

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Выпускная квалификационная работа магистра

Сверхпроводниковый орбитальный диодный эффект в SN бислоях

Студент:

М02-406л группы

Дмитриевцев Юрий Алексеевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Фоминов Яков Викторович



Москва 2026

Содержание

Введение	4
1 Метод	5
1.1 Основные уравнения	5
1.2 Предел слабой d -неоднородности	10
2 Слабо неидеальная граница в тонких бислоях	13
2.1 Нулевой порядок	14
2.2 d -поправки	16
2.3 τ -поправки	19
2.4 Условия применимости	20
2.5 Сравнение вкладов	21
3 Сильно резистивная граница в тонких и умеренно толстых бислоях	22
3.1 d - и τ -поправки	22
3.1.1 Предел тонких слоёв	23
3.1.2 Предел умеренно толстых слоёв	25
3.2 Условия применимости	25
4 Предельные случаи эффективной теории Абрикосова–Горькова	26
4.1 Нулевая температура (предел слабо неидеальной границы)	26
4.2 Окрестность фазового перехода	29
5 Слабо неидеальная граница в умеренно толстых бислоях	35
5.1 Толстый и тонкий слой	36
5.2 Высокая и низкая проводимость	37
6 Подведение итогов	37
7 Заключение	40
А Кинетическая индуктивность	41
А.1 Вывод	41
А.2 Связь с экспериментом	43

В	Теория Абрикосова–Горькова (АГ)	43
В.1	Эффективное уравнение самосогласования	44
В.2	Критический паразарушающий параметр	44
В.3	Предел нулевой температуры	45
В.4	Окрестность фазового перехода	46

Введение

Асимметричные транспортные явления в сверхпроводящих системах известны уже давно [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. В последнее время эта область исследований, известная как сверхпроводниковый диодный эффект (СДЭ), привлекает внимание как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения (см. обзоры [17, 18, 19], в которых рассмотрены теоретические и экспериментальные результаты для различных физических систем, а также физические механизмы, лежащие в основе этих результатов). Ярким проявлением СДЭ является асимметрия сверхтока: критические сверхтоки различны для двух противоположных направлений вдоль данной структуры.

Существенным условием такой асимметрии является нарушение симметрии. Обычно для этого требуется выделенное направление тока в сочетании с нарушением симметрии инверсии и обращения времени.

Как недавно указали Левичев с соавторами [20], многообещающей платформой для наблюдения этого эффекта является бислой «сверхпроводник (S)/нормальный металл (N)» в параллельном магнитном поле. Благодаря эффекту близости в направлении, перпендикулярном плоскости бислоя, возникает градиент сверхтекучей плотности ∇n . Этот градиент в сочетании с приложенным магнитным полем $\mathbf{B}$ определяет выделенное направление $[\nabla n \times \mathbf{B}]$ для приложенного тока $\mathbf{I}$, как показано на рис. 1. Кроме того, магнитное поле нарушает симметрию обращения времени. Наличие этих условий делает СДЭ возможным в такой структуре. В рассматриваемых структурах, которые не являются атомарно тонкими, магнитное поле влияет в основном на орбитальное движение электронов, так что можно пренебречь энергией Зеемана. Таким образом, эффект имеет исключительно орбитальную природу (из-за нетривиального распределения мейснеровских токов). В дополнение к асимметрии критических (распаривающих) токов, СДЭ проявляется в асимметрии кинетической индуктивности относительно обращения направления тока: $L_k(I) \neq L_k(-I)$ [17, 20, 21].

Левичев с соавторами [20] исследовали СДЭ в диффузном SN-бислое как теоретически, так и экспериментально (для бислоев MoN/Cu). В теоретической части были выполнены численные расчёты для случая, когда толщины слоёв d имеют порядок нескольких длин когерентности ξ в грязном пределе ($l \ll \xi$, где l – длина свободного пробега), что позволяет применить уравнения Узаделя [22, 23]. Рассматривался случай прозрачной границы. Когда толщины слоёв имеют порядок ξ , это приводит к нетривиальному пространственному распределению сверхтекучей плотности (плот-

ности сверхпроводящих электронов) $n(x)$ поперёк бислоя, что в общем случае делает задачу аналитически неразрешимой.

Аналитические решения возможны только в случаях слабых внутрислойных неоднородностей (т. е. слабой неоднородности внутри каждого слоя). Для прозрачной границы такая слабая неоднородность достигается в тонком бислое (т. е. при $d \ll \xi$). В то же время слабая неоднородность может реализоваться и при низкой прозрачности границы. Это связано с тем, что увеличенное сопротивление границы ослабляет как прямой, так и обратный эффекты близости, делая слои менее чувствительными друг к другу. Следовательно, даже для относительно толстых бислоев достаточно низкая прозрачность границы может обеспечить слабую неоднородность, необходимую для аналитического рассмотрения.

