Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ДИОДНЫЙ ЭФФЕКТ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ СО СПИН-ОРБИТАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

(магистерская диссертация)

Студент:
Чукланов Данила Андреевич

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Фоминов Яков Викторович,
д-р физ.-мат. наук, доц.

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2025

Аннотация

В данной дипломной работе рассматривается поведение сверхпроводящего тока в двумерном сверхпроводнике в присутствии спин-орбитального взаимодействия Рашбы и магнитного поля, приложенного в плоскости образца. Рассматриваются приближения $H, T_C \ll \alpha p_0 \ll \mu$. Получено выражение для диодного коэффициента в пределе $T \to 0$ в геликоидальной фазе.

Содержание

1 Введение

1.1 Мотивация и актуальность

Диодный эффект в сверхпроводниках заключается в том, что критический ток сверхпроводника зависит от направления тока, подобно асимметрии в вольт-амперной характеристике полупроводникого диода, образованного p-n переходом. В отличии от диодного эффекта в полупроводниках, в сверхпроводниках диодный эффект может быть реализован и в джозефсоновских контактах, и ”in bulk”, в отсутствии какого бы то ни было контакта. Для возникновения диодного эффекта в сверхпроводнике необходимо нарушение инверсионной симметрии и симметрии относительно обращения времени (см. обзор [1] и ссылки в нем).

В 2020 году диодный эффект в сверхпроводнике наблюдался в слоистой структуре, в отсутствии контакта [2] — экспериментально был обнаружен эффект, который потенциально может иметь множество приложений в квантовой электронике (выпрямители, преобразователи тока и т.д.). Было предложено множество моделей, в которых данный эффект может проявляться (см. ссылки к [1]).

Одна из возможных альтернатив это модель эффективно двумерного сверхпроводника со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы (нарушение инверсионной симметрии) и продольным магнитным полем (нарушение симметрии относительно обращения времени). Данная модель теоретически исследовалась в работах [3], [4], [5], [6].

Несмотря на предсказания, экспериментальное обнаружение эффекта, полноценного объяснения ”из первых принципов”, с использованием микроскопических уравнений сверхпроводимости, до недавнего времени не было. Были противоречивые в своих результатах работы, использующие микроскопические уравнения в пределе Гинзбурга-Ландау [7], [8], совсем недавно появилась работа, использующая микроскопические уравнения, диаграммную технику в пределе $T \to T_C$ для согласованного учета малых параметров (спин-орбитальное взаимодействие и внешнее магнитное поле, параметр порядка) [9], исследовалась система в присутствии двух типов спин-орбитального взаимодействия (типов Рашбы и Изинга) [10].

Таким образом, представляет интерес теоретическое исследование микроскопических уравнений сверхпроводимости для сверхпроводника в присутствии спин-орбитального взаимодействия и магнитного поля не только при $T \to T_C$, но и других температурных режимах, например, $T \to 0$. Первые шаги исследования в данном направлении и проделаны в настоящей дипломной работе.

1.2 Особенности модели

Сверхпроводник со спин-орбитальным взаимодействием и внешним магнитным полем обнаруживает ряд особенностей на фазовой диаграмме в координатах температура-поле. Фазовая диаграмма системы была исследована в работах [5], [6].

Под линией фазового перехода имеют место несколько областей с качественно разными свойствами. На рис. 1 области, обозначенной как BCS, соответствует почти однородное, "слабогеликоидальное" состояние с параметром порядка $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta e^{i\mathbf{Qr}}$, где $Q \sim \frac{\alpha}{v_F^2} H$, как показано в работе [5].

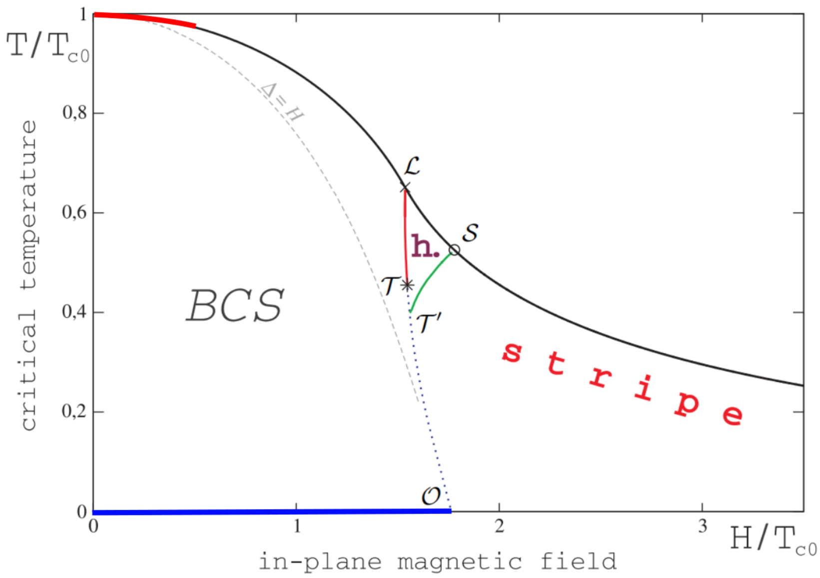

Рис. 1: Фазовая диаграмма, приведенная в работах [5], [6], синяя и красная линии исходно отсутствовали и были дорисованы. Синяя линия соответствует области, где работает результат, полученный настоящей дипломной работой. Красная линия демонстрирует область применимости выражения диодного коэффициента из работы [9].

