum_{j=1}^4 \left[2\bar{c}_{\mathbf{p}_1}(t) A_- \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2}(t + \epsilon_\alpha) \bar{c}_{\mathbf{p}_3}(t - \delta) A_+ \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4}(t - \delta - \epsilon_\alpha) - \right. \quad (16)$$

$$- \bar{c}_{\mathbf{p}_1}(t + \epsilon_\alpha) A_+ \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3}(t - \delta) A_+ \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4}(t - \delta - \epsilon_\alpha) -$$

$$\left. - \bar{c}_{\mathbf{p}_1}(t - \epsilon_\alpha) A_- \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3}(t + \delta) A_- \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4}(t + \delta + \epsilon_\alpha) \right].$$

В дальнейшем мы будем использовать именно эти формы записи действия, (13) либо (16).

2.3. Функции Грина

Авторами уже упомянутой статьи [10] было проведено подробное вычисление функций Грина для рассматриваемой модели в самосогласованном борновском приближении.

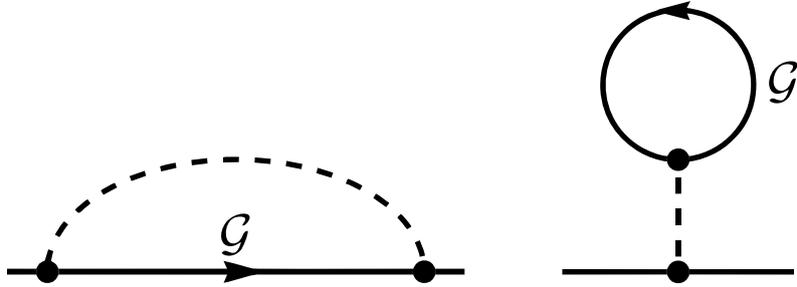


Рис. 2: Диаграммы из статьи [10] для вычисления собственной энергии в самосогласованном борновском приближении. Сплошная линия — это полная функция Грина. Пунктир указывает на диссипативное взаимодействие.

Этот результат мы и будем использовать дальше при вычислении диаграмм:

$$\mathcal{G}_q(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_q^R(\varepsilon) & \mathcal{G}_q^K(\varepsilon) \\ 0 & \mathcal{G}_q^A(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_q^{R/A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon - d_q \pm i\gamma n d_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon + d_q \pm i\gamma n d_q} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathcal{G}_q^K(\varepsilon) = \mathcal{G}_q^R(\varepsilon) \sigma_z - \sigma_z \mathcal{G}_q^A(\varepsilon).$$

Здесь введено обозначение для плотности частиц

$$n = \int_{\mathbf{k}} 1, \quad (18)$$

которая по своему смыслу обозначает ультрафиолетовую обрезку по импульсам для всех наших интегралов.

3. Вычисления

3.1. Микроскопические предпосылки модели

До сих пор задача была поставлена исключительно математически, без физических предпосылок. Попробуем понять, какая система могла бы играть роль бозонной бани, реализующей описанную в предыдущих разделах диссипацию. Для этого нужно построить действие S_Φ , которое при усреднении по шуму давало бы нашу диссипацию (13), то есть отвечало бы условию

$$\langle e^{iS_\Phi} \rangle = e^{-\langle S_\Phi^2 \rangle / 2} = e^{iS_L}. \quad (19)$$

Будем искать S_Φ в виде

$$S_\Phi = \int_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, t} \sum_{j=1}^4 \left[\bar{c}_{\mathbf{p}+}(t + \varepsilon_{1j}) \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}+}^{(j)}(t) c_{\mathbf{q}+}(t + \varepsilon_{2j}) - \bar{c}_{\mathbf{p}-}(t + \varepsilon_{3j}) \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}-}^{(j)}(t) c_{\mathbf{q}-}(t + \varepsilon_{4j}) \right], \quad (20)$$

где шум квантовый и представлен случайным гауссовым полем в виде матриц $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}\pm}^{(j)}$ с некоторыми корреляторами

$$\left\langle [\Phi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\pm}^{(i)}]_{ab}(t) [\Phi_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4\pm}^{(j)}]_{cd}(t') \right\rangle, \quad \left\langle [\Phi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2-}^{(i)}]_{ab}(t) [\Phi_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4+}^{(j)}]_{cd}(t') \right\rangle. \quad (21)$$

В действии (20) матрицы $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}+}^{(j)}(t)$ и $\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}-}^{(j)}(t)$ из первого и второго слагаемого соответственно неравны друг другу, то есть имеется ненулевая квантовая компонента поля $(\Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}+}^{(j)}(t) - \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}-}^{(j)}(t)) / 2$. Это необходимо для воспроизведения структуры (13), а именно взаимодействия полей на разных ветвях контура, «+» и «-».

Исходя из равенства $iS_L = -\frac{1}{2} \langle S_\Phi^2 \rangle$, то есть

$$\begin{aligned} & -2\gamma \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \\ & \sum_{j=1}^4 \left[2\bar{c}_{\mathbf{p}_1-}(t) \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2-}(t + \varepsilon_\alpha) \bar{c}_{\mathbf{p}_3+}(t - \delta) \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4+}(t - \delta - \varepsilon_\alpha) - \right. \\ & \quad - \bar{c}_{\mathbf{p}_1+}(t + \varepsilon_\alpha) \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2+}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3+}(t - \delta) \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4+}(t - \delta - \varepsilon_\alpha) - \\ & \quad \left. - \bar{c}_{\mathbf{p}_1-}(t - \varepsilon_\alpha) \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2-}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3-}(t + \delta) \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4-}(t + \delta + \varepsilon_\alpha) \right] = \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, t, \mathbf{p}', \mathbf{q}', t'} \sum_{ij} \\
&\left\langle \bar{c}_{\mathbf{p}+}(t + \varepsilon_{1i}) \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}+}^{(i)}(t) c_{\mathbf{q}+}(t + \varepsilon_{2i}) \bar{c}_{\mathbf{p}'}(t' + \varepsilon_{1j}) \Phi_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'+}^{(j)}(t') c_{\mathbf{q}'+}(t' + \varepsilon_{2j}) - \right. \\
&- \bar{c}_{\mathbf{p}-}(t + \varepsilon_{3i}) \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}-}^{(i)}(t) c_{\mathbf{q}-}(t + \varepsilon_{4i}) \bar{c}_{\mathbf{p}'}(t' + \varepsilon_{1j}) \Phi_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'+}^{(j)}(t') c_{\mathbf{q}'+}(t' + \varepsilon_{2j}) - \\
&- \bar{c}_{\mathbf{p}+}(t + \varepsilon_{1i}) \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}+}^{(i)}(t) c_{\mathbf{q}+}(t + \varepsilon_{2i}) \bar{c}_{\mathbf{p}'}(t' + \varepsilon_{3j}) \Phi_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'-}^{(j)}(t') c_{\mathbf{q}'-}(t' + \varepsilon_{4j}) + \\
&\left. + \bar{c}_{\mathbf{p}-}(t + \varepsilon_{3i}) \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}-}^{(i)}(t) c_{\mathbf{q}-}(t + \varepsilon_{4i}) \bar{c}_{\mathbf{p}'}(t' + \varepsilon_{3j}) \Phi_{\mathbf{p}'\mathbf{q}'-}^{(j)}(t') c_{\mathbf{q}'-}(t' + \varepsilon_{4j}) \right\rangle, \tag{23}
\end{aligned}$$

несложно подобрать корреляторы

$$\begin{aligned}
&\left\langle [\Phi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\pm}^{(i)}]_{ab}(t) [\Phi_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4\pm}^{(j)}]_{cd}(t') \right\rangle = 2\gamma(2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta^{ij} \\
&\left(\left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(i)} \right]_{ab} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4}^{(j)} \right]_{cd} \delta(t - t' \mp \delta) + \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(i)} \right]_{ab} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4}^{(j)} \right]_{cd} \delta(t - t' \pm \delta) \right), \\
&\left\langle [\Phi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2-}^{(i)}]_{ab}(t) [\Phi_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4+}^{(j)}]_{cd}(t') \right\rangle = 2\gamma(2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta^{ij} \\
&\left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}^{(i)} \right]_{ab} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4}^{(j)} \right]_{cd} [\delta(t - t' - \delta) + \delta(t - t' + \delta)]. \tag{24}
\end{aligned}$$

и правильные раздвижки по времени: $\varepsilon_{4i} - \varepsilon_{3i} = \varepsilon_{1i} - \varepsilon_{2i} = \varepsilon_j$ и $\varepsilon_{3i} - \varepsilon_{1i} = \delta' > \delta$. Тогда действие (20) примет вид

$$\begin{aligned}
S_{\Phi} = \int_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, t} \sum_{j=1}^4 &\left[\bar{c}_{\mathbf{p}+}(t - \delta') \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}+}^{(j)}(t) c_{\mathbf{q}+}(t - \delta' - \varepsilon_j) - \right. \\
&\left. - \bar{c}_{\mathbf{p}-}(t + \delta') \Phi_{\mathbf{p}\mathbf{q}-}^{(j)}(t) c_{\mathbf{q}-}(t + \delta' + \varepsilon_j) \right]. \tag{25}
\end{aligned}$$

Для понимания физики этого бозонного поля ключевую роль играют корреляторы (24). Дельта-функциональная зависимость от времени указывает на формально бесконечную температуру бани по аналогии с известным выражением $2iT\delta(t - t')$ для фононов в равновесии [5]. Нарушение детального баланса указывает на неравновесность системы.

3.2. Диффузон

Перейдём к изучению диффузионных мод для возбуждений на фоне основного состояния, dark state. Начнём с вычисления лестничной диаграммы для диффузона, описывающего динамику квазичастиц в верхней

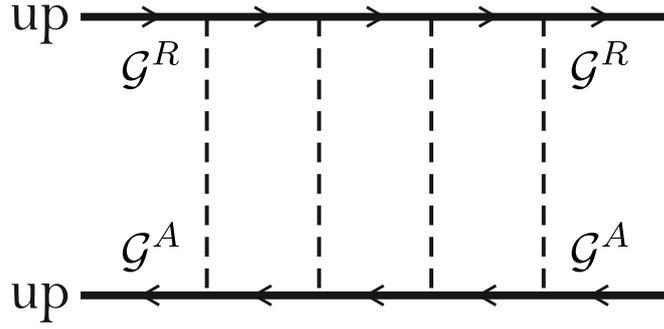


Рис. 3: Лестничная диаграмма для u -диффузора. Сплошные линии обозначают функции Грина, пунктирные – диссипацию.

зоне спектра (для краткости далее будем называть его u -диффузором).