Важно, что СДЭ требует не просто градиента сверхтекучей плотности ∇n , а скорее нетривиальной функциональной зависимости профиля $n(x)$ (не сводящейся к простому масштабированию) от тока I и магнитного поля B . Уменьшение прозрачности границы (увеличение её сопротивления) создаёт дополнительную неоднородность, так как приводит к разрыву функции Грина. Это, в свою очередь, изменяет профиль $n(x)$ и может усилить ∇n . Таким образом, эта дополнительная неоднородность может усилить СДЭ. С другой стороны, в пределе очень низкой прозрачности СДЭ должен исчезнуть, поскольку индуцированная эффектом близости сверхпроводимость в N-слое сильно подавляется, что приводит к эффективной изоляции S-слоя. Конкуренция между этими двумя тенденциями открывает возможность немонотонного поведения СДЭ как функции прозрачности границы.

В данной работе будет изучен орбитальный сверхпроводниковый диодный эффект в SN-бислоях с конечной прозрачностью границы между сверхпроводящим и нормальным слоями. Основная задача состоит в том, чтобы аналитически описать, как сопротивление границы и толщины слоёв влияют на диодную асимметрию критического тока и кинетической индуктивности в режимах, допускающих аналитическое решение.

На протяжении всей работы используются единицы с $\hbar = k_B = c = 1$.

1 Метод

1.1 Основные уравнения

Сверхпроводящий эффект близости в SN-бислоях изучается уже давно [24, 25, 26, 27, 28, 23, 29]. В диффузном (грязном) пределе система может быть описана с помощью уравнения Узаделя [22, 23, 30]. Наше рассмотрение следует подходу работы [29]

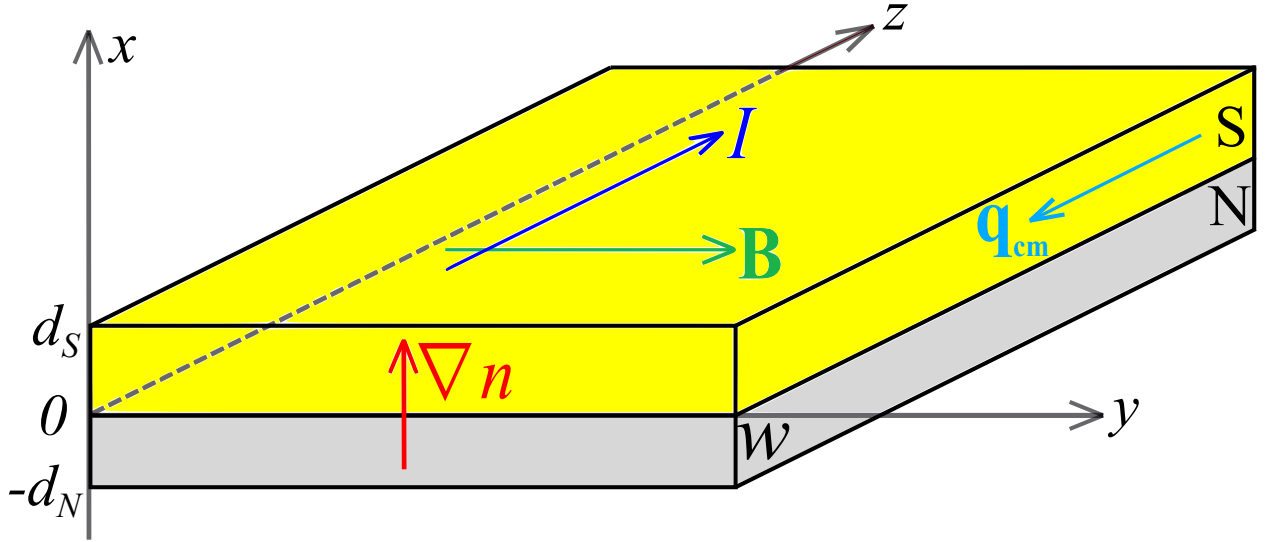


Рис. 1: SN-бислои в параллельном магнитном поле $\mathbf{B}$. Из-за эффекта близости возникает неоднородное распределение сверхтекучей плотности $n(x)$ по толщине бислоя. Магнитное поле нарушает симметрию обращения времени. Рассматриваются токи I , протекающие вдоль направления нарушения симметрии, задаваемого $[\nabla n \times \mathbf{B}]$ (ось z), и против него. СДЭ проявляется как асимметрия критических (распаривающих) токов в положительном и отрицательном направлениях, $I_{c+} \neq I_{c-}$ и асимметрия кинетической индуктивности, $L_k(I) \neq L_k(-I)$ [9]. Совместное влияние магнитного поля и тока приводит к неоднородному импульсу конденсата сверхпроводящих электронов $\mathbf{q}_s(x)$ вдоль оси z . Общий эффект может быть охарактеризован импульсом центра масс $\mathbf{q}_{cm}$.

и учитывает магнитное поле $\mathbf{B}$, параллельное плоскости бислоя, а также ток I вдоль бислоя.