Помимо "слабо-" есть и геликоидальное состояние [5], [6], где волновой вектор параметрически сильнее $Q \sim \frac{H}{v_F}$, соответствующее треугольной области, обозначенной "h." на рис. 1. Линия $\mathcal{LT}^*$ является границей, где осуществляется кроссовер между двумя геликоидальными режимами.

Правее областей с параметром порядка типа $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta e^{i\mathbf{Qr}}$ образуется область с "полосчатой структурой" (stripe structure), где параметр порядка имеет пространственную неоднородность вида $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta\cos(\mathbf{Qr})$. Как было показано при помощи формализма Гинзбурга-Ландау в работе [5], образование пары гармоник с волновыми векторами $\mathbf{Q}$ и $-\mathbf{Q}$ и равными амплитудами минимизирует свободную энергию при соответствующих значениях поля и температуры. В литературе это состояние часто называют FFLO или LOFF [5], [9].

1.3 Постановка задачи

Рассматривается 2D сверхпроводник со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и внешним магнитным полем, параллельным поверхности [4]. Приближения: $H, T_C \ll \alpha p_0 \ll \mu$. В координатном представлении гамильтониан системы имеет вид (см. например [5]):

$$\hat{H} = \int \psi^\dagger_\alpha(\mathbf{r})\hat{h}\psi^\dagger_\beta(\mathbf{r})d^2\mathbf{r} - \frac{U}{2}\int \psi^\dagger_\alpha\psi^\dagger_\beta\psi_\beta\psi_\alpha d^2\mathbf{r}, \tag{1.3.1}$$

где одночастичный гамильтониан:

$$\hat{h} = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m}\delta_{\alpha\beta} + \alpha\left[\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\times\hat{P}\right]\cdot\mathbf{n} - \mathbf{H}\cdot\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\right) \tag{1.3.2}$$

и α и β — спиновые индексы, $\hat{P} = -i\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{n}$— единичный вектор, перпендикулярный поверхности сверхпроводника. Пусть $\mathbf{H}$ направлен вдоль оси x. Одночастичный гамильтониан в импульсном представлении может быть записан как:

$$\hat{H}_0 + \hat{H}_{em} = \sum_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\alpha\mathbf{p}}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\delta_{\alpha\beta} + \alpha\left[\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\times\mathbf{p}\right]\cdot\mathbf{n} - \mathbf{H}\cdot\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\right)a_{\beta\mathbf{p}} + \\ + \sum_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\alpha\mathbf{p}}\left(-\frac{1}{c}\hat{\mathbf{j}}\mathbf{A}\right)a_{\beta\mathbf{p}}, \tag{1.3.3}$$

где $\hat{\mathbf{j}} = -e\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}}{m} - \alpha\left[\hat{\sigma}\times\mathbf{n}\right]\right) - \frac{e^2}{2mc}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ — это инфинитезимальный векторный потенциал, отклик на которой и будет нас интересовать, $\mathbf{H}$ — зеемановское поле, имеющее лишь z компоненту.

Гамильтониан $\hat{H}_0$ может быть диагонализован преобразованием следующего вида $a_{\alpha\mathbf{p}} = \eta_{\lambda\alpha}(\mathbf{p})\hat{a}_{\lambda\mathbf{p}}$, где η_λ — двухкомпонентный спинор (λ — киральный индекс):

$$\eta_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda\exp(i\varphi_{\mathbf{p}}(H))\end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm 1, \tag{1.3.4}$$

$$\varphi_p(H) = \arcsin\frac{\alpha p_y - H}{\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_y H + H^2}} = \arctan\frac{\alpha p_y - H}{\alpha p_x}. \tag{1.3.5}$$

Спектр рассматриваемого гамильтониана:

$$\epsilon_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu - \lambda\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_y H + H^2}. \tag{1.3.6}$$

Плотность состояний на поверхности Ферми:

$$\begin{aligned}\nu_\lambda(\epsilon_F) &= \int\frac{d\varphi}{2\pi}\int\frac{pdp}{2\pi}\delta\left(\mu - \frac{p^2}{2m} + \lambda\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha pH\sin\varphi + H^2}\right) = \\ &= \frac{m}{2\pi}\left(1 + \lambda\frac{\alpha}{\sqrt{v_F^2 + \alpha^2}}\right) + O\left(\frac{H}{\alpha p_0}\cdot\frac{H}{\mu}\right),\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

где $H/(\alpha p_0), H/\mu \ll \alpha/v_F$.