Эта выкладка нечувствительна к раздвижкам по времени, их можно опустить, что позволяет упростить диссипативное действие (13). Введя вспомогательную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

можно переписать (13) как

$$S_L = -\frac{i\gamma}{4} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \sum_{j=1}^4 \left[2\bar{c}_{\mathbf{p}_1} A_- \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2} \bar{c}_{\mathbf{p}_3} A_+ \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4} - \bar{c}_{\mathbf{p}_1} A_+ \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2} \bar{c}_{\mathbf{p}_3} A_+ \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4} - \bar{c}_{\mathbf{p}_1} A_- \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2} \bar{c}_{\mathbf{p}_3} A_- \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4} \right] = \quad (27)$$

$$= \frac{i\gamma}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \bar{c}_{\mathbf{p}_1} \tau_\mu \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2} \bar{c}_{\mathbf{p}_3} \tau_\nu \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4}. \quad (28)$$

В этой записи подразумевается, что все фермионные поля взяты в один и тот же момент времени t .

Теперь, используя упрощённый вид действия, можно приступить к вычислению.

3.2.1. Первое и второе слагаемое в лестничном ряду u -диффузора

Начнём с диаграмм с одной и двумя линиями, то есть с первого и второго порядков по γ .

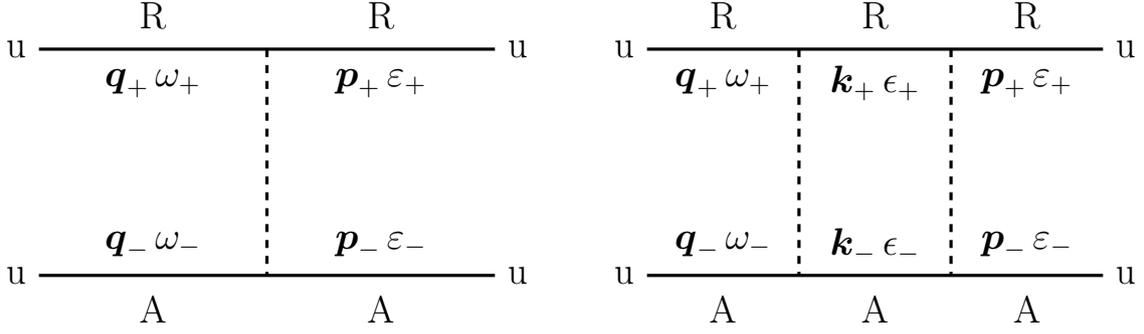


Рис. 4: Диаграммы первого и второго порядка по γ в лестничном ряду для uu -диффузона.

В первом порядке от общего выражения

$$\begin{aligned} & \langle c_{u\alpha q_+}(t_1) \bar{c}_{u\beta' q_-}(t_1) c_{u\beta p_-}(t_2) \bar{c}_{u\alpha' p_+}(t_2) \rangle = \\ & = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c c_{u\alpha q_+}(t_1) \bar{c}_{u\beta' q_-}(t_1) c_{u\beta p_-}(t_2) \bar{c}_{u\alpha' p_+}(t_2) e^{iS_0 + iS_L} \end{aligned} \quad (29)$$

останется первое слагаемое разложения по γ ,

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma}{2} \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} c_{u\alpha q_+}(t_1) \bar{c}_{u\beta' q_-}(t_1) c_{u\beta p_-}(t_2) \bar{c}_{u\alpha' p_+}(t_2) \\ & e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \bar{c}_{\mathbf{p}_1}(t) \tau_\mu \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}_2}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3}(t) \tau_\nu \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}_4}(t) e^{iS_0}. \end{aligned} \quad (30)$$

В этой записи индексы $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ обозначают компоненты в келдышевском пространстве, 1 или 2. Импульсы $\mathbf{q}_\pm = \mathbf{q} \pm \mathbf{P}/2$ и $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{P}/2$ соответствуют верхней и нижней веткам диффузона. Для конкретики положим $t_1 > t_2$.

Чтобы в (30) взять интеграл по $\mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c$, необходимо спарить фермионные поля согласно Рис. 4, что даст функции Грина (17):

$$\frac{\gamma}{2} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \langle c_{u\beta p_-}(t_2) \bar{c}_{\mathbf{p}_1}(t) \rangle_0 \tau_\mu \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(j)} \langle c_{\mathbf{p}_2}(t) \bar{c}_{u\beta' q_-}(t_1) \rangle_0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \langle c_{u\alpha q_+}(t_1) \bar{c}_{\mathbf{p}_3}(t) \rangle_0 \tau_\nu \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(j)} \langle c_{\mathbf{p}_4}(t) \bar{c}_{u\alpha' p_+}(t_2) \rangle_0 e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} = \\ & = \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbf{x}, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{uu} \\ & \left[\mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}(t_1, t) \tau_\nu \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}(t, t_2) \right]^{\alpha\alpha'} \left[\mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}(t_2, t) \tau_\mu \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}(t, t_1) \right]^{\beta\beta'}. \end{aligned} \quad (32)$$

Будем записывать полные функции Грина (17) в виде суммы

$$\mathcal{G}_{up}(\varepsilon) = \mathcal{G}_{up}^R(\varepsilon)\Lambda_u^R + \mathcal{G}_{up}^A(\varepsilon)\Lambda_u^A \quad (33)$$

с матрицами

$$\Lambda_u^R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_u^A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

в келдышевском пространстве. Несложно заметить, что из-за соотношения между элементами матрицы $P^{\mu\nu}$, а также свойств матриц $\Lambda^{R/A}$, в формуле (32) не зануляется только одна из расстановок матриц $\Lambda^{R/A}$, а именно

$$\frac{\gamma}{2} \int_{\mathbf{x}, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{uu} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{uq_+}^R(t_1, t) \mathcal{G}_{up_+}^R(t, t_2) \mathcal{G}_{uq_-}^A(t, t_1) \mathcal{G}_{up_-}^A(t_2, t) \left[\Lambda_u^R \tau_\nu \Lambda_u^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_u^A \tau_\mu \Lambda_u^A \right]^{\beta\beta'} = \\ & = 2\gamma \int_{\mathbf{x}, t} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \sum_{j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{uu} \\ & \mathcal{G}_{uq_+}^R(t_1, t) \mathcal{G}_{up_+}^R(t, t_2) \mathcal{G}_{up_-}^A(t_2, t) \mathcal{G}_{uq_-}^A(t, t_1) \left[\Lambda_u^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_u^A \right]^{\beta\beta'}. \end{aligned} \quad (36)$$

Продельвая те же выкладки для разложения формулы (29) до второго порядка по γ , получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma}{2} \right]^2 \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{iS_0} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{p}_j, t, \mathbf{x}', \mathbf{p}'_j, t'} c_{u\alpha\mathbf{q}_+}(t_1) \bar{c}_{u\beta'\mathbf{q}_-}(t_1) c_{u\beta\mathbf{p}_-}(t_2) \bar{c}_{u\alpha'\mathbf{p}_+}(t_2) \\ & P^{\mu\nu} P^{\mu'\nu'} \sum_{i,j=1}^4 \bar{c}_{\mathbf{p}_1}(t) \tau_\mu \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}^{(i)} c_{\mathbf{p}_2}(t) \bar{c}_{\mathbf{p}_3}(t) \tau_\nu \mathcal{L}_{\mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4}^{(i)} c_{\mathbf{p}_4}(t) e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)} \\ & \bar{c}_{\mathbf{p}'_1}(t') \tau_{\mu'} \bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2}^{(j)} c_{\mathbf{p}'_2}(t') \bar{c}_{\mathbf{p}'_3}(t') \tau_{\nu'} \mathcal{L}_{\mathbf{p}'_3 \mathbf{p}'_4}^{(j)} c_{\mathbf{p}'_4}(t') e^{i\mathbf{x}'(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}'_4)} \rightarrow \\ & \rightarrow [2\gamma]^2 \left[\Lambda_u^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_u^A \right]^{\beta\beta'} \int_{\mathbf{x}, t, t', \mathbf{k}} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \\ & \sum_{i,j} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{k}_+}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{k}_+ \mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{k}_-}^{(i)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \\ & \mathcal{G}_{uq_+}^R(t_1, t) \mathcal{G}_{uq_+}^R(t, t') \mathcal{G}_{up_+}^R(t', t_2) \mathcal{G}_{up_-}^A(t_2, t') \mathcal{G}_{up_-}^A(t', t) \mathcal{G}_{uq_-}^A(t, t_1). \end{aligned} \quad (37)$$

Далее для удобства перейдём от импульсно-временного в импульсно-частотное представление. Опустим общие множители, а именно

$[\Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} [\Lambda_u^A]^{\beta\beta'}$, несущий индексы в келдышевском пространстве на концах диффузона, и $\int_{\mathbf{x}} \exp\{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)\}$, отвечающий за сохранение импульса (этот множитель должен дополнять все диаграммы, однако далее мы не будем его повторять для краткости). Тогда полученное выражение для первого порядка по γ будет выглядеть как

$$2\gamma \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) \sum_{j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{uu}, \quad (39)$$

а для второго порядка как

$$\begin{aligned} & [2\gamma]^2 \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) \\ & \int_{\epsilon, \mathbf{k}} \mathcal{G}_{uk_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{uk_-}^A(\epsilon_-) \sum_{i,j} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{k}_+}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{k}_+ \mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{k}_-}^{(i)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu}. \end{aligned} \quad (40)$$

По аналогии с уже введёнными обозначениями для \mathbf{q}_{\pm} и \mathbf{p}_{\pm} , здесь использованы $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \mathbf{P}/2$, $\omega_{\pm} = \omega \pm \Omega/2$, $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \Omega/2$ и $\epsilon_{\pm} = \epsilon \pm \Omega/2$.