Рассматриваемая система представляет собой полоску шириной w , состоящую из сверхпроводящего слоя $0 < x < d_S$ и слоя нормального металла $(-d_N < x < 0)$ с индуцированной эффектом близости сверхпроводимостью, как показано на рис. 1. Рассматривается грязный предел, в котором длина свободного пробега много меньше сверхпроводящих и геометрических масштабов. В то же время предполагается, что толщины слоёв много меньше лондоновских глубин проникновения

$$\lambda_{S(N)} = \sqrt{m/4\pi n_{S(N)} e^2}, \quad (1)$$

где $n_{S(N)}$ – сверхтекучая плотность в соответствующем слое. Это означает, что магнитное поле полностью проникает в бислой.

Будем использовать угловую параметризацию θ, φ [23, 31] функции Грина в урав-

нении Узаделя. Уравнения Узаделя тогда принимают вид

$$\frac{D}{2}\nabla^2\theta - \left(\omega_n + \frac{D}{2}\mathbf{q}_s^2 \cos\theta\right) \sin\theta + \Delta \cos\theta = 0, \quad (2)$$

$$\nabla(\mathbf{q}_s \sin^2\theta) = 0. \quad (3)$$

Здесь спектральный угол θ характеризует степень сверхпроводящих корреляций, D – коэффициент диффузии, $\omega_n = \pi T(2n+1)$ – мацубаровские частоты при температуре T , Δ – абсолютная величина параметра порядка [ниже для краткости называемая «параметр порядка»; она должна определяться из уравнения самосогласования, см. (9) ниже], $\mathbf{q}_s = \nabla\varphi + 2e\mathbf{A}$ – калибровочно-инвариантный импульс сверхпроводящих электронов, φ – фаза параметра порядка, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал магнитного поля (выбирается $e > 0$, так что заряд электрона $-e$). Орбитальный эффект магнитного поля, таким образом, входит в уравнения через $\mathbf{q}_s$. При этом зеемановским членом можно пренебречь; он стал бы существенным только в пределе чрезвычайно тонких (атомной толщины) слоёв, который в данной работе не рассматривается.

Предполагается, что система однородна вдоль плоскости бислоя, и все изменения спектрального угла происходят только в направлении, перпендикулярном слоям, т. е. $\theta = \theta(\omega_n, x)$. Импульс и параметр порядка имеют аналогичную зависимость, изменяясь только вдоль оси x : $\mathbf{q}_s = \mathbf{q}_s(x)$, $\Delta = \Delta(x)$.

В данной геометрии (3) выполняется автоматически, поскольку $\mathbf{q}_s(x)$ направлен вдоль оси z . Уравнения Узаделя тогда сводятся к (2) в каждом слое:

$$\frac{D_S}{2}\partial_x^2\theta_S - \left(\omega_n + \frac{D_S}{2}\mathbf{q}_s^2 \cos\theta_S\right) \sin\theta_S + \Delta \cos\theta_S = 0, \quad (4)$$

$$\frac{D_N}{2}\partial_x^2\theta_N - \left(\omega_n + \frac{D_N}{2}\mathbf{q}_s^2 \cos\theta_N\right) \sin\theta_N = 0. \quad (5)$$

Хотя $\Delta(x) = 0$ в N-слое, индуцированные эффектом близости сверхпроводящие корреляции описываются ненулевым θ_N .

На образец действует внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$, приложенное вдоль оси y . Учитывая, что толщина бислоя d много меньше лондоновской глубины проникновения (т. е. $d \ll \lambda$), магнитное поле постоянно внутри бислоя: $\mathbf{B} = \text{const}$. Из уравнения $\nabla \times \mathbf{q}_s = 2e\mathbf{B}$ получаем

$$q_s(x) = q_0 - 2eBx. \quad (6)$$

Здесь q_0 – импульс на границе, который определяется условием, что полный ток равен

I [см. (12) ниже].

Уравнения Узаделя (4) и (5) должны быть дополнены граничными условиями Куприянова–Лукичева [32]:

$$\sigma_S \partial_x \theta_S(0) = \sigma_N \partial_x \theta_N(0) = r_B^{-1} \sin(\theta_S(0) - \theta_N(0)), \quad (7)$$

$$\partial_x \theta_S(d_S) = 0, \quad \partial_x \theta_N(-d_N) = 0. \quad (8)$$

Здесь r_B – сопротивление границы на единицу площади, $\sigma_{S(N)}$ – нормальная проводимость соответствующего слоя.

Параметр порядка Δ , входящий в уравнение Узаделя, должен быть найден из уравнения самосогласования

$$\Delta(x) \ln \frac{T}{T_{cS}} = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left(\sin \theta_S(\omega_n, x) - \frac{\Delta(x)}{\omega_n} \right), \quad (9)$$

где T_{cS} – критическая температура изолированного S-слоя в отсутствие магнитного поля и тока. Уравнения (4)–(9) определяют функции $\theta_{S(N)}(\omega_n, x)$ и $\Delta(x)$ при заданном q_0 в (6).