Импульсы Ферми:

$$p_{0\lambda} = p_0\left[\left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{v_F^2}} + \lambda\frac{\alpha}{v_F}\right) - \lambda\frac{H\sin\varphi}{mv_F\sqrt{v_F^2 + \alpha^2}} + O\left(\frac{H^2}{\mu^2}\right)\right]. \tag{1.3.8}$$

Двухчастичное слагаемое H_{int} в импульсном представлении принимает вид

$$H_{int} = -\frac{U}{2}\sum_{\mathbf{pp'q},\alpha\neq\beta} a^\dagger_{\alpha\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}a^\dagger_{\beta-\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}a_{\beta-\mathbf{p'}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}a_{\alpha\mathbf{p'}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}. \tag{1.3.9}$$

2 Междузонное спаривание

Гамильтониан взаимодействия в импульсном представлении имеет вид до суммирования по спиновым индексам:

$$H_{int} = -\frac{U}{2} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q},\alpha\beta} (\sigma_0 i\sigma_y)_{\alpha\beta}\, a^{\dagger}_{\alpha\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}} a^{\dagger}_{\beta-\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}} a_{\beta-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/\mathbf{2}} a_{\alpha\mathbf{p}'+\mathbf{q}/\mathbf{2}}. \tag{2.1}$$

Переход к киральному базису соответствует

$$\begin{pmatrix} a_{\uparrow\mathbf{p}} \\ a_{\downarrow\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} & -e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \begin{pmatrix} \hat{a}_{+,\mathbf{p}} \\ \hat{a}_{-,\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{\lambda}, \tag{2.2}$$

где

$$e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} = \frac{(\alpha p_y - H) - i\alpha p_x}{\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_y H + H^2}}. \tag{2.3}$$

И тогда парное взаимодействие будет описываться без всяких приближений оператором (аналогично (E15) из работы [9])

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\lambda\lambda'} \Big[\zeta_z \left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}} - e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right) + \\ + i\zeta_y \left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}} + e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right) \Big]_{\lambda\lambda'} a_{\lambda-\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}} a_{\lambda'\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$H_{int} = -\frac{U}{4} \sum_{\mathbf{q}} A^{\dagger}(\mathbf{q}) A(\mathbf{q}), \tag{2.5}$$

где $\zeta_{z,y}$ — матрицы Паули в киральном пространстве.

Получаем эффективный лагранжиан, учитывающий и внутризонное, и междузонное спаривание:

$$L[a,\bar{a},\Delta,\Delta^*] = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \bar{a}_{\lambda\mathbf{p}}[-\partial_\tau - \epsilon_\lambda(\mathbf{p})]a_{\lambda\mathbf{p}} +$$
$$+\sum_{\mathbf{q}} \Bigg(-\frac{|\Delta_{\mathbf{q}}|^2}{U} - \frac{i}{4}\sum_{\mathbf{p},\lambda\lambda'} \Delta_{\mathbf{q}} \Big[\zeta_z \left(e^{-i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}} - e^{-i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right)$$
$$-i\zeta_y^\dagger \left(e^{-i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}} + e^{-i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right)\Big]_{\lambda\lambda'} \bar{a}_{\lambda-\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}\bar{a}_{\lambda'\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}} +$$
$$+\Delta^*_{\mathbf{q}}\left[\zeta_z\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}} - e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right) + i\zeta_y\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}} + e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}}\right)\right]_{\lambda\lambda'} a_{\lambda-\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}a_{\lambda'\mathbf{p}+\mathbf{q}/\mathbf{2}}\Bigg). \tag{2.6}$$

Выберем биспинорный базис вида

$$\Psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_-(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/\mathbf{2}) \\ -\bar{a}_-(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/\mathbf{2}) \\ a_+(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/\mathbf{2}) \\ -\bar{a}_+(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/\mathbf{2}) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \bar{a}_-(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2) & a_-(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2) & \bar{a}_+(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2) & a_+(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Тогда получаем расширенный вариант матрицы $\hat{M}$:

$$\hat{M}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}[\Delta] = \begin{pmatrix} \hat{M}_{11} & \hat{M}_{12} \\ \hat{M}_{21} & \hat{M}_{22} \end{pmatrix} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \tag{2.9}$$

$$\hat{M}_{11} = \begin{pmatrix} (-i\omega + \epsilon_-(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)) & i\frac{\Delta}{2}\left(e^{-i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} - e^{-i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) \\ i\frac{\Delta^*}{2}\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} - e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) & (i\omega + \epsilon_-(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)) \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\hat{M}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\Delta}{2}\left(e^{-i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} + e^{-i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) \\ -i\frac{\Delta^*}{2}\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} + e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$\hat{M}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\Delta}{2}\left(e^{-i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} + e^{-i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) \\ i\frac{\Delta^*}{2}\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} + e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\hat{M}_{22} = \begin{pmatrix} (-i\omega + \epsilon_+(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)) & -i\frac{\Delta}{2}\left(e^{-i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} - e^{-i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) \\ -i\frac{\Delta^*}{2}\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} - e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right) & (i\omega + \epsilon_+(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