3.2.2. Суммирование лестничного ряда для uu -диффузона

Исходя из результатов для первых двух порядков, $(n+1)$ -й член лестничного ряда в импульсно-частотном представлении будет равен

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [2\gamma]^{n+1} \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) \\ & \int_{\epsilon_{1\dots n}, \mathbf{k}_{1\dots n}} \mathcal{G}_{uk_{n+}}^R(\epsilon_{n+}) \dots \mathcal{G}_{uk_{1+}}^R(\epsilon_{1+}) \mathcal{G}_{uk_{1-}}^A(\epsilon_{1-}) \dots \mathcal{G}_{uk_{n-}}^A(\epsilon_{n-}) \\ & \sum_{i_{1\dots(n+1)}=1}^4 \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{k}_{n+}}^{(i_{n+1})} \right]_{uu} \dots \left[\mathcal{L}_{\mathbf{k}_{1+} \mathbf{p}_+}^{(i_1)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{k}_{1-}}^{(i_1)} \right]_{uu} \dots \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}_{n-} \mathbf{q}_-}^{(i_{n+1})} \right]_{uu}. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя определение (11) матриц \mathcal{L} , можно переписать сумму по элементам этих матриц:

$$\sum_{i_{1\dots(n+1)}=1}^4 \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{k}_{n+}}^{(i_{n+1})} \right]_{uu} \dots \left[\mathcal{L}_{\mathbf{k}_{1+} \mathbf{p}_+}^{(i_1)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_- \mathbf{k}_{1-}}^{(i_1)} \right]_{uu} \dots \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}_{n-} \mathbf{q}_-}^{(i_{n+1})} \right]_{uu} = \quad (42)$$

$$= \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \prod_{i=1}^n \sqrt{d_{\mathbf{k}_{i+}} d_{\mathbf{k}_{i-}}} \left[U_{\mathbf{k}_{i+}}^\dagger U_{\mathbf{k}_{i-}} \right]_{uu}. \quad (43)$$

Тогда (n+1)-й элемент ряда (41) переписывается как

$$I_{n+1} = [2\gamma]^{n+1} \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) \sqrt{d_{p_+} d_{p_-}} \left[U_{q_+}^\dagger U_{q_-} \right]_{uu} \left[\int_{\varepsilon, \mathbf{k}} \mathcal{G}_{uk_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{uk_-}^A(\varepsilon_-) \sqrt{d_{k_+} d_{k_-}} \left[U_{k_+}^\dagger U_{k_-} \right]_{uu} \right]^n. \quad (44)$$

Для сокращения записи введём обозначение для появившегося интеграла:

$$f(\Omega, \mathbf{P}) = \int_{\varepsilon, \mathbf{k}} \mathcal{G}_{uk_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{uk_-}^A(\varepsilon_-) \sqrt{d_{k_+} d_{k_-}} \left[U_{k_+}^\dagger U_{k_-} \right]_{uu}. \quad (45)$$

Теперь можно просуммировать ряд для диффузона $D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$:

$$D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) = \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) \sqrt{d_{p_+} d_{p_-}} \left[U_{q_+}^\dagger U_{q_-} \right]_{uu} 2\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} [2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})]^n = \quad (46)$$

$$= \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) \sqrt{d_{p_+} d_{p_-}} \left[U_{q_+}^\dagger U_{q_-} \right]_{uu} \frac{2\gamma}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})}. \quad (47)$$

Покажем, что у полученного выражения есть диффузионный полюс при малых Ω и \mathbf{P} . Для этого можно взять интеграл по частоте в выражении (45) и разложить подынтегральное выражение:

$$f(\Omega, \mathbf{P}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{i \sqrt{d_{k_+} d_{k_-}} \left[U_{k_+}^\dagger U_{k_-} \right]_{uu}}{d_{k_-} - d_{k_+} + \Omega + i\gamma n(d_{k_+} + d_{k_-})} \sim \quad (48)$$

$$\sim \int_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\gamma n} + \frac{i\Omega}{4\gamma^2 n^2 d_{\mathbf{k}}} - \frac{P^2}{4n\gamma d_{\mathbf{k}}} - \frac{k^2 P^2}{4n^3 \gamma^3 d_{\mathbf{k}}^2} + \dots \right). \quad (49)$$

Подставляя результат в полюс диффузона (47), получим искомый полюс,

$$D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) \propto [1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})]^{-1} \sim \left[\int_{\mathbf{k}} \left(\frac{P^2}{2nd_{\mathbf{k}}} + \frac{k^2 P^2}{2n^3 \gamma^2 d_{\mathbf{k}}^2} - \frac{i\Omega}{2\gamma n^2 d_{\mathbf{k}}} \right) \right]^{-1} \propto [DP^2 - i\Omega]^{-1}, \quad (50)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \gamma n + \frac{1}{n\gamma} \frac{\int_k k^2/d_k^2}{\int_k 1/d_k}. \quad (51)$$

Этот результат совпадает с коэффициентом диффузии, полученным в статье [10]. Вспоминая про введённую обрезку (18), можно взять интегралы из формулы (51):

$$D = \gamma n + \frac{1}{n\gamma} \left[1 - \frac{1}{\ln(1 + 4\pi n/m^2)} \right]. \quad (52)$$

Таким образом, коэффициент диффузии контролируется двумя безразмерными параметрами: γn и m^2/n .

3.2.3. dd-диффузон

Теперь сделаем аналогичное вычисление для возбуждений в нижней зоне. Выкладки (29)-(32) остаются прежними с точностью до замены индексов в формуле (32):

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{2} \int_{x,t} e^{ix(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{dd} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{dd} \\ & \left[\mathcal{G}_{d\mathbf{q}_+}(t_1, t) \tau_\nu \mathcal{G}_{d\mathbf{p}_+}(t, t_2) \right]^{\alpha\alpha'} \left[\mathcal{G}_{d\mathbf{p}_-}(t_2, t) \tau_\mu \mathcal{G}_{d\mathbf{q}_-}(t, t_1) \right]^{\beta\beta'}. \end{aligned} \quad (53)$$

Далее в промежуточных выкладках нужно учесть, что определение функций Грина в этой зоне спектра отличается от (33)-(34):

$$\mathcal{G}_{d,p}(\varepsilon) = \mathcal{G}_{d,p}^R(\varepsilon) \Lambda_d^R + \mathcal{G}_{d,p}^A(\varepsilon) \Lambda_d^A, \quad (54)$$

$$\Lambda_d^R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_d^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Однако итоговый результат опять же отличается только индексами:

$$\frac{\gamma}{2} \int_{x,t} e^{ix(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \sum_{j=1}^4 P^{\mu\nu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{dd} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{dd} \quad (56)$$

$$\mathcal{G}_{d\mathbf{q}_+}^R(t_1, t) \mathcal{G}_{d\mathbf{p}_+}^R(t, t_2) \mathcal{G}_{d\mathbf{p}_-}^A(t_2, t) \mathcal{G}_{d\mathbf{q}_-}^A(t, t_1) \left[\Lambda_d^R \tau_\nu \Lambda_d^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_d^A \tau_\mu \Lambda_d^A \right]^{\beta\beta'} =$$

$$= 2\gamma \int_{x,t} e^{ix(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)} \sum_{j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}_+ \mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{dd} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_- \mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{dd} \quad (57)$$

$$\mathcal{G}_{d\mathbf{q}_+}^R(t_1, t) \mathcal{G}_{d\mathbf{p}_+}^R(t, t_2) \mathcal{G}_{d\mathbf{p}_-}^A(t_2, t) \mathcal{G}_{d\mathbf{q}_-}^A(t, t_1) \left[\Lambda_d^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_d^A \right]^{\beta\beta'}.$$

Как и в случае uu-диффузора, перейдём от импульсно-временного в импульсно-частотное представление и опустим общие множители $[\Lambda_d^R]^{\alpha\alpha'} [\Lambda_d^A]^{\beta\beta'}$ и $\int_{\mathbf{x}} \exp\{i\mathbf{x}(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_- + \mathbf{q}_- - \mathbf{q}_+)\}$:

$$2\gamma \mathcal{G}_{dq_+}^R(t_1, t) \mathcal{G}_{dp_+}^R(t, t_2) \mathcal{G}_{dp_-}^A(t_2, t) \mathcal{G}_{dq_-}^A(t, t_1) \sum_{j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}_+\mathbf{p}_+}^{(j)} \right]_{dd} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_-\mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{dd}. \quad (58)$$

Продолжая рассуждения по той же линии, что в предыдущем разделе, получим лестничный ряд для dd-диффузора,

$$D_{dd}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) = \mathcal{G}_{dq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{dp_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{dp_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{dq_-}^A(\omega_-) \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{dd} 2\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} [2\gamma g(\Omega, \mathbf{P})]^n = \quad (59)$$

$$= \mathcal{G}_{dq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{dp_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{dp_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{dq_-}^A(\omega_-) \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{dd} \frac{2\gamma}{1 - 2\gamma g(\Omega, \mathbf{P})}, \quad (60)$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$g(\Omega, \mathbf{P}) = \int_{\varepsilon, \mathbf{k}} \mathcal{G}_{dk_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{dk_-}^A(\varepsilon_-) \sqrt{d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{k}_-}} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{k}_-} \right]_{dd}. \quad (61)$$

Это выражение также имеет диффузионный полюс при малых Ω и \mathbf{P} . Чтобы его увидеть, надо взять интеграл по частотам и разложить подинтегральное выражение в (61),

$$g(\Omega, \mathbf{P}) = \int_{\mathbf{k}} \frac{i \sqrt{d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{k}_-}} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{k}_-} \right]_{dd}}{d_{\mathbf{k}_+} - d_{\mathbf{k}_-} + \Omega + i\gamma n(d_{\mathbf{k}_+} + d_{\mathbf{k}_-})} \sim \quad (62)$$

$$\sim \int_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\gamma n} + \frac{i\Omega}{4\gamma^2 n^2 d_{\mathbf{k}}} - \frac{P^2}{4n\gamma d_{\mathbf{k}}} - \frac{k^2 P^2}{4n^3 \gamma^3 d_{\mathbf{k}}^2} + \dots \right), \quad (63)$$

и подставить результат в (60):

$$D_{dd}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) \propto [1 - 2\gamma g(\Omega, \mathbf{P})]^{-1} \sim \sim \left[\int_{\mathbf{k}} \left(\frac{P^2}{2nd_{\mathbf{k}}} + \frac{k^2 P^2}{2n^3 \gamma^2 d_{\mathbf{k}}^2} - \frac{i\Omega}{2\gamma n^2 d_{\mathbf{k}}} \right) \right]^{-1} \propto [DP^2 - i\Omega]^{-1}. \quad (64)$$

Коэффициент диффузии совпадает с (51).

3.2.4. ud- и du-диффузоны

Диаграммы с ud- и du-диффузонами равны нулю из-за структуры матриц \mathcal{L} . Зануляются конструкции типа

$$\sum_{j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{(j)} \right]_{dd} = \sum_{j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{(j)} \right]_{dd} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{(j)} \right]_{uu} = 0, \quad (65)$$

из-за чего пунктирная линия диссипации не может соединять u- и d-линии.

Таким образом, межзонных диффузонов в системе нет.

3.3. Собственная энергия диффузона

В предыдущем разделе мы показали, что возбуждения на фоне dark state обладают диффузионной динамикой и получили коэффициент диффузии (51), совпадающий с результатом статьи [10]. В этом разделе мы рассмотрим основные вклады в собственную энергию диффузона, чтобы получить поправки к коэффициенту диффузии и изучить вопрос об устойчивости dark state, поднятый в работе [10]. Для удобства сфокусируемся на uu-диффузоне, подразумевая, что результаты для dd-диффузона будут аналогичными.

Обозначим диаграммное выражение для вставки в лестничный ряд как $\xi(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$.

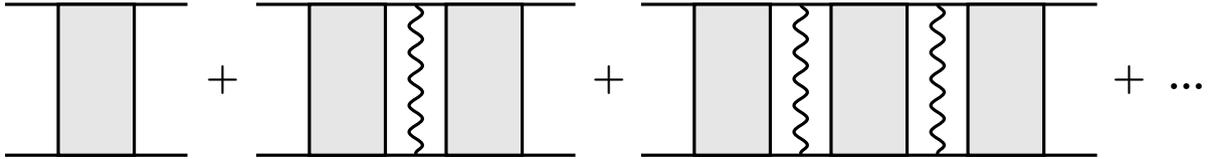


Рис. 5: Учёт собственной энергии диффузона. Волнистые линии обозначают вставляемые диаграммы $\xi(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$, а закрашенные прямоугольники – сами лестничные диаграммы.