Для получения полного решения необходимо определить q_0 из условия, что полный ток равен I . Чтобы записать выражение для тока, введём сверхтекучие плотности в двух слоях:

$$n_{S(N)}(x) = \frac{2\pi m \sigma_{S(N)} T}{e^2} \sum_{\omega_n > 0} \sin^2 \theta_{S(N)}(\omega_n, x). \quad (10)$$

Полный ток тогда можно записать как

$$I = -\frac{ew}{2m} \int_{-d_N}^{d_S} n(x) q_s(x) dx. \quad (11)$$

Таким образом, задача сводится к решению (4)–(11).

Полезно переписать (11) в терминах интегральных величин: полная толщина $d = d_S + d_N$, средняя сверхтекучая плотность $\bar{n} = \int n(x) dx / d$ и импульс центра масс $q_{\text{cm}} = q_s(x_{\text{cm}}) = q_0 - 2eBx_{\text{cm}}$, где координата центра масс $x_{\text{cm}} = \int x n(x) dx / \bar{n}d$. Тогда ток можно записать как

$$I = -\frac{ewd}{2m} \bar{n}(q_{\text{cm}}, B) q_{\text{cm}}. \quad (12)$$

Уравнение (12) определяет связь между полным током I и импульсом центра масс

q_{cm} ¹. Для нахождения критических токов удобно рассматривать q_{cm} и B как независимые переменные. Критические токи затем получаются максимизацией и минимизацией $I(q_{\text{cm}}, B)$ по q_{cm} при фиксированном магнитном поле: $I_{c+}(B) = \max_{q_{\text{cm}}} I(q_{\text{cm}}, B)$, $I_{c-}(B) = \min_{q_{\text{cm}}} I(q_{\text{cm}}, B)$.

СДЭ, проявляющийся как $I_{c+}(B) \neq I_{c-}(B)$, возникает потому, что средняя сверхтекучая плотность не является чётной функцией импульса:

$$\bar{n}(q_{\text{cm}}, B) \neq \bar{n}(-q_{\text{cm}}, B). \quad (13)$$

В то же время полная симметрия обращения времени подразумевает следующие соотношения: $\bar{n}(q_{\text{cm}}, B) = \bar{n}(-q_{\text{cm}}, -B)$, $I(q_{\text{cm}}, B) = -I(-q_{\text{cm}}, -B)$, и, следовательно, $I_{c+}(B) = I_{c-}(-B)$.

Для количественной оценки эффекта введём две характеристики интенсивности СДЭ. Первая – диодная эффективность:

$$\eta(B) = \frac{|I_{c+} - I_{c-}|}{I_{c+} + I_{c-}}, \quad (14)$$

а вторая – абсолютная диодная асимметрия:

$$\tilde{\eta}(B) = \frac{|I_{c+} - I_{c-}|}{2I_{c0}}, \quad (15)$$

где $I_{c0} \equiv I_{c+}(B=0) = I_{c-}(B=0)$ – критический ток в отсутствие магнитного поля. Как будет показано ниже, $I_{c\pm}$ приобретают линейные поправки при малых магнитных полях. Поэтому η и $\tilde{\eta}$ ведут себя сходным образом при малых магнитных полях, $\eta \approx \tilde{\eta} \propto B$.

Другой важной физической величиной, которую можно измерить экспериментально, является кинетическая индуктивность на единицу длины полоски [20]:

$$L_k(I, B) = -\frac{1}{2e} \left(\frac{dI}{dq_0} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Вывод и обсуждение этой формулы приведены в Приложении А. СДЭ проявляется как

¹Чтобы избежать путаницы, отметим, что в работе [20] величина $q_0^{[20]}$, выбранная в качестве независимой переменной, характеризующей распределение импульсов конденсата внутри SN-бислоя, является усреднённой по толщине импульсом: $q_0^{[20]} = \int q_s(x) dx / d$. При $B \neq 0$ и $I = 0$ распределение тока таково, что $q_0^{[20]} \neq 0$, поэтому это состояние было названо сверхпроводимостью с «конечным импульсом». Напротив, мы считаем более физически прозрачным использовать импульс центра масс q_{cm} в качестве независимой переменной. По определению, $q_{\text{cm}} = 0$ при $I = 0$. Однако это лишь техническое различие в описании; физически мы рассматриваем то же состояние, названное в [20] сверхпроводимостью с конечным импульсом.

несимметрично зависящая от тока кинетическая индуктивность, $L_k(I) \neq L_k(-I)$ [17, 20, 21].

1.2 Предел слабой d -неоднородности

Задача, сформулированная в разделе 1.1, допускает аналитическое решение только в случае слабой неоднородности решения в пределах каждого слоя. Решение будет разлагаться по этой малой неоднородности в соответствии с подходом работы [29]. В то же время решение во всём бислое может быть сильно неоднородным из-за произвольного скачка на границе.