Заметим, что матричные элементы, описывающие междузонное спаривание, подавлены по сравнению с матричными элементами, описывающими внутризонное спаривание. В ведущем порядке внутризонные элементы по модулю порядка единицы, междузонные параметрически малы:

$$\frac{e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} - e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}}{2} = -ie^{i\varphi_{\mathbf{p}}} + f(e^{i\varphi_{\mathbf{p}}})\left(\frac{H}{\alpha p_F}\right)^2 + g(e^{i\varphi_{\mathbf{p}}})\left(\frac{H}{\alpha p_F}\frac{Q}{p_F}\right) + \dots, \tag{2.14}$$

$$\frac{\left(e^{i\varphi_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}} + e^{i\varphi_{-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2}}\right)}{2} = h(e^{i\varphi_{\mathbf{p}}})\frac{H}{\alpha p_F} + k(e^{i\varphi_{\mathbf{p}}})\frac{Q}{p_F} + \dots, \tag{2.15}$$

где f, g, h, k — некоторые рациональные функции.

Подавление данных элементов позволяет в ходе вычислений пренебречь вкладом междузонного спаривания и учитывать лишь внутризонное, исследуя ведущий порядок в диодном эффекте. Вклад параметрически малых слагаемых в матричных элементах, описывающих сверхпроводящее спаривание, дает параметрически еще более слабый вклад в свободную энергию и диодный коэффициент.

3 Внутризонное спаривание, нулевая температура

Рассмотрим предел $T \to 0$, суммирование по мацубаровским частотам переходит в интегрирование по правилу

$$T \sum_{\omega_n} \to \int \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{3.1}$$

Тогда формула (5.1.13) для свободной энергии принимает вид

$$\Omega = \frac{|\Delta|^2}{U} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm} \int d\omega \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{\left(\epsilon_\lambda(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2}) - i\omega\right)\left(\epsilon_\lambda(-\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2}) + i\omega\right) + |\Delta|^2}{\left(\epsilon_\lambda(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2}) - i\omega\right)\left(\epsilon_\lambda(-\mathbf{p} + \frac{\mathbf{Q}}{2}) + i\omega\right)} \right) \tag{3.2}$$

Сверхпроводящий ток можно определить как производную свободной энергии по $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{Q}}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm} \int d\omega \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \partial_{\mathbf{Q}} \ln \frac{\epsilon'_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{Q})^2 + (\omega + i\epsilon''_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{Q}))^2}{\epsilon'_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{Q})^2 + (\omega + i\epsilon''_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{Q}))^2 + |\Delta|^2}, \tag{3.4}$$

где $\epsilon'_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{Q}) = \frac{\epsilon_\lambda(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{Q}}{2}) + \epsilon_\lambda(-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{Q}}{2})}{2}$, $\epsilon''_\lambda(\mathbf{p},\mathbf{Q}) = \frac{\epsilon_\lambda(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{Q}}{2}) - \epsilon_\lambda(-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{Q}}{2})}{2}$.

Подобно работам [9], [5], интегрировать будем сначала по импульсам, далее по частотам. Нам необходимо раскладывать члены, включающие в себя спектр до порядков Q^4, $(\alpha/v_F)^2$. Q^4 необходимо для исследования диодного эффекта в рассматриваемой модели, $(\alpha/v_F)^2$ требуется по причине отстутствия линейных множителей в членах с высокими степенями Q (как позднее убедимся). После большого количества выкладок получаем

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{Q}} \frac{1}{\nu_0} \approx \frac{v_F^2}{4}\left(1 + \frac{\alpha^2}{v_F^2}\right)(Q - Q_{hel}) + \frac{3H\alpha}{16m^2 v_F^2}(Q - Q_{hel})^2 - \frac{\alpha^2}{32m^2 p_0^2}(Q - Q_{hel})^3,} \tag{3.5}$$

где Q_{hel} - импульс куперовской пары в равновесном состоянии:

$$\boxed{Q_{hel} = -\frac{2H\alpha}{v_F^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2v_F^2}\right).} \tag{3.6}$$

Полученное выражение Q_{hel} является уточнением выражения (84) из работы [5].