Одна вставка $\xi(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$ между двумя диффузонами (47) приведёт к появлению дополнительного множителя:

$$\int_{\varepsilon, \mathbf{k}, \varepsilon', \mathbf{k}'} D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{k}) \left[\Lambda_u^R \right]^{\alpha\gamma} \left[\Lambda_u^A \right]^{\beta\delta} \xi(\Omega, \mathbf{P}, \varepsilon, \mathbf{k}, \varepsilon', \mathbf{k}') \left[\Lambda_u^R \right]^{\gamma\gamma'} \left[\Lambda_u^A \right]^{\delta\delta'} D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \varepsilon', \mathbf{k}', \varepsilon, \mathbf{p}) \left[\Lambda_u^R \right]^{\gamma'\alpha'} \left[\Lambda_u^A \right]^{\delta'\beta'} = \quad (66)$$

$$= \int_{\epsilon, \mathbf{k}, \epsilon', \mathbf{k}'} \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_-}^A(\epsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}^A(\omega_-) \sqrt{d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{k}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \xi(\Omega, \mathbf{P}, \epsilon, \mathbf{k}, \epsilon', \mathbf{k}') \left[\Lambda_u^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_u^A \right]^{\beta\beta'} \left[\frac{2\gamma}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})} \right]^2 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{u\mathbf{k}'_+}^R(\epsilon'_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}^A(\epsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}'_-}^A(\epsilon'_-) \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{k}'_+}^\dagger U_{\mathbf{k}'_-} \right]_{uu} = \\ & = D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \epsilon, \mathbf{p}) \left[\Lambda_u^R \right]^{\alpha\alpha'} \left[\Lambda_u^A \right]^{\beta\beta'} \frac{2\gamma}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})} \\ & \int_{\epsilon, \mathbf{k}, \epsilon', \mathbf{k}'} \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}'_+}^R(\epsilon'_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}'_-}^A(\epsilon'_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_-}^A(\epsilon_-) \\ & \sqrt{d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{k}_-}} \left[U_{\mathbf{k}'_+}^\dagger U_{\mathbf{k}'_-} \right]_{uu} \xi(\Omega, \mathbf{P}, \epsilon, \mathbf{k}, \epsilon', \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (68)$$

Введём отдельное обозначение для возникшего интеграла, поскольку именно эта величина впоследствии окажется собственной энергией и определит дополнительные слагаемые в диффузионном знаменателе:

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega, \mathbf{P}) &= \int_{\epsilon, \mathbf{k}, \epsilon', \mathbf{k}'} \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}'_+}^R(\epsilon'_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}'_-}^A(\epsilon'_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_-}^A(\epsilon_-) \\ & \sqrt{d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{k}_-}} \left[U_{\mathbf{k}'_+}^\dagger U_{\mathbf{k}'_-} \right]_{uu} \xi(\Omega, \mathbf{P}, \epsilon, \mathbf{k}, \epsilon', \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (69)$$

Лестничный ряд с вставками собственной энергии,

$$D_{uu} = D_{uu}^{(0)} + D_{uu}^{(0)} \xi D_{uu}^{(0)} + D_{uu}^{(0)} \xi D_{uu}^{(0)} \xi D_{uu}^{(0)} + \dots, \quad (70)$$

даст более полную формулу для диффузона:

$$D_{uu}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \epsilon, \mathbf{p}) = D_{uu}^{(0)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \epsilon, \mathbf{p}) \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2\gamma \Sigma(\Omega, \mathbf{P})}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})} \right]^n = \quad (71)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}^A(\epsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}^A(\omega_-) \\ & \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \frac{2\gamma}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})} \frac{1}{1 - \frac{2\gamma \Sigma(\Omega, \mathbf{P})}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})}} = \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}^R(\epsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}^A(\epsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}^A(\omega_-) \\ & \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \frac{2\gamma}{1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P}) - 2\gamma \Sigma(\Omega, \mathbf{P})}. \end{aligned} \quad (73)$$

Сравнение полученного выражения (73) с (47) показывает, что вставка диаграммы $\xi(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \epsilon, \mathbf{p})$ приводит к появлению дополнительного слагаемого в диффузионном знаменателе: $1 - 2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})$ заменяется

на $1-2\gamma f(\Omega, \mathbf{P})-2\gamma\Sigma(\Omega, \mathbf{P})$. Значит, для ответа на интересующие нас вопросы требуется вычислить собственную энергию $\Sigma(\Omega, \mathbf{P})$ согласно (69) и исследовать её поведение при малых Ω и \mathbf{P} . Если величина $\Sigma(\Omega=0, \mathbf{P}=0)$ окажется ненулевой, то добавка $\pm 1/\tau$ к $DP^2-i\Omega$ в зависимости от знака либо укажет на неустойчивость dark state, либо приведёт к дефазировке диффузона и дополнительному затуханию возбуждений. Если же $\Sigma(\Omega=0, \mathbf{P}=0)=0$, то разложение $\Sigma(\Omega, \mathbf{P}) \propto \delta DP^2$ даст поправку δD к коэффициенту диффузии.

3.3.1. Собственная энергия в главном порядке по коэффициенту диссипации

В главном порядке по коэффициенту диссипации γ , то есть с двумя пунктирными линиями, можно составить всего две диаграммы. Обозначим их $\xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$ и $\xi_2^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$, первая с дугой сверху, вторая с дугой снизу.

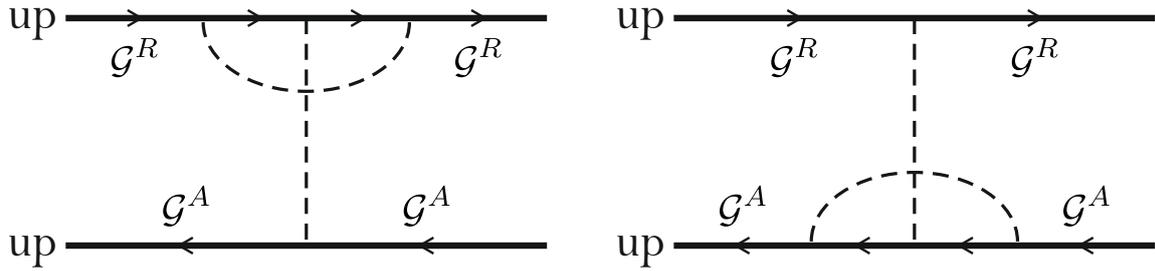


Рис. 6: Диаграммы для вычисления собственной энергии ψ -диффузона в главном порядке по константе диссипации γ . Слева $\xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$, справа $\xi_2^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$.

Начнём с вычисления $\xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$. Снова используем формулу (37) – разложение статсуммы (29) до второго порядка по γ . Спаривая фермионные поля согласно конфигурации слева на Рис. 6, получим че-

тыре возможных слагаемых:

$$\begin{aligned}
& \xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) \mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) [\Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} [\Lambda_u^A]^{\beta\beta'} = \\
& = \frac{\gamma^2}{4} \int_{E, \mathbf{Q}} P^{\mu\nu} P^{\mu'\nu'} \left[G_{up_-}^A(\varepsilon_-) \tau_{\mu'} G_{uq_-}^A(\omega_-) \right]^{\beta\beta'} \\
& \left\{ \left[G_{uq_+}^R(\omega_+) \tau_{\mu} G_{a(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}(E + \omega_+) \tau_{\nu'} G_{b(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}(E + \varepsilon_+) \tau_{\nu} G_{up_+}^R(\varepsilon_+) \right]^{\alpha\alpha'} \right. \\
& \quad \sum_{i,j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}_+(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}^{(i)} \right]_{ua} \left[\mathcal{L}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)\mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{bu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_-\mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}^{(j)} \right]_{ab} + \\
& + \left[G_{uq_+}^R(\omega_+) \tau_{\nu} G_{a(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}(E + \omega_+) \tau_{\nu'} G_{b(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}(E + \varepsilon_+) \tau_{\mu} G_{u\alpha'\mathbf{p}_+}(\varepsilon_+) \right]^{\alpha\alpha'} \\
& \quad \left. \sum_{i,j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)\mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{bu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}^{(i)} \right]_{ua} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_-\mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}^{(j)} \right]_{ab} \right\} + \\
& + \frac{\gamma^2}{4} \int_{E, \mathbf{Q}} P^{\mu\nu} P^{\mu'\nu'} \left[G_{up_-}^A(\varepsilon_-) \tau_{\nu'} G_{uq_-}^A(\omega_-) \right]^{\beta\beta'}
\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[G_{uq_+}^R(\omega_+) \tau_{\mu} G_{a(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}(E + \omega_+) \tau_{\mu'} G_{b(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}(E + \varepsilon_+) \tau_{\nu} G_{up_+}^R(\varepsilon_+) \right]^{\alpha\alpha'} \right. \\
& \quad \sum_{i,j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}_+(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}^{(i)} \right]_{ua} \left[\mathcal{L}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)\mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{bu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}^{(j)} \right]_{ab} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_-\mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} + \\
& + \left[G_{uq_+}^R(\omega_+) \tau_{\nu} G_{a(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}(E + \omega_+) \tau_{\mu'} G_{b(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}(E + \varepsilon_+) \tau_{\mu} G_{u\alpha'\mathbf{p}_+}(\varepsilon_+) \right]^{\alpha\alpha'} \\
& \quad \left. \sum_{i,j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)\mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{bu} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}_+(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}^{(i)} \right]_{ua} \left[\bar{\mathcal{L}}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}^{(j)} \right]_{ab} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{p}_-\mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{uu} \right\}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Согласно обозначениям для присоединения собственной энергии к диффузонами в предыдущей части раздела, из $\xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$ по определению исключается часть выражения $\mathcal{G}_{uq_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{up_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{up_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{uq_-}^A(\omega_-) [\Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} [\Lambda_u^A]^{\beta\beta'}$, отвечающая за концы диаграммы. Впоследствии мы увидим, как она сокращается.

Неизвестные индексы a и b в (74)-(75) могут принимать значения u или d независимо в разных слагаемых. Выводы о допустимых значениях можно сделать исходя из определений (11)-(12) матриц \mathcal{L} и $\bar{\mathcal{L}}$.

Например, во второй части выписанного выражения, (75), индекс a может быть равен только u : если $a=b=d$, то $\sum_{j=1}^4 \bar{\mathcal{L}}_{ab}^{(j)} \mathcal{L}_{uu}^{(j)}$ зану-

лится, а при $a=d$ и $b=u$ компонента $\bar{\mathcal{L}}_{ab}^{(j)}$ всегда нулевая. Однако отсюда следует, что всё выражение (75) равно нулю: из-за соотношения $\Lambda_u^R \tau_{0,1} \Lambda_u^A = 0$, следующего из определений (34), единственной доступной конфигурацией функций Грина на верхней линии диаграммы оказывается $[G_{uq_+}^R \tau_{\mu/\nu} G_{u(Q+q_+)}^R (E + \omega_+) \tau_{\mu' \dots}]^{\alpha\alpha'}$, которая занулится при суммировании по μ' и ν' , поскольку $\Lambda_u^R \tau_{\mu'} = \Lambda_u^R$ и $\tau_{\nu'} \Lambda_u^A = (-1)^{\nu'} \Lambda_u^A$, а $P^{00} - P^{01} + P^{10} - P^{11} = 0$ согласно (26).