При указанных выше условиях решение уравнений Узаделя (4) и (5) в каждом слое может быть аппроксимировано квадратичной функцией x . Из граничных условий (8) и (8) (второе уравнение) получаем решения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\theta_{S(N)}(x) &= \theta_{S(N)0} \pm \delta\theta_{S(N),d} \left[1 - \left(1 \mp \frac{x}{d_{S(N)}} \right)^2 \right], \\ n_{S(N)}(x) &= n_{S(N)0} \pm \delta n_{S(N),d} \left[1 - \left(1 \mp \frac{x}{d_{S(N)}} \right)^2 \right].\end{aligned}\tag{17}$$

Здесь $\theta_{S(N)0} = \theta(x = \pm 0)$ и $n_{S(N)0} = n(x = \pm 0)$ – спектральные углы θ и сверхтекущие плотности на границе в соответствующем слое, а $\delta\theta_{S(N),d}$ и $\delta n_{S(N),d}$ – величины, характеризующие поправки, связанные с неоднородностями из-за конечной толщины. Эти величины далее называются d -поправками и d -неоднородностями (отсюда индекс d).

В принципе, следует учитывать и неоднородность параметра порядка: $\Delta(x) = \Delta + \Delta_1(x)$. Однако ниже будет показано, что главного порядка $\Delta = \text{const}_x$ достаточно в слабо неоднородном режиме, тогда как пространственно зависимые поправки высших порядков $\Delta_1(x)$ дают лишь незначительные вклады.

Плотности $n_{S(N)0}$ и d -поправки $\delta n_{S(N),d}$ могут быть получены разложением (10) с использованием приближения $\theta_{S(N)} = \theta_{S(N)0} \pm \delta\theta_{S(N),d}$. Чтобы найти неизвестные коэффициенты $\delta\theta_{S(N),d}$, уравнения Узаделя интегрируются по толщине соответствующего слоя (от 0 до d_S и от $-d_N$ до 0). Вводя энергию Таулесса для каждого слоя,

$$E_{\text{Th},S(N)} = D_{S(N)}/d_{S(N)}^2,\tag{18}$$

получаем следующий результат:

$$\delta\theta_{S(N),d} = \frac{\sin\theta_j}{E_{\text{Th},S(N)}\tau_{S(N)}}, \quad (19)$$

где $\theta_j = \theta_{S0} - \theta_{N0}$ – скачок спектрального угла на границе.

Параметры $\theta_{S(N)0}$ должны быть найдены из следующих уравнений:

$$-\frac{1}{\tau_S} \frac{\sin\theta_j}{\sin\theta_{S0}\cos\theta_{S0}} = \frac{\omega_n}{\cos\theta_{S0}} + E_S - \frac{\Delta}{\sin\theta_{S0}}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\tau_N} \frac{\sin\theta_j}{\sin\theta_{N0}\cos\theta_{N0}} = \frac{\omega_n}{\cos\theta_{N0}} + E_N. \quad (21)$$

Введённые здесь параметры $E_{S(N)}$ (с размерностью энергии) зависят от магнитного поля и импульса q_{cm}

$$E_S = \frac{E_{\text{Th},S}d_S}{2} \int_0^{d_S} q_s^2(x)dx, \quad (22)$$

$$E_N = \frac{E_{\text{Th},N}d_N}{2} \int_{-d_N}^0 q_s^2(x)dx. \quad (23)$$

Также введены характерные «времена вылета»² :

$$\tau_{S(N)} = \frac{2r_B}{r_{S(N)}} E_{\text{Th},S(N)}^{-1}, \quad \tau^{-1} = \tau_S^{-1} + \tau_N^{-1}. \quad (24)$$

Здесь $r_{S(N)} = d_{S(N)}/\sigma_{S(N)}$ представляет собой поперечное сопротивление соответствующего слоя на единицу площади. Времена вылета $\tau_{S(N)}$ и τ содержат информацию о материалах слоёв и сопротивлении границы: $\tau_{S(N)}, \tau \propto r_B$. Ниже сопротивление границы будет характеризоваться в терминах времён вылета.

Таким образом, плотности на границе выражены $n_{S(N)0}$ и d -поправки $\delta n_{S(N),d}$ через параметры на границе $\theta_{S(N)0}$, которые определяются из (20) и (21). Поправки $\delta n_{S(N),d}$ необходимы, поскольку они ответственны за СДЭ.

Однако (20) и (21) не могут быть решены аналитически для произвольного сопротивления границы, т. е. произвольных $\tau_{S(N)}$. Поэтому будут рассмотрены предельные

²Параметры $\tau_{S(N)}$, определённые в (24), могут быть оценены как $\tau_{S(N)} \sim \mathcal{T}^{-1}d_{S(N)}/v_{S(N)}$, где $\mathcal{T}$ – прозрачность границы, а $v_{S(N)}$ – скорости Ферми в слоях. Заметим, что $\tau_{S(N)}$ не зависят от длин свободного пробега $l_{S(N)}$ в слоях и содержат баллистические времена $d_{S(N)}/v_{S(N)}$ прохождения через слои. Если поперечное сопротивление бислоя в основном определяется границей, $r_B \gg r_{S(N)}$ [эквивалентно $\mathcal{T} \ll l_{S(N)}/d_{S(N)}$], параметры $\tau_{S(N)}$ имеют смысл времён вылета из соответствующих слоёв [33]. В противоположном пределе идеальной границы ($\mathcal{T} \sim 1$) имеем $\tau_{S(N)} \sim d_{S(N)}/v_{S(N)}$, т. е. они имеют вид баллистических времён вылета (хотя мы рассматриваем диффузионную систему). Сделав эти замечания, мы будем называть $\tau_{S(N)}$ временами вылета.