Из полученнного разложения по степеням $(Q - Q_{hel})$ получаем выражение для диодного коэффициента, составляющее центральный результат дипломной работы:

$$\text{‘}\boxed{\eta = \frac{|J|_+ - |J|_-}{|J|_+ + |J|_-} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{H}{mv_F^2} + \#\frac{H}{\mu}\frac{\alpha^2}{v_F^2} + \cdots .} \tag{3.7}$$

Таким образом, теперь мы понимаем, насколько эффект выраженный. Коль скоро мы заинтересуемся слагаемым с $\frac{H}{\mu}\frac{\alpha^2}{v_F^2}$, нам нужно будет использовать более подробного разложения Ферми-импульса, спектра и плотности состояний — поправка $(\alpha/v_F)^2$ к диодному коэффициенту получается из $(\alpha/v_F)^4$ множителя в Q^3 слагаемом.

4 Заключение

В настоящей работе было проведено исследование 2D сверхпроводника со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы в присутствии внешнего продольного магнитного поля в приближении $H, T_C \ll \alpha p_0 \ll \mu$. С целью исследовать диодный эффект мы рассмотрели свободную энергию как функцию Q, где Q является импульсом центра масс куперовской пары, образованный пространственной зависимостью параметра порядка сверхпроводника $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta e^{i\mathbf{Qr}}$.

Наличие нечетных членов в разложении свободной энергии по Q ведет к созданию равновесного состояния с импульсом $Q_{hel} \sim \frac{\alpha}{v_F^2} H$ (как уже получено в работе [5]), асимметрии в нелинейном отклике сверхтока на внешнее поле.

Основным результатом является формула (3.7), описывающая количественно ассиметрию в поведении сверхтока.

Результат был получен путем использования формулы для свободной энергии при помощи интегрирования по антикоммутирующим переменным. Полученный результат является новым для $T \to 0$, аналогичный результат для предела Гинзбурга-Ландау $T \to T_C$ был получен в работе [9].

Была уточнена формула (84) из [5], найдена поправка следующего порядка по α / v_F.

В качестве подготовки к работе был рассмотрен предел $T \to T_C$, проанализированы работы [5] и [8] (в приложении).

5 Приложения

5.1 Анализ работы О.В. Димитровой и М.В. Фейгельмана 2007

Двухчастичный гамильтониан в ведущем порядке по $q \ll p_0$ и в нулевом порядке по $H \ll \alpha p_0 \ll \mu$:

$$H_{int} = -\frac{U}{2} \sum_{\mathbf{pp'q},\alpha\neq\beta} a^{\dagger}_{\alpha\mathbf{p+q/2}} a^{\dagger}_{\beta-\mathbf{p+q/2}} a_{\beta-\mathbf{p'+q/2}} a_{\alpha\mathbf{p'+q/2}} = -\frac{U}{4} \sum_{\mathbf{q}} A^{\dagger}(\mathbf{q}) A(\mathbf{q}), \tag{5.1.1}$$

где $A(\mathbf{q}) = \sum_{\lambda,\mathbf{p}} i\lambda \exp\left(i\varphi_{\mathbf{p}}\right) a_{\lambda-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} a_{\lambda\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}}$.

Эффективный лагранжиан после преобразования Хаббарда – Стратоновича принимает вид:

$$L[a,\bar{a},\Delta,\Delta^*] = \sum_{\mathbf{p},\lambda} \bar{a}_{\lambda\mathbf{p}}[-\partial_\tau - \epsilon_\lambda(\mathbf{p})] a_{\lambda\mathbf{p}} +$$
$$+\sum_{\mathbf{q}} \left[-\frac{|\Delta_{\mathbf{q}}|^2}{U} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\lambda} \left(\Delta_{\mathbf{q}} \lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \bar{a}_{\lambda-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \bar{a}_{\lambda\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + \Delta^*_{\mathbf{q}} \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} a_{\lambda\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \right) \right]. \tag{5.1.2}$$

Выведем свободную энергии в случае, когда параметр порядка имеет вид $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta \exp(i\mathbf{Qr})$. Статсумма:

$$Z = \int DaD\bar{a}D\Delta D\Delta^* \exp\left\{-S[a,\bar{a},\Delta,\Delta^*]\right\}, \tag{5.1.3}$$

где

$$S[a,\bar{a},\Delta,\Delta^*] = S_0 + S_{int}, \tag{5.1.4}$$

$$S_0 = \int_0^{1/T} d\tau \sum_{\mathbf{p},\lambda} \bar{a}_{\lambda,\mathbf{p}} \left(\partial_\tau + \epsilon_\lambda(\mathbf{p})\right) a_{\lambda,\mathbf{p}}, \tag{5.1.5}$$

$$S_{int} = \int_0^{1/T} d\tau \Bigg(\frac{|\Delta|^2}{U} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{p},\lambda} \Delta_{\mathbf{q}} \lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \bar{a}_{\lambda \mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \bar{a}_{\lambda -\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} + \Delta^*_{\mathbf{q}} \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda -\mathbf{p}+\mathbf{q}/2} a_{\lambda \mathbf{p}+\mathbf{q}/2} \Bigg) =$$

$$= \int_0^{1/T} d\tau \left(\frac{|\Delta|^2}{U} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\lambda} \Delta \lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \bar{a}_{\lambda \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} \bar{a}_{\lambda -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} + \Delta^* \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} a_{\lambda -\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} a_{\lambda \mathbf{p}+\mathbf{Q}/2} \right), \tag{5.1.6}$$