Проведём аналогичные рассуждения для (74). Здесь индекс b может быть равен только u : если $a=b=d$, то $\sum_{j=1}^4 \bar{\mathcal{L}}_{uu}^{(j)} \mathcal{L}_{ab}^{(j)}$ занулится, а при $a=u$ и $b=d$ компонента $\bar{\mathcal{L}}_{ab}^{(j)}$ всегда нулевая. Отсюда следует, что $a=d$, поскольку если все четыре функции Грина на верхней линии диаграммы окажутся с индексом u , то в силу $\Lambda_u^R \tau_{0,1} \Lambda_u^A = 0$ они все будут запаздывающими, что приведёт к занулению интеграла по частоте E . Комбинация из двух опережающих функций Грина под дугой даст ноль по той же причине, то есть допустимыми являются только варианты $[\dots G_d^R \tau_{\mu'} G_u^A \dots]^{\alpha\alpha'}$ и $[\dots G_d^A \tau_{\mu'} G_u^R \dots]^{\alpha\alpha'}$. В конце концов, второе слагаемое из (74) тоже равно нулю, поскольку содержит множитель $\mathcal{L}_{ua}^{(i)} = \mathcal{L}_{ud}^{(i)} = \mathcal{L}_{ud}^{(i)}$.

С учётом всех вышеизложенных рассуждений, выражение для $\xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) [\Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} [\Lambda_u^A]^{\beta\beta'} = \\ & = \frac{\gamma^2}{4} \int_{E, \mathbf{Q}} P^{\mu\nu} P^{\mu'\nu'} [\Lambda_u^A \tau_{\mu'} \Lambda_u^A]^{\beta\beta'} \\ & \left\{ \mathcal{G}_{d(Q+q_+)}^R (E + \omega_+) \mathcal{G}_{u(Q+p_+)}^A (E + \varepsilon_+) [\Lambda_u^R \tau_{\mu'} \Lambda_d^R \tau_{\nu'} \Lambda_u^A \tau_{\nu'} \Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} + \right. \\ & \left. + \mathcal{G}_{d(Q+q_+)}^A (E + \omega_+) \mathcal{G}_{u(Q+p_+)}^R (E + \varepsilon_+) [\Lambda_u^R \tau_{\mu'} \Lambda_d^A \tau_{\nu'} \Lambda_u^R \tau_{\nu'} \Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} \right\} \\ & \sum_{i,j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{q_+(Q+q_+)}^{(i)} \right]_{ud} \left[\mathcal{L}_{(Q+p_+)p_+}^{(i)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{p_-q_-}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{(Q+q_+)(Q+p_+)}^{(j)} \right]_{du}. \end{aligned} \quad (76)$$

Теперь можно просуммировать выражение по повторяющимся индексам μ, ν, μ', ν' , а также взять сумму по i и j , используя (11). Получим

$$\begin{aligned} & \xi_1^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) = \\ & = \gamma^2 \int_{E, \mathbf{Q}} \sqrt{d_{q_+} d_{p_+} d_{p_-} d_{Q+p_+}} \left[U_{Q+p_+}^\dagger U_{Q+q_+} \right]_{ud} \left[U_{Q+q_+}^\dagger U_{q_-} \right]_{du} \\ & \left\{ \mathcal{G}_{u(Q+p_+)}^R (E + \varepsilon_+) \mathcal{G}_{d(Q+q_+)}^A (E + \omega_+) - \right. \\ & \left. - \mathcal{G}_{u(Q+p_+)}^A (E + \varepsilon_+) \mathcal{G}_{d(Q+q_+)}^R (E + \omega_+) \right\}. \end{aligned} \quad (77)$$

При вычислении этой диаграммы были подробно описаны все шаги по отбору ненулевых слагаемых из всех возможных конфигураций индексов у функций Грина и матриц $P^{\mu\nu}$, \mathcal{L} , $\bar{\mathcal{L}}$. Далее мы не будем приводить такие же объёмные рассуждения по каждой диаграмме, поскольку все они сводятся к использованию простых правил, заключённых в формулах (11), (12), (26), (34), (55):

- матричные элементы $\bar{\mathcal{L}}_{du}^{(i)}$ и $\mathcal{L}_{ud}^{(i)}$ равны нулю;
- суммы матричных элементов $\sum_{i=1}^4 \bar{\mathcal{L}}_{uu}^{(i)} \mathcal{L}_{dd}^{(i)}$ и $\sum_{i=1}^4 \bar{\mathcal{L}}_{dd}^{(i)} \mathcal{L}_{uu}^{(i)}$ равны нулю;
- комбинации матриц $\Lambda_u^R \tau_{0,1} \Lambda_u^A$ и $\Lambda_d^R \tau_{0,1} \Lambda_d^A$ равны нулю;
- исходя из свойств $\Lambda_u^R \tau_\mu = \Lambda_u^R$, $\tau_\nu \Lambda_u^A = (-1)^\nu \Lambda_u^A$, $\Lambda_d^R \tau_\mu = (-1)^\mu \Lambda_d^R$, $\tau_\nu \Lambda_d^A = \Lambda_d^A$ и $P^{00} - P^{01} + P^{10} - P^{11} = 0$ пунктирная линия при матрице $P^{\mu\nu}$ не может одновременно начинаться с $\Lambda_u^R \tau_\mu$ или $\tau_\mu \Lambda_d^A$ и заканчиваться $\tau_\nu \Lambda_u^A$ или $\Lambda_d^R \tau_\nu$;
- полюса функций Грина в интегралах по дополнительным частотам должны располагаться по обе стороны от контура интегрирования, иначе эти интегралы дадут ноль.

Используя эти правила, выпишем сразу формулу для $\xi_2^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$, диаграммы справа на Рис. 6:

$$\begin{aligned}
& \xi_2^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) [\Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} [\Lambda_u^A]^{\beta\beta'} = \\
& = \frac{\gamma^2}{4} \int_{E, \mathbf{Q}} P^{\mu\nu} P^{\mu'\nu'} [\Lambda_u^R \tau_\nu \Lambda_u^R]^{\alpha\alpha'} \\
& \left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^R(E + \varepsilon_-) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^A(E + \omega_-) [\Lambda_u^A \tau_{\mu'} \Lambda_u^R \tau_\mu \Lambda_d^A \tau_{\nu'} \Lambda_u^A]^{\beta\beta'} + \right. \\
& \left. + \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^A(E + \varepsilon_-) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^R(E + \omega_-) [\Lambda_u^A \tau_{\mu'} \Lambda_u^A \tau_\mu \Lambda_d^R \tau_{\nu'} \Lambda_u^A]^{\beta\beta'} \right\} \\
& \sum_{i,j=1}^4 \left[\bar{\mathcal{L}}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^{(i)} \right]_{ud} \left[\mathcal{L}_{\mathbf{q}+\mathbf{p}_+}^{(i)} \right]_{uu} \left[\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{p}_-(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^{(j)} \right]_{uu} \left[\mathcal{L}_{(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)\mathbf{q}_-}^{(j)} \right]_{du}.
\end{aligned} \tag{78}$$

Просуммируем выражение по повторяющимся индексам μ, ν, μ', ν' и

возьмём сумму по i, j при помощи (11):

$$\begin{aligned}
& \xi_2^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) = \\
& = \gamma^2 \int_{E, \mathbf{Q}} \sqrt{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-} \right]_{du} \\
& \quad \left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^A(E + \varepsilon_-) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^R(E + \omega_-) - \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^R(E + \varepsilon_-) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^A(E + \omega_-) \right\}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Теперь, когда все диаграммы посчитаны, можно сложить результаты (77), (79) и по формуле (69) выписать собственную энергию $\Sigma^{(1)}(\Omega, \mathbf{P})$.

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}) & = \gamma^2 \int_{\omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}} \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}^A(\omega_-) \\
& \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{q}_-} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \int_{E, \mathbf{Q}} \left(\sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+}} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} \right. \\
& \quad \left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}^R(E + \varepsilon_+) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}^A(E + \omega_+) - \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_+)}^A(E + \varepsilon_+) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_+)}^R(E + \omega_+) \right\} + \\
& \quad + \sqrt{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-} \right]_{du} \\
& \quad \left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^A(E + \varepsilon_-) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^R(E + \omega_-) - \right. \\
& \quad \left. - \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p}_-)}^R(E + \varepsilon_-) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q}_-)}^A(E + \omega_-) \right\} \left[U_{\mathbf{p}_+}^\dagger U_{\mathbf{p}_-} \right]_{uu}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Чтобы упростить интеграл, сдвинем переменные \mathbf{Q} и E на $-\mathbf{P}/2$ и $-\Omega/2$ соответственно в первом слагаемом собственной энергии и на $\mathbf{P}/2$ и $\Omega/2$ во втором:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}) & = \gamma^2 \int_{\omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}} \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}^A(\omega_-) \\
& \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{q}_-} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \int_{E, \mathbf{Q}} \left(\sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} - \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} \right]_{du} \right) \left[U_{\mathbf{p}_+}^\dagger U_{\mathbf{p}_-} \right]_{uu} \\
& \quad \left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p})}^R(E + \varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q})}^A(E + \omega) - \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p})}^A(E + \varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q})}^R(E + \omega) \right\}.
\end{aligned} \tag{81}$$

Покажем, что $\Sigma^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}=0)=0$.