случаи слабо ($\tau \rightarrow 0$, см. раздел 2) и сильно ($\tau \rightarrow \infty$, см. раздел 3) резистивной границы. В этих случаях параметры $\theta_{S(N)0}$ и плотности $n_{S(N)0}$ на границе могут быть разложены по дополнительному малому параметру, либо τ , либо τ^{-1} для случая слабого или сильного сопротивления соответственно:

$$\theta_{S(N)0} = \theta_{S(N)0}^{(0)} + \delta\theta_{S(N),\tau}, \quad n_{S(N)0} = n_{S(N)0}^{(0)} + \delta n_{S(N),\tau}. \quad (25)$$

Здесь $\theta_{S(N)0}^{(0)}$ и $n_{S(N)0}^{(0)}$ – спектральные углы и плотности на границе в пределе $\tau = 0$ или ∞ (в зависимости от рассматриваемого предельного случая), а $\delta\theta_{S(N),\tau}$ и $\delta n_{S(N),\tau}$ – поправки, связанные с конечным τ . Далее они называются τ -поправками.

Плотности $n_{S(N)0}^{(0)}$ и τ -поправки $\delta n_{S(N),\tau}$ могут быть получены разложением (10) с $\theta_{S(N)} = \theta_{S(N)0}$ из (25). Сверхтекучая плотность в нулевом порядке и поправки тогда принимают следующий вид:

$$n_{S(N)}^{(0)} = \frac{2\pi m \sigma_{S(N)} T}{e^2} \sum_{\omega_n > 0} \sin^2 \theta_{S(N)}^{(0)}, \quad (26)$$

$$\delta n_{S(N),\tau} = \frac{2\pi m \sigma_{S(N)} T}{e^2} \sum_{\omega_n > 0} \delta\theta_{S(N),\tau} \sin 2\theta_{S(N)}^{(0)}, \quad (27)$$

$$\delta n_{S(N),d} = \frac{2\pi m \sigma_{S(N)} T}{e^2} \sum_{\omega_n > 0} \delta\theta_{S(N),d} \sin 2\theta_{S(N)}^{(0)}. \quad (28)$$

Поправки к плотности из (27) и (28) необходимы для разложения тока в (12). Эти поправки вносят вклад в среднюю сверхтекучую плотность и координату центра масс:

$$\bar{n} = \bar{n}^{(0)} + \delta\bar{n}, \quad x_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}^{(0)} + \delta x_{\text{cm}}. \quad (29)$$

Здесь $\bar{n}^{(0)}$ и $x_{\text{cm}}^{(0)}$ соответствуют нулевому приближению (по τ и d -неоднородностям),

$$\bar{n}^{(0)} = \frac{n_S^{(0)} d_S + n_N^{(0)} d_N}{d}, \quad x_{\text{cm}}^{(0)} = \frac{n_S^{(0)} d_S^2 - n_N^{(0)} d_N^2}{2\bar{n}^{(0)} d}, \quad (30)$$

тогда как поправки первого порядка даются выражениями

$$\delta\bar{n} = \frac{1}{d} [(\delta n_{S,\tau} + 2\delta n_{S,d}/3)d_S + (\delta n_{N,\tau} - 2\delta n_{N,d}/3)d_N], \quad (31)$$

$$\delta x_{\text{cm}} = \frac{1}{2\bar{n}^{(0)} d} [(\delta n_{S,\tau} + 5\delta n_{S,d}/6)d_S^2 - (\delta n_{N,\tau} - 5\delta n_{N,d}/6)d_N^2] - x_{\text{cm}}^{(0)} \frac{\delta\bar{n}}{\bar{n}^{(0)}}. \quad (32)$$

В главном порядке плотность «знает» только об импульсе центра масс в нулевом

порядке: $\bar{n}^{(0)} = \bar{n}^{(0)}(q_{\text{cm}}^{(0)})$, где $q_{\text{cm}}^{(0)} = q_0 - 2eBx_{\text{cm}}^{(0)}$. Определяя отклонение импульса центра масс от нулевого порядка в соответствии с

$$q_{\text{cm}} = q_{\text{cm}}^{(0)} - \delta q_{\text{cm}}, \quad (33)$$

$$\delta q_{\text{cm}}(q_{\text{cm}}, B) = 2eB\delta x_{\text{cm}}(q_{\text{cm}}, B), \quad (34)$$

мы можем записать (29) в детальной форме:

$$\bar{n}(q_{\text{cm}}, B) = \bar{n}^{(0)}(q_{\text{cm}}^{(0)}, B) + \delta \bar{n}(q_{\text{cm}}, B). \quad (35)$$