где $\Delta_{\mathbf{q}} = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q})\Delta$.

$$Z = \int D\Delta D\Delta^* \det \hat{M}[\Delta] \exp\left\{ -\int d\tau \frac{|\Delta|^2}{U} \right\} = e^{-S_0} \int D\Delta D\Delta^* \exp\left\{ -S[\Delta, \Delta^*] \right\}, \tag{5.1.7}$$

где

$$S_0 = -\mathrm{Tr} \ln \hat{M}[\Delta = 0] = -\frac{1}{2} \ln \det \hat{M}_0, \tag{5.1.8}$$

$$S[\Delta, \Delta^*] = \int d\tau \frac{|\Delta|^2}{U} - \frac{1}{2} \ln \det \hat{M}_0^{-1} \hat{M}, \tag{5.1.9}$$

Выберем базис

$$\Psi_\lambda(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) \\ -\bar{a}_\lambda(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Psi}_\lambda(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \bar{a}_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) & a_\lambda(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2) \end{pmatrix}. \tag{5.1.10}$$

Тогда

$$\boxed{\hat{M}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}[\Delta] = \begin{pmatrix} (-i\omega + \epsilon_\lambda(\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2)) & \Delta \lambda e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} \\ -\Delta^* \lambda e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} & (i\omega + \epsilon_\lambda(-\mathbf{p} + \mathbf{Q}/2)) \end{pmatrix} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}.} \tag{5.1.11}$$

И квадратичная форма воспроизводит исходное действие:

$$S[a, \bar{a}, \Delta, \Delta^*] = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_\lambda(\mathbf{p}) \hat{M}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \Psi_\lambda(\mathbf{p}'). \tag{5.1.12}$$

Имеем выражение для свободной энергии

$$\Omega = TS[\Delta,\Delta^*] = \frac{|\Delta|^2}{U} - \frac{T}{2}\sum_{\omega,\lambda,\mathbf{p}} \ln\frac{(\epsilon_\lambda(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)-i\omega)\,(\epsilon_\lambda(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)+i\omega)+|\Delta|^2}{(\epsilon_\lambda(\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)-i\omega)\,(\epsilon_\lambda(-\mathbf{p}+\mathbf{Q}/2)+i\omega)}. \tag{5.1.13}$$

Переходя к интегрированию по $\xi_\lambda(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \lambda\alpha p - \mu$, учтем:

$$\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \approx \nu_\lambda(\epsilon_F)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_\lambda \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}, \tag{5.1.14}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_\lambda(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{Q}}{2}) &\approx \epsilon_\lambda(\mathbf{p}) + \nabla_\mathbf{p}\epsilon_\lambda(\mathbf{p})\Big|_{|\mathbf{p}|=p_{0\lambda}}\cdot\frac{\mathbf{Q}}{2}\\ &\approx \xi_\lambda(\mathbf{p}) + \lambda H\sin\varphi + Q\left(\frac{p_{0\lambda}}{2m}\sin\varphi - \frac{\lambda\alpha\sin\varphi}{2}\right) =\\ &\approx \xi_\lambda(\mathbf{p}) + \lambda H\sin\varphi + Q\frac{v_F}{2}\sin\varphi.\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Таким образом, получаем (воспроизводим результат работы [5])

$$\Omega = \frac{|\Delta|^2}{U} - \pi T\sum_{\lambda,\omega}\nu_\lambda(\epsilon_F)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\left(\sqrt{\tilde\omega^2+|\Delta|^2}-\tilde\omega\right), \tag{5.1.16}$$

где $\tilde\omega = \omega + iH_\lambda\sin\varphi$, $H_\lambda = \lambda H + v_F Q/2$, $\nu_\lambda(\epsilon_F)\approx\nu(\epsilon_F)(1+\lambda\alpha/v_F)$.

После аккуратного разложения по малым параметрам, несложно получить выражение из работы 2007 года

$$\Omega(Q) = \Omega(0) + \eta Q + \tilde a Q^2 + O(Q^3), \tag{5.1.17}$$

$$\eta = \alpha\nu(\epsilon_F)TH\frac{\pi}{2}\sum_\omega\frac{\Delta^2}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}} + O(H^3), \tag{5.1.18}$$

$$2\tilde a = \frac{v_F^2}{4}\pi\nu(\epsilon_F)T\sum_\omega\frac{\Delta^2}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}} + O(H^2), \tag{5.1.19}$$

$$\boxed{Q_{hel} = -\frac{\eta}{2\tilde a} = -2\frac{\alpha H}{v_F^2}.} \tag{5.1.20}$$

Подробно вывести результат было необходимо, так как отсутствовала ясность, почему же линейный по α/v_F вклад в свободную энергию сформирован лишь от плотности состояний, нет вклада от спектра (как указано в

[5], первый абзац раздела VII.A).