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(\Omega, 0) &= \gamma^2 \int_{\omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}} d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{p}} \sqrt{d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}} \mathcal{G}_{u\mathbf{q}}^R(\omega_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}}^A(\varepsilon_-) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}}^A(\omega_-) \\ &\int_{E, \mathbf{Q}} \left(\left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{q}} \right]_{du} - \left[U_{\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} \right]_{du} \right) \\ &\left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p})}^R(E + \varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q})}^A(E + \omega) - \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p})}^A(E + \varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q})}^R(E + \omega) \right\}. \end{aligned} \quad (82)$$

Исходя из определений констант $d_{\mathbf{q}}$ (3) и функций Грина (17), первая и третья строчки в (82) не меняются при перестановке координат $q_x \leftrightarrow q_y, p_x \leftrightarrow p_y, Q_x \leftrightarrow Q_y$. Преобразуем круглую скобку во второй строчке, расписывая элементы матриц $U_{\mathbf{q}}$ через компоненты импульсов согласно определению (3):

$$\begin{aligned} &\left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{q}} \right]_{du} - \left[U_{\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} \right]_{du} = \\ &= \frac{2im^2}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \sqrt{d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}}} (Q_x(q_y - p_y) - Q_y(q_x - p_x)). \end{aligned} \quad (83)$$

Видно, что при той же перестановке $q_x \leftrightarrow q_y, p_x \leftrightarrow p_y, Q_x \leftrightarrow Q_y$ этот множитель поменяет знак. Таким образом, $\Sigma^{(1)}(\Omega, 0)$ меняет знак при переименовании координат интегрирования, то есть равна нулю. Это означает, что первый порядок собственной энергии не даёт ответа на вопрос об устойчивости dark state. Однако из него можно получить главную поправку $\delta D^{(1)}$ к коэффициенту диффузии. Чтобы это сделать, нужно разложить (81) до второго порядка по \mathbf{P} (первый порядок разложения по \mathbf{P} зануляется в силу симметрии относительно поворотов, а первый порядок по Ω равен нулю из-за $\Sigma^{(1)}(\Omega, 0)=0$). Таким образом,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(\Omega, \mathbf{P}) &= \Sigma^{(1)}(0, \mathbf{P}) + o(\Omega, P^2) = \frac{P_x^2}{2} \partial_{P_x}^2 \Sigma^{(1)}(0, 0) + \\ &+ \frac{P_y^2}{2} \partial_{P_y}^2 \Sigma^{(1)}(0, 0) + P_x P_y \partial_{P_x P_y} \Sigma^{(1)}(0, 0) + o(\Omega, P^2). \end{aligned} \quad (84)$$

Упростим выражение для $\Sigma^{(1)}(0, \mathbf{P})$, применив аналогичные симметричные соображения про замену $q_x \leftrightarrow q_y, p_x \leftrightarrow p_y, Q_x \leftrightarrow Q_y, P_x \leftrightarrow P_y$. В формуле (81) первая и последняя строчки не изменятся от этой перестановки координат. Отбросим **антисимметричную часть** множителя, записанного во второй и третьей строчках (81). Также можно сразу отбросить **часть выражения, порядок которой по P выше второго**, поскольку слагаемые

типа $o(\Omega, P^2)$ нам сейчас не нужны.

$$\begin{aligned} & \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{q}_-} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \left(\sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} - \right. \\ & \left. - \sqrt{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} \right]_{du} \right) \left[U_{\mathbf{p}_+}^\dagger U_{\mathbf{p}_-} \right]_{uu} = \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{m^2}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} \left(\left[d_{\mathbf{q}} + \frac{P^2}{4} \right] (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathbf{P} + 2\mathbf{q} \mathbf{P} \left\{ \mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \right\} \right) \\ & \quad \left(d_{\mathbf{p}} - \frac{P^2}{4} + \cancel{i(p_x P_y - p_y P_x)} \right) + \\ & + \frac{im^2}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} \left(2 \left[d_{\mathbf{q}} + \frac{P^2}{4} \right] (Q_x(q_y - p_y) - Q_y(q_x - p_x)) + \right. \\ & \left. + \mathbf{q} \mathbf{P} (\cancel{P_x(q_y - p_y) - P_y(q_x - p_x)}) \right) \left(\cancel{d_{\mathbf{p}} - \frac{P^2}{4}} + i(p_x P_y - p_y P_x) \right) = \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{m^2 d_{\mathbf{p}}}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} \left(d_{\mathbf{q}} (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathbf{P} + 2[\mathbf{q} \mathbf{P}] [\mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p})] \right) - \\ & - \frac{2m^2 d_{\mathbf{q}}}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} (Q_x(q_y - p_y) - Q_y(q_x - p_x)) (p_x P_y - p_y P_x). \end{aligned} \quad (87)$$

Таким образом, раскладывать надо выражение

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(0, \mathbf{P}) & = o(P^2) + \int_{\omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}, E, \mathbf{Q}} \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_+}^R(\omega) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_+}^R(\varepsilon) \mathcal{G}_{u\mathbf{p}_-}^A(\varepsilon) \mathcal{G}_{u\mathbf{q}_-}^A(\omega) \\ & \quad \frac{m^2 \gamma^2}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} \left\{ d_{\mathbf{p}} \left(d_{\mathbf{q}} (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \mathbf{P} + 2[\mathbf{q} \mathbf{P}] [\mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p})] \right) - \right. \\ & \quad \left. - 2d_{\mathbf{q}} (Q_x(q_y - p_y) - Q_y(q_x - p_x)) (p_x P_y - p_y P_x) \right\} \\ & \quad \left\{ \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p})}^R(E + \varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q})}^A(E + \omega) - \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{p})}^A(E + \varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{q})}^R(E + \omega) \right\}. \end{aligned} \quad (88)$$

Возьмём интегралы по частотам ω , ε и E :

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(0, \mathbf{P}) = & \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}} \frac{im^2\gamma^2}{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} \left\{ d_{\mathbf{p}} \left(d_{\mathbf{q}}(\mathbf{q} - \mathbf{p})\mathbf{P} + 2[\mathbf{q}\mathbf{P}][\mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p})] \right) - \right. \\
& \left. -2d_{\mathbf{q}}(Q_x(q_y - p_y) - Q_y(q_x - p_x))(p_x P_y - p_y P_x) \right\} \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{q}_+} - d_{\mathbf{q}_-} - i\gamma n(d_{\mathbf{q}_+} + d_{\mathbf{q}_-})} \frac{1}{d_{\mathbf{p}_-} - d_{\mathbf{p}_+} + i\gamma n(d_{\mathbf{p}_+} + d_{\mathbf{p}_-})} \\
& \left\{ \frac{1}{d_{\mathbf{p}_-} - d_{\mathbf{q}_+} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}_+} + d_{\mathbf{p}_-} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{d_{\mathbf{p}_+} - d_{\mathbf{q}_-} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} - i\gamma n(d_{\mathbf{p}_+} + d_{\mathbf{q}_-} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})} \right\} + o(P^2). \tag{89}
\end{aligned}$$

Поскольку нас интересует разложение (89) до второго порядка по \mathbf{P} , а множитель в первых двух строчках пропорционален первым степеням компонент \mathbf{P} , то оставшуюся часть выражения нужно разложить до первого порядка. Прделаем это отдельно:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{d_{\mathbf{q}_+} - d_{\mathbf{q}_-} - i\gamma n(d_{\mathbf{q}_+} + d_{\mathbf{q}_-})} \frac{1}{d_{\mathbf{p}_-} - d_{\mathbf{p}_+} + i\gamma n(d_{\mathbf{p}_+} + d_{\mathbf{p}_-})} \\
& \left\{ \frac{1}{d_{\mathbf{p}_-} - d_{\mathbf{q}_+} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}_+} + d_{\mathbf{p}_-} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{d_{\mathbf{p}_+} - d_{\mathbf{q}_-} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} - i\gamma n(d_{\mathbf{p}_+} + d_{\mathbf{q}_-} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})} \right\} = \\
& = o(P^2) + \frac{1}{2\mathbf{q}\mathbf{P} - 2i\gamma n d_{\mathbf{q}}} \frac{1}{-2\mathbf{p}\mathbf{P} + 2i\gamma n d_{\mathbf{p}}}
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{1}{d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - (\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{P} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + (\mathbf{q} - \mathbf{p})\mathbf{P} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} + (\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{P} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} - i\gamma n(d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} - (\mathbf{q} - \mathbf{p})\mathbf{P} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})} \right\} = \\
& \tag{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) + o(P^2) - \frac{1}{4\gamma^2 n^2 d_q d_p} \\
&\left\{ \frac{2i(d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q})(\mathbf{q}\mathbf{P}/d_q + \mathbf{p}\mathbf{P}/d_p)}{(d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q})^2 + \gamma^2 n^2 (d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})^2} \frac{1}{\gamma n} + \right. \\
&\quad \left. \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{P} + i\gamma n(\mathbf{q} - \mathbf{p})\mathbf{P}}{[d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q} - i\gamma n(d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})]^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})\mathbf{P} - i\gamma n(\mathbf{q} - \mathbf{p})\mathbf{P}}{[d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q} + i\gamma n(d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})]^2} \right\}. \tag{92}
\end{aligned}$$

При подстановке этого результата в (89) будем отбрасывать лишние слагаемые с множителями типа $k_x P_x k'_y P_y$, потому что они меняют знак при отражении координат $q_x \rightarrow -q_x$, $p_x \rightarrow -p_x$, $Q_x \rightarrow -Q_x$, не влияющем на другие части подынтегрального выражения. При этом конфигурации $(\mathbf{k}\mathbf{P})(\mathbf{k}'\mathbf{P})$ будут переходить в $\frac{P^2}{2}\mathbf{k}\mathbf{k}'$ в силу симметрии относительно перестановки координат $q_x \leftrightarrow q_y$, $p_x \leftrightarrow p_y$, $Q_x \leftrightarrow Q_y$.

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(1)}(0, \mathbf{P}) &= \frac{P^2}{2} \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}} \frac{m^2}{2n^2 d_q d_p d_{Q+q}} \left\{ d_p (d_q (\mathbf{q} - \mathbf{p}) + 2[\mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p})]\mathbf{q}) \right. \\
&\quad \left(\frac{(d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q})(\mathbf{q}/d_q + \mathbf{p}/d_p)}{(d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q})^2 + \gamma^2 n^2 (d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})^2} \frac{1}{\gamma n} + \right. \\
&\quad \left. + \text{Im} \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + i\gamma n(\mathbf{q} - \mathbf{p})}{[d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q} - i\gamma n(d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})]^2} \right) - \\
&\quad \left. - 2d_q (Q_x (q_y - p_y) - Q_y (q_x - p_x)) (p_x q_y - p_y q_x) \right. \\
&\quad \left(\frac{d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q}}{(d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q})^2 + \gamma^2 n^2 (d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})^2} \frac{1}{\gamma n d_q} + \right. \\
&\quad \left. + \text{Im} \frac{1 + i\gamma n}{[d_p - d_q - d_{Q+p} - d_{Q+q} - i\gamma n(d_q + d_p + d_{Q+p} + d_{Q+q})]^2} \right) \left. \right\} + o(P^2). \tag{93}
\end{aligned}$$

Вспоминая про множитель -2γ из (73) и коэффициент пропорциональности $\frac{1}{2\gamma n^2} \int_{\mathbf{k}} 1/d_{\mathbf{k}}$ из (50), получим поправку к коэффициенту диф-

фузии:

$$\begin{aligned}
\delta D^{(1)} = & \frac{\gamma^2 m^2}{\int_k 1/d_k} \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}} \frac{1}{d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{p}} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}} \left\{ d_{\mathbf{p}} (d_{\mathbf{q}} (\mathbf{q} - \mathbf{p}) + 2[\mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p})] \mathbf{q}) \right. \\
& \left(\frac{(d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}) (\mathbf{q}/d_{\mathbf{q}} + \mathbf{p}/d_{\mathbf{p}})}{(d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})^2 + \gamma^2 n^2 (d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})^2} \frac{1}{\gamma n} \right. \\
& \left. - \operatorname{Im} \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + i\gamma n (\mathbf{q} - \mathbf{p})}{[d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} - i\gamma n (d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})]^2} \right) - \\
& - 2d_{\mathbf{q}} (Q_x (q_y - p_y) - Q_y (q_x - p_x)) (p_x q_y - p_y q_x) \\
& \left(\frac{d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}}}{(d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})^2 + \gamma^2 n^2 (d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})^2} \frac{1}{\gamma n d_{\mathbf{q}}} \right. \\
& \left. - \operatorname{Im} \frac{1 + i\gamma n}{[d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} - d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}} - i\gamma n (d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}} + d_{\mathbf{Q}+\mathbf{q}})]^2} \right) \left. \right\}. \tag{94}
\end{aligned}$$

Упрощение и анализ полученного выражения для поправки $\delta D^{(1)}$ является предметом дальнейшей работы.