Вместе с (12) это даёт разложение для тока:

$$\frac{I(q_{\text{cm}}, B)}{I_{\text{ch}}} = -\frac{1}{\bar{n}_0^{(0)}} \left[\bar{n}^{(0)}(q_{\text{cm}} + \delta q_{\text{cm}}(q_{\text{cm}}, B), B) + \delta \bar{n}(q_{\text{cm}}, B) \right] \frac{q_{\text{cm}}}{q_c}. \quad (36)$$

Здесь введены характерное значение сверхтекучей плотности $\bar{n}_0^{(0)}$, которое определяется как значение $\bar{n}^{(0)}(0, 0)$ при нулевой температуре, а также q_c – критический импульс центра масс в том смысле, что $\bar{n}^{(0)}(q_c, 0) = 0$. Явное выражение для q_c будет дано ниже [см. (46) и (71)]. Ток нормирован на характерное значение

$$I_{\text{ch}} = (ewd/2m)\bar{n}_0^{(0)}q_c. \quad (37)$$

СДЭ возникает, если выражение в квадратных скобках в (36) не является чётной функцией импульса [см. (13)]. Поэтому нас будет интересовать только чётная (относительно q_{cm}) часть функции $\delta q_{\text{cm}}(q_{\text{cm}}, B)$ и нечётная часть функции $\delta \bar{n}(q_{\text{cm}}, B)$. Асимметрия может возникать из любого из членов в квадратных скобках.

2 Слабо неидеальная граница в тонких бислоях

Теперь применим общее рассмотрение предыдущего раздела к случаю слабо неидеальной границы, $\theta_{S0} \approx \theta_{N0}$. Отклонения от решений нулевого порядка рассматриваются пертурбативно. Возникают два различных типа поправок: обусловленные конечной толщиной бислоя $d \neq 0$ (d -поправки) и обусловленные конечным сопротивлением границы, т. е. $\tau \neq 0$ (τ -поправки). Оба типа поправок схематически показаны на рис. 2.

2.1 Нулевой порядок

Нулевой порядок соответствует идеальной границе и однородности спектрального угла по всему бислою.

В случае полностью прозрачной границы ($r_B = 0$, следовательно $\tau = 0$), спектральные углы равны на границе: $\theta_{S0} = \theta_{N0} = \theta$, отсюда $\theta_j = 0$. В этом случае плотности в нулевом порядке $n_{S(N)}^{(0)}$ [см. (26)] различаются только из-за разницы проводимостей: $n_S^{(0)}/n_N^{(0)} = \sigma_S/\sigma_N$. Координата центра масс [см. (30)] тогда даётся выражением

$$x_{\text{cm}}^{(0)} = \frac{\sigma_S d_S^2 - \sigma_N d_N^2}{2(\sigma_S d_S + \sigma_N d_N)} = \text{const}_{q_{\text{cm}}, B}. \quad (38)$$

Уравнения (20) и (21), определяющие значения на границе $\theta_{S(N)0}$, тогда сводятся к одному уравнению для спектрального угла θ :

$$-\frac{\omega_n}{\cos \theta(\omega_n)} + \frac{E_g}{\sin \theta(\omega_n)} = \Gamma. \quad (39)$$

В этом пределе система ведёт себя как однородный сверхпроводник с эффективным параметром порядка E_g . Поэтому уравнение включает только некоторые средние значения E_g и Γ , которые характеризуют бислой в целом:

$$E_g = \langle \Delta \rangle, \quad \Gamma = \langle E \rangle = \frac{\langle D \rangle}{2} \left[q_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{3} (eB d_{\text{eff}})^2 \right]. \quad (40)$$

Здесь введены эффективная толщина d_{eff} и усреднение в угловых скобках $\langle \dots \rangle$, которые обсуждаются ниже.

Уравнение (39) имеет ту же форму, что и в теории Абрикосова–Горькова (АГ) [34] для сверхпроводника, содержащего парамагнитные примеси. В этой теории параметр Γ – это скорость магнитного рассеяния. По аналогии с этой теорией Γ называется параразрушающим параметром.

Скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по слоям с весом $\sigma d/D$:

$$\langle F \rangle = \frac{F_S \sigma_S d_S / D_S + F_N \sigma_N d_N / D_N}{\sigma_S d_S / D_S + \sigma_N d_N / D_N} = \frac{F_S \tau_S + F_N \tau_N}{\tau_S + \tau_N} \quad (41)$$

(последнее выражение подразумевает конечное τ , но имеет корректный предел при $\tau \rightarrow 0$). Это усреднение имеет смысл только тогда, когда неоднородности в каждом слое слабы, а значение F приблизительно постоянно в каждом слое³. Величина $E_g =$

³Используя соотношение $\sigma = 2e^2 v D$ между проводимостью и коэффициентом диффузии, мы можем

$\tau_S \Delta / (\tau_S + \tau_N)$, определяемая (40), при $\Gamma = 0$ даёт спектральную щель в плотности состояний в бислое [29, 34].