5.2 Анализ работы Noah F.Q. Yuan 2023

Воспроизведем выкладки из работы [8]. Гамильтониан системы отличается лишь знаком при зеемановском слагаемом ($H \to -H$). Рассмотрим разложение вида:

$$\begin{aligned}\epsilon_\lambda(\mathbf{p}) &= \frac{p^2}{2m} - \mu - \lambda\sqrt{(\alpha p)^2 - 2\alpha p_y H + H^2} = \\ &= \frac{p^2}{2m} - \mu - \lambda\left(\alpha|\mathbf{p}| - \frac{p_y}{|\mathbf{p}|}H\right) + O(H^2) = \\ &= \frac{p^2}{2m} - \mu - \lambda(\alpha|\mathbf{p}| - H\sin\varphi) + O(H^2).\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

При разложении не учтем сдвиг импульса Ферми, произведем разложение на "голом" импульсе Ферми (аналогично (5.1.15)):

$$\epsilon_\lambda(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{Q}}{2}) \approx \epsilon_\lambda(\mathbf{p})+\nabla_{\mathbf{p}}\epsilon_\lambda(\mathbf{p})\bigg|_{|\mathbf{p}|=p_F}\cdot\frac{\mathbf{Q}}{2} = \xi_\lambda(\mathbf{p})-\lambda H\sin\varphi+\frac{v_F Q}{2}\sin\varphi-\lambda\alpha\frac{Q}{2}\sin\varphi. \tag{5.2.2}$$

Таким образом, ошибка в разложении приводит к занулению первого слагаемого в разложении свободной энергии в первом порядке по полю (в отличии от выражения (5.1.18), полученного в ходе реконструкции вычислений работы [5]):

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\partial\Omega}{\partial Q}\bigg|_{Q=0} = \\ &= -\frac{1}{2}\nu(\epsilon_F)TH\sum_{\omega,\lambda}(1+\lambda\alpha/v_F)(v_F-\lambda\alpha)\lambda\frac{\Delta^2}{(\omega^2+\Delta^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2}\sin^2\varphi + O(H^3) = \\ &= O(H^3).\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

В то же время выражение (5.2) не было приведено в работе [8]. С целью убедиться, что именно такое разложение было использовано в работе [8], воспроизведем результат, формулы (19) и (20). Обозначим множители в разложении свободной энергии:

$$\Omega(Q) = \Omega(0) + \eta Q + aQ^2 + bQ^3 + cQ^4 + O(Q^5). \tag{5.2.4}$$

Тогда

$$a = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial Q^2}\bigg|_{Q=0} =$$

$$= \pi\nu(\epsilon_F)T\sum_{\lambda,\omega}(1+\lambda\alpha/v_F)(v_F-\alpha\lambda)^2\frac{\Delta^2}{8\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{3/2}}\int\frac{d\varphi}{2\pi}\sin^2\varphi + O(H^2) =$$

$$= \nu(\epsilon_F)v_F^2T\sum_{\omega}\frac{\Delta^2}{4\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{3/2}}\int\frac{d\varphi}{2}\sin^2\varphi + O\left(H^2,(\alpha/v_F)^2\right) =$$

$$= \underline{\frac{\pi}{8}\nu(\epsilon_F)v_F^2T\sum_{\omega}\frac{\Delta^2}{\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{3/2}} + O\left(H^2,(\alpha/v_F)^2\right),} \tag{5.2.5}$$

$$b = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\Omega}{\partial Q^3}\bigg|_{Q=0} =$$

$$= \pi\frac{\nu(\epsilon_F)H}{16}T\sum_{\lambda,\omega}(1+\lambda\alpha/v_F)(v_F-\alpha\lambda)^3\lambda\frac{\Delta^2\left(\Delta^2-4\omega^2\right)}{\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{7/2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\sin^4\varphi + O(H^2) =$$

$$= \frac{\nu(\epsilon_F)H}{16}2\cdot 2v_F^2\alpha T\sum_{\omega}\frac{\Delta^2\left(\Delta^2-4\omega^2\right)}{\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{7/2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2}\sin^4\varphi + O\left(H^2,(\alpha/v_F)^2\right) =$$

$$= \underline{\frac{3\pi}{32}\nu(\epsilon_F)v_F^2H\alpha T\sum_{\omega}\frac{\Delta^2\left(\Delta^2-4\omega^2\right)}{\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{7/2}} + O\left(H^2,(\alpha/v_F)^2\right),} \tag{5.2.6}$$