3.3.2. Первая поправка к собственной энергии

В следующем порядке по коэффициенту диссипации γ , то есть с тремя пунктирными линиями, можно составить двадцать различных диаграмм. Обозначим их $\xi_i^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p})$, $i = 1 \dots 20$.

Используя сформулированные в предыдущем разделе правила по расстановке индексов у функций Грина и матриц $P^{\mu\nu}$, \mathcal{L} , $\bar{\mathcal{L}}$ на диаграммах, можно увидеть, что $\xi_2^{(2)}$, $\xi_3^{(2)}$, $\xi_{18}^{(2)}$, $\xi_{19}^{(2)}$ и $\xi_{20}^{(2)}$ равны нулю. Из остальных диаграмм многие являются комплексно сопряжёнными друг

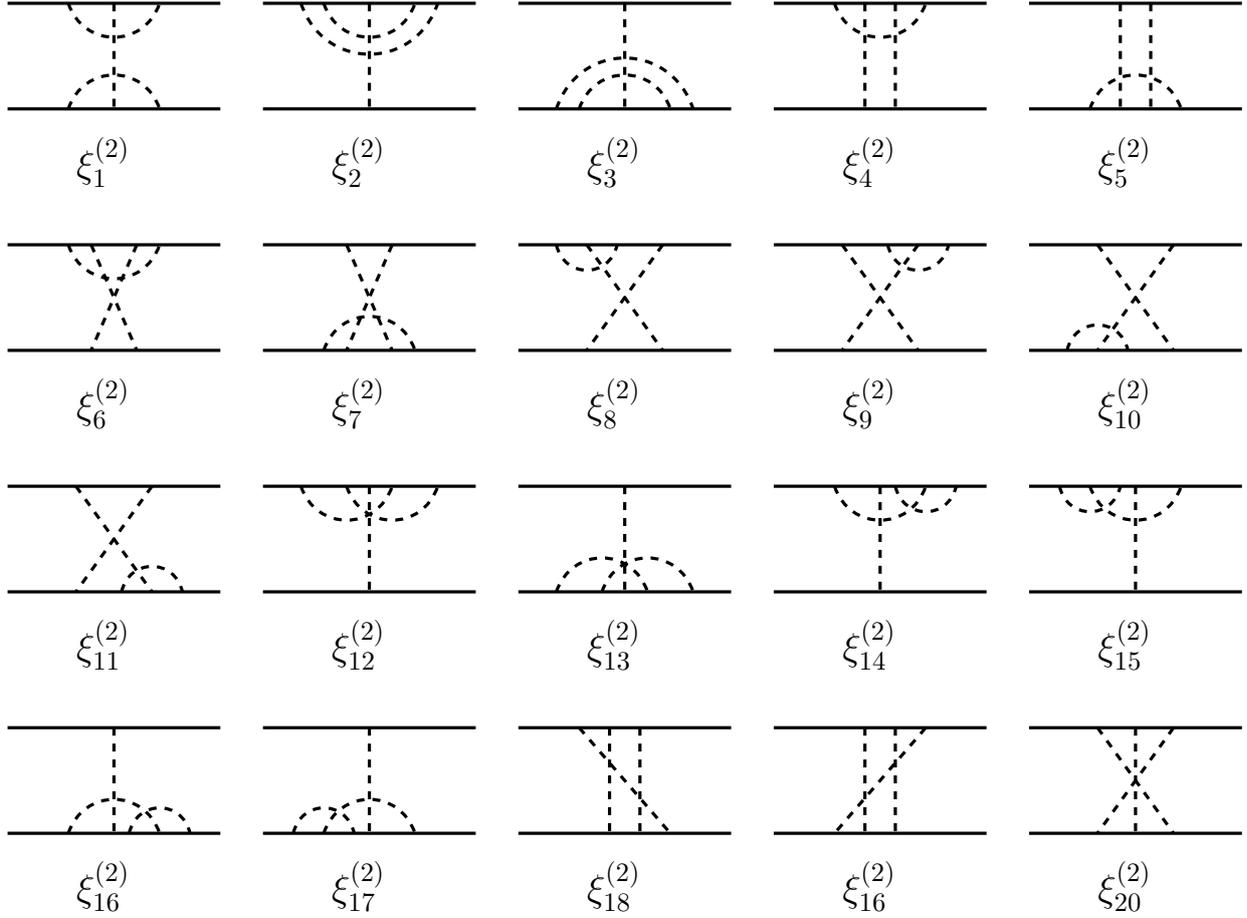


Рис. 7: Диаграммы для вычисления первой поправки по константе диссипации γ для собственной энергии ш-диффузона.

к другу, а именно

$$\begin{aligned}
\left[\xi_5^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_4^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}), \\
\left[\xi_7^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_6^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}), \\
\left[\xi_{10}^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_8^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}), \\
\left[\xi_{11}^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_9^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}), \\
\left[\xi_{13}^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_{12}^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}), \\
\left[\xi_{16}^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_{14}^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}), \\
\left[\xi_{17}^{(2)} \right]^* (\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \xi_{15}^{(2)}(-\Omega, -\mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}).
\end{aligned} \tag{95}$$

Таким образом, из двадцати диаграмм на Рис. 7 уникальных выра-

жений всего восемь. Все они расписаны в приложении к диплому. После взятия интегралов по частотам и сокращения одинаковых слагаемых получается собственная энергия из двух вкладов. Первый из них,

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{uudd}^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0) = \\
& = \frac{\gamma}{n^2} \operatorname{Re} \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \\
& \left(\sqrt{d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{k}}} \left[U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{dd} + \sqrt{d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{q}}^\dagger U_{\mathbf{k}} \right]_{uu} \right) \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} - d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}})} \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}})},
\end{aligned} \tag{96}$$

соответствует всем диаграммам с двумя u-линиями и двумя d-линиями. Это $\xi_1^{(2)}$ целиком и некоторые из расстановок индексов в $\xi_{12}^{(2)}$, $\xi_{13}^{(2)}$, $\xi_{14}^{(2)}$ и $\xi_{16}^{(2)}$. Второй вклад,

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{uuud}^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0) = \\
& = \frac{\gamma}{n^2} \operatorname{Re} \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{Q}} \sqrt{d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \\
& \left(\sqrt{d_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{k}} \right]_{uu} + \sqrt{d_{\mathbf{p}} d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{p}}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \right]_{uu} \right) \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} - d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}})} \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} - d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}})},
\end{aligned} \tag{97}$$

объединяет все диаграммы с тремя u-линиями и одной d-линией.

Раскрывая матричные элементы в формулах (96) и (97) согласно определениям (3), можно отбросить часть слагаемых по симметрии (по аналогии с рассуждениями о выражении (83)). Тогда эти выражения примут вид

$$\begin{aligned}
& \Sigma_{uudd}^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0) = \frac{2\gamma m^2}{n^2} \operatorname{Re} \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{Q}} \frac{d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}}{d_{\mathbf{q}} d_{\mathbf{k}}} Q^2 (m^2 + \mathbf{qk}) \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} - d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}})} \\
& \frac{1}{d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} + i\gamma n(d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}})}
\end{aligned} \tag{98}$$

и

$$\begin{aligned}
\Sigma_{uuud}^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0) &= \frac{\gamma m^2}{n^2} \operatorname{Re} \int_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{Q}} \frac{1}{d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \\
&\{ \mathbf{Q}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) (d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} (d_{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\mathbf{Q}) + d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} (d_{\mathbf{p}} + \mathbf{p}\mathbf{Q})) + d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} (p_1 Q_2 - p_2 Q_1)^2 \} \\
&\frac{1}{d_{\mathbf{k}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} - d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + i\gamma n (d_{\mathbf{k}} + d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}})} \\
&\frac{1}{d_{\mathbf{p}} - d_{\mathbf{q}} - d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} - d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} + i\gamma n (d_{\mathbf{p}} + d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} + d_{\mathbf{q}} + d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}})}
\end{aligned} \tag{99}$$

соответственно.

Анализ результатов (98) и (99) является предметом дальнейшей работы, однако в силу отсутствия явных признаков сокращений, можно утверждать, что они дадут ненулевую сумму $\Sigma^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0)$. Таким образом, этот порядок собственной энергии по γ даёт слагаемое $\pm 1/\tau$ в диффузионный знаменатель и несёт в себе ответ на вопрос об устойчивости dark state, поднятый в работе [10].

4. Результаты и обсуждение

Начнём анализ проделанной работы с её центральной темы: диффузионных мод в рассматриваемой двумерной фермионной системе с диссипацией. Вычисляя лестничную диаграмму на Рис. 3 для заселённости в верхней зоне, мы получили диффузон (47) с коэффициентом диффузии D , определяемым формулой (51), чем повторили результат статьи [10] на более строгом уровне. Отработанная на диаграмме с Рис. 3 схема была применена к частицам в нижней зоне, что привело к диффузону (60) и такому же коэффициенту диффузии D .

Также было показано, что межзонный диффузон отсутствует. Этот результат является следствием выбранной реализации диссипации и связан с определением прыжковых операторов (4), однако не зависит от выбора гамильтониана и конкретного определения фермионных операторов l_q и c_q . На самом деле для зануления ud - и du -диффузонов достаточно ввести такие прыжковые операторы, которые по своему действию будут соответствовать Рис. 1, а выбор конкретных базисов для ψ_q и l_q в определении (4) не играет роли.

Далее были проведены вычисления диаграмм для собственной энергии (69) ud -диффузона. Согласно формуле (73), полученной в результате пересуммирования лестничного ряда, эта собственная энергия входит в диффузионный знаменатель как дополнительное слагаемое $-2\gamma\Sigma(\Omega, \mathbf{P})$, вследствие чего может дать поправку к коэффициенту диффузии D и/или определить время затухания диффузона.

В главном порядке по коэффициенту диссипации γ собственная энергия $\Sigma^{(1)}(\Omega, \mathbf{P})$ определяется двумя диаграммами на Рис. 6. Анализ этих диаграмм показал, что $\Sigma^{(1)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0) = 0$, то есть в этом порядке времени затухания нет, зато была посчитана поправка $\delta D^{(1)}$ к коэффициенту диффузии. Полученная формула (94) требует дальнейшего анализа и упрощения.