$$c = \frac{1}{4!}\frac{\partial^4\Omega}{\partial Q^4}\bigg|_{Q=0} =$$

$$= \frac{\pi\nu(\epsilon_F)}{128}T\sum_{\lambda,\omega}(1+\lambda\alpha/v_F)(v_F-\alpha\lambda)^4\frac{\Delta^2\left(\Delta^2-4\omega^2\right)}{\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{7/2}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\sin^4\varphi + O(H^2) =$$

$$= \underline{\frac{3\pi}{512}\nu(\epsilon_F)v_F^4T\sum_{\omega}\frac{\Delta^2\left(\Delta^2-4\omega^2\right)}{\left(\Delta^2+\omega^2\right)^{7/2}} + O\left(H^2,(\alpha/v_F)^2\right).} \tag{5.2.7}$$

Теперь рассмотрим предел Гинзбурга-Ландау $T \to T_C$:

$$a = \frac{\pi}{8}\nu(\epsilon_F) v_F^2 T_c \sum_\omega \frac{\Delta^2}{|\omega|^3} + O\left(H^2, (\alpha/v_F)^2, \Delta^4\right) = \\ = \frac{7\zeta(3)}{32\pi^2}\frac{\nu(\epsilon_F) v_F^2 \Delta^2}{T_c^2} + O\left(H^2, (\alpha/v_F)^2, \Delta^4\right), \tag{5.2.8}$$

$$b = \frac{3\pi}{32}\nu(\epsilon_F) v_F^2 H\alpha \cdot (-4) T_c \sum_\omega \frac{\Delta^2}{|\omega|^5} + O\left(H^2, (\alpha/v_F)^2, \Delta^4\right) = \\ = -\frac{93\zeta(5)}{128\pi^4}\frac{\nu(\epsilon_F) v_F^2 H\alpha\Delta^2}{T_c^4} + O\left(H^2, (\alpha/v_F)^2, \Delta^4\right), \tag{5.2.9}$$

$$c = \frac{3\pi}{512}\nu(\epsilon_F) v_F^4 \cdot (-4) T_c \sum_\omega \frac{\Delta^2}{|\omega|^5} + O\left(H^2, (\alpha/v_F)^2, \Delta^4\right) = \\ = -\frac{93\zeta(5)}{2048\pi^4}\frac{\nu(\epsilon_F) v_F^4 \Delta^2}{T_c^4} + O\left(H^2, (\alpha/v_F)^2, \Delta^4\right). \tag{5.2.10}$$

Полученные выражения полностью (с точностью до знака H, поскольку у автора слагаемое с полем входит в гамильтониан с другим знаком) соответствуют выражениям, приведенным в формулах (19) и (20) работы [8], что подтверждает наше предположение об использованном выражении при разложении свободной энергии.

Напоследок заметим, что верные значения коэффициентов в разложении ГЛ были найдены при помощи диаграммной техники в работе [9].

Список литературы

[1] Muhammad Nadeem, Fuhrer, and Xiaolin Michael S. Wang. The superconducting diode effect. Nature Reviews Physics, 5:558–577, Oct 2023.

[2] Fuyuki Ando, Yuta Miyasaka, Tian Li, Jun Ishizuka, Tomonori Arakawa, Yoichi Shiota, Takahiro Moriyama, Youichi Yanase, and Teruo Ono. Observation of superconducting diode effect. Nature, 584:373–376, 08 2020.

[3] V.M. Edelstein. Spin polarization of conduction electrons induced by electric current in two-dimensional asymmetric electron systems. Solid State Communications, 73(3):233–235, 1990.

[4] Lev P. Gor'kov and Emmanuel I. Rashba. Superconducting 2d system with lifted spin degeneracy: Mixed singlet-triplet state. Phys. Rev. Lett., 87:037004, Jul 2001.

[5] Ol'ga Dimitrova and M. V. Feigel'man. Theory of a two-dimensional superconductor with broken inversion symmetry. Phys. Rev. B, 76:014522, Jul 2007.

[6] Димитрова О.В. Сверхпроводимость и спиновый транспорт в двумерных электронных системах со спин-орбитальным взаимодействием. Диссертация, 2006.

[7] Noah F. Q. Yuan and Liang Fu. Supercurrent diode effect and finite-momentum superconductors. Proceedings of the National Academy of Sciences, 119(15):e2119548119, 2022.

[8] Noah F. Q. Yuan. Edelstein effect and supercurrent diode effect. arXiv preprint arXiv:2311.11087, 2023.

[9] Jaglul Hasan, Daniel Shaffer, Maxim Khodas, and Alex Levchenko. Supercurrent diode effect in helical superconductors. Physical Review B, 110(2), July 2024.

[10] Itai Bankier, Lotan Attias, Alex Levchenko, and Maxim Khodas. Superconducting diode effect in ising superconductors. 03 2025.