Следующий порядок собственной энергии по γ состоит из двадцати различных диаграмм, изображённых на Рис. 7, которые однако содержат в себе разные сокращения и упрощения, приводящие к формуле для $\Sigma^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0)$, состоящей из двух вкладов: (98) и (99). Эти выражения также требуют дополнительного анализа, но можно с уверенностью сказать, что их сумма не будет тождественным нулём, и данный порядок собственной энергии пропорционален обратному времени затухания диффузона $\pm 1/\tau$. Знак выражения $-2\gamma\Sigma^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0)$ определит, является ли основное состояние гамильтониана устойчивым, как посчитали

авторы оригинальной статьи [9], или нет, что подтвердит предсказание, сделанное в работе [10].

Помимо изучения вопросов, связанных с диффузией в рассматриваемой системе, мы попытались определить, какой физический смысл может в себе нести введённая диссипация. Структура корреляторов бозонных полей бани (24) соответствует системе с бесконечной температурой и нарушенным детальным балансом. Определение физической системы, влияние которой на двухзонные фермионы может быть описано такими корреляционными функциями, представляет отдельную интересную задачу.

Работа поддержана проектом РНФ 22-22-00641.

5. Список литературы

- [1] Victor V. Albert, Barry Bradlyn, Martin Fraas, Liang Jiang, *Geometry and Response of Lindbladians*, [Phys. Rev. X 6, 041031 \(2016\)](#).
- [2] Alexander McDonald, Aashish A. Clerk, *Third quantization of open quantum systems: new dissipative symmetries and connections to phase-space and Keldysh field theory formulations*, [arXiv:2302.14047 \(2023\)](#).
- [3] Gabriele Perfetto, Federico Carollo, Juan P. Garrahan, Igor Lesanovsky, *Reaction-Limited Quantum Reaction-Diffusion Dynamics*, [Phys. Rev. Lett. 130, 210402 \(2023\)](#).
- [4] L. M. Sieberer, M. Buchhold, and S. Diehl, *Keldysh field theory for driven open quantum systems*, [Rep. Prog. Phys. 79, 096001 \(2016\)](#).
- [5] Alex Kamenev, Alex Levchenko, *Keldysh technique and non-linear sigma-model: basic principles and applications*, [Advances in Physics 58, 197 \(2009\)](#).
- [6] Qinghong Yang, Yi Zuo, Dong E. Liu, *Keldysh Nonlinear Sigma Model for a Free-Fermion Gas under Continuous Measurements*, [arXiv:2207.03376 \(2023\)](#).
- [7] Michele Fava, Lorenzo Piroli, Tobias Swann, Denis Bernard, Adam Nahum, *Nonlinear sigma models for monitored dynamics of free fermions*, [arXiv:2302.12820 \(2023\)](#).
- [8] Igor Poboiko, Paul Pöpperl, Igor V. Gornyi, Alexander D. Mirlin, *Theory of free fermions under random projective measurements*, [arXiv:2304.03138 \(2023\)](#).
- [9] F. Tonielli, J. C. Budich, A. Altland, and S. Diehl, *Topological Field Theory Far from Equilibrium*, [Phys. Rev. Letters 124, 240404 \(2020\)](#).
- [10] P. A. Nosov, D. S. Shapiro, M. Goldstein, and I. S. Burmistrov, *Reaction-diffusive dynamics of number-conserving dissipative quantum state preparation*, [Phys. Rev. B 107, 174312 \(2023\)](#).

- [11] Berislav Buča and Tomaž Prosen, *A note on symmetry reductions of the Lindblad equation: transport in constrained open spin chains*, *New Journal of Physics* 14, 073007 (2012).
- [12] Victor V. Albert and Liang Jiang, *Symmetries and conserved quantities in Lindblad master equations*, *Phys. Rev. A* 89, 022118 (2014).
- [13] M. Müller, S. Diehl, G. Pupillo, P. Zoller, *Engineered Open Systems and Quantum Simulations with Atoms and Ions*, *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* 61, 1-80 (2012).

6. Приложение

В этом разделе мы приведём полные выражения для диаграмм на Рис. 7. Как было сказано в основном тексте диплома, из двадцати представленных диаграмм всего восемь дают уникальные выражения: $\xi_1^{(2)}$, $\xi_4^{(2)}$, $\xi_6^{(2)}$, $\xi_8^{(2)}$, $\xi_9^{(2)}$, $\xi_{12}^{(2)}$, $\xi_{14}^{(2)}$ и $\xi_{15}^{(2)}$; а остальные либо равны нулю, либо представляют собой комплексно сопряжённое выражение к одной из перечисленных диаграмм.

$$\begin{aligned} \xi_1^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= -\gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{q}_-} d_{\mathbf{p}_-}} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \\ &\left(\sqrt{d_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} \right]_{dd} + \sqrt{d_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \right]_{uu} \right) \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} \right]_{du} \\ &\left[\mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{k})}^A(\varepsilon+\varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{k})}^R(\omega+\varepsilon) + \right. \\ &\left. + \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^A(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{k})}^R(\varepsilon+\varepsilon) \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{k})}^A(\omega+\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \xi_4^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= 2\gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{k}_-} d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \\ &\left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{k}_-} \right]_{uu} \\ &\mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^A(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{k}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{uk_-}^A(\varepsilon_-). \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \xi_6^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}} \\ &\left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+} \right]_{du} \mathcal{G}_{u(\mathbf{k}+\mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+)}^A(\varepsilon+\omega-\varepsilon_+) \\ &\left(\left[\sqrt{d_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} - \sqrt{d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \right]_{uu} \right] \right. \\ &\quad \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^A(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) - \\ &\quad \left. - \left[\sqrt{d_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} + \sqrt{d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \right]_{uu} \right] \right. \\ &\quad \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) - \\ &\quad \left. - \left[\sqrt{d_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} - \sqrt{d_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} d_{\mathbf{q}_-}} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \right]_{uu} \right] \right. \\ &\quad \left. \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \right). \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \xi_8^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= -2\gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{k}_+ \mathbf{Q}} d_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}_+}} \\ &\quad \left[U_{\mathbf{k}_+ \mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}_+} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \\ &\quad \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{k}_+ \mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{u(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}_+)}^A(\omega+\varepsilon-\varepsilon_+). \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \xi_9^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= 2\gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} d_{\mathbf{k}_+} \sqrt{d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}_+ \mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}_-}} \\ &\quad \left[U_{\mathbf{p}_+ \mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{k}_+ \mathbf{Q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{k}_+ \mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}_+} \right]_{uu} \\ &\quad \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\varepsilon_+) \mathcal{G}_{d(\mathbf{k}_+ \mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}_+ \mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}_+)}^A(\omega+\varepsilon-\varepsilon_+). \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \xi_{12}^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \\ &= \gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \mathcal{G}_{u\mathbf{Q}}^R(E) \sqrt{d_{\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k}}} \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} \\ &\quad \left\{ \sqrt{d_{\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k}} d_{\mathbf{Q}}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{k}_+} \right]_{ud} \mathcal{G}_{d\mathbf{k}_+}^A(\varepsilon_+) \right. \\ &\quad \left(\sqrt{d_{\mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}_+}} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p}} \right]_{dd} + \sqrt{d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p}}} \left[U_{\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{p}_+} \right]_{uu} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^A(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^R(E-\omega+\varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^R(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^A(E-\omega+\varepsilon) \right) + \\ &\quad + \sqrt{d_{\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k}} d_{\mathbf{Q}} d_{\mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}_+}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{k}_+} \right]_{uu} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p}} \right]_{ud} \\ &\quad \left(\mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^R(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^A(E-\omega+\varepsilon) \left[\mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\varepsilon_+) - 2\mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^A(\varepsilon_+) \right] + \right. \\ &\quad + \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^A(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^R(E-\omega+\varepsilon) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\varepsilon_+) - \\ &\quad \left. - \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^A(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^A(E-\omega+\varepsilon) \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\varepsilon_+) \right) + \\ &\quad + \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{Q}} d_{\mathbf{p}_+}} \left[U_{\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{Q}} \right]_{uu} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p}} \right]_{ud} \mathcal{G}_{u\mathbf{k}_+}^R(\varepsilon_+) \\ &\quad \left(\mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^A(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^R(E-\omega+\varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^R(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^A(E-\omega+\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k}-\mathbf{p})}^A(E+\varepsilon-\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}-\mathbf{q}+\mathbf{k})}^A(E-\omega+\varepsilon) \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned}
\xi_{14}^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= \gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \mathcal{G}_{u(\mathbf{k}_+)}^R(\varepsilon_+) d_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{k}_+} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-}} \\
&\left\{ 2 \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \right. \\
&\quad \mathcal{G}_{u(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k})}^A(E+\varepsilon) - \\
&\quad - 2 \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}} \right]_{uu} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} \\
&\quad \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{Q}+\mathbf{k})}^A(E+\varepsilon) + \\
&\quad + \left(\left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}} \right]_{dd} + \sqrt{\frac{d_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}} d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}}{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{k}_+}}} \left[U_{\mathbf{q}_+}^\dagger U_{\mathbf{k}_+} \right]_{uu} \right) \\
&\quad \left[U_{\mathbf{k}_+}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{du} \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k})}^A(E+\varepsilon) \\
&\quad \left(\mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^A(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) - \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^A(\varepsilon+E) + \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{G}_{d(\mathbf{q}+\mathbf{Q})}^R(\omega+E) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{Q})}^R(\varepsilon+E) \right) \left. \right\}. \tag{106}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{15}^{(2)}(\Omega, \mathbf{P}, \omega, \mathbf{q}, \varepsilon, \mathbf{p}) &= 2\gamma^3 \int_{E, \mathbf{Q}, \varepsilon, \mathbf{k}} \sqrt{d_{\mathbf{q}_+} d_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} d_{\mathbf{Q}_+} d_{\mathbf{p}_+} d_{\mathbf{p}_-} d_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}} \\
&\quad \left[U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{Q}_+} \right]_{du} \left[U_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{Q}+\mathbf{k}} \right]_{ud} \left[U_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^\dagger U_{\mathbf{q}_-} \right]_{uu} \\
&\quad \mathcal{G}_{u\mathbf{Q}_+}^R(E_+) \mathcal{G}_{d(\mathbf{Q}+\mathbf{k})}^A(E+\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{q}+\mathbf{k})}^R(\omega+\varepsilon) \mathcal{G}_{u(\mathbf{p}+\mathbf{k})}^R(\varepsilon+\varepsilon). \tag{107}
\end{aligned}$$

Проинтегрировав эти выражения по частотам E , ε и получив из них слагаемые собственной энергии по формуле (69), можно привести $\Sigma^{(2)}(\Omega = 0, \mathbf{P} = 0)$ к сумме двух вкладов: (96) и (97).