Эффективная толщина, введённая в (40), определяется в соответствии с

$$d_{\text{eff}}^2 = \frac{12}{\bar{n}(0)d} \int n(x) \left(x - x_{\text{cm}}^{(0)} \right)^2 dx = \frac{\sigma_S d_S^3 + \sigma_N d_N^3}{\sigma_S d_S + \sigma_N d_N} + \frac{3\sigma_S \sigma_N d_S d_N (d_S + d_N)^2}{(\sigma_S d_S + \sigma_N d_N)^2}. \quad (42)$$

Значение d_{eff} – это эффективная толщина бислоя с точки зрения критического магнитного поля в плоскости. Это критическое поле при нулевой температуре тогда выражается в стандартной форме БКШ:

$$B_{c0} = \sqrt{3} \Phi_0 / \pi \xi_0 d_{\text{eff}}, \quad (43)$$

с эффективной длиной когерентности ξ_0 , определяемой как

$$\xi_0 = \sqrt{\langle D \rangle / E_{g0}}. \quad (44)$$

Здесь $E_{g0} = E_g(T=0, \Gamma=0)$ – спектральная щель при нулевой температуре.

Удобно выразить паразарушающий параметр через критические значения, зависящие от температуры, Γ_c , q_c и B_c :

$$\Gamma = \Gamma_c(T) \left(\frac{q_{cm}^2}{q_c^2(T)} + \frac{B^2}{B_c^2(T)} \right). \quad (45)$$

Здесь $\Gamma_c(T)$ – критический паразарушающий параметр, соответствующий фазовому переходу в нормальное состояние. Критические значения импульса и магнитного поля могут быть выражены через паразарушающий параметр :

$$q_c(T) = \sqrt{\frac{2\Gamma_c(T)}{\langle D \rangle}}, \quad B_c(T) = \frac{\sqrt{3} \Phi_0 q_c(T)}{\pi d_{\text{eff}}}. \quad (46)$$

[Заметим, что $B_c(0) = B_{c0}$, см. (43).]

В случае слабо неидеальной границы сверхпроводимость существует при температурах $T < T_{c0}$, где T_{c0} , определяемое (122), является критической температурой бислоя в отсутствие как тока, так и магнитного поля.

Таким образом, в нулевом порядке система «чувствует» импульс q_{cm} и магнитное поле. Перепишем (41) в терминах полной (объёмно-интегрированной) плотности состояний $v_{S(N)} V_{S(N)}$ или в терминах расстояний между уровнями $\delta_{S(N)}$: $\langle F \rangle = \frac{F_S v_S V_S + F_N v_N V_N}{v_S V_S + v_N V_N} = \frac{F_S \delta_S^{-1} + F_N \delta_N^{-1}}{\delta_S^{-1} + \delta_N^{-1}}$.

поле $\mathbf{B}$ исключительно через паразарушающий параметр: $E_g(q_{\text{cm}}, \mathbf{B}) = E_g(\Gamma)$, $\tilde{n}^{(0)}(q_{\text{cm}}, \mathbf{B}) = \tilde{n}^{(0)}(\Gamma)$. В то же время Γ зависит от q_{cm} и $\mathbf{B}$ чётным образом: $\Gamma(q_{\text{cm}}, \mathbf{B}) = \Gamma(-q_{\text{cm}}, \mathbf{B}) = \Gamma(q_{\text{cm}}, -\mathbf{B})$. Это означает, что в нулевом порядке нарушения симметрии не происходит, и, следовательно, СДЭ отсутствует.

Альтернативно, отсутствие СДЭ в нулевом порядке может быть связано с поведением профиля сверхтекучей плотности $n(x)$. Хотя этот профиль непостоянен в пространстве, он имеет тривиальную ступенчатую форму, которая остаётся фиксированной соотношением $n_S^{(0)}/n_N^{(0)} = \sigma_S/\sigma_N$. Профиль $n(x)$, таким образом, не изменяется с I и $\mathbf{B}$, и это запрещает СДЭ.

Чтобы обсуждать СДЭ в высших порядках, введём безразмерный параметр асимметрии между слоями

$$\mu = \frac{\Delta - E_g}{\Delta} = \frac{\sigma_N d_N / D_N}{\sigma_N d_N / D_N + \sigma_S d_S / D_S} = \frac{\tau_N}{\tau_N + \tau_S}. \quad (47)$$

В терминах μ операция усреднения, определённая ранее, может быть переписана в более компактной форме:

$$\langle F \rangle = F_S(1 - \mu) + F_N \mu. \quad (48)$$

Отсутствие СДЭ в нулевом порядке связано с тем, что μ входит в описание только через средние такого вида, что даёт эффективную среду с усреднёнными параметрами. Как будет показано ниже, в высших порядках параметр асимметрии μ будет также входить в теорию сам по себе, приводя к СДЭ.

2.2 d -поправки

Введённые в (19) d -поправки в случае идеальной границы:

$$\delta\theta_{S,d} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{E_{\text{Th},S}} \left(-\frac{\omega_n}{\cos\theta} - E_S + \frac{\Delta}{\sin\theta} \right), \quad (49)$$

$$\delta\theta_{N,d} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{E_{\text{Th},N}} \left(-\frac{\omega_n}{\cos\theta} - E_N \right). \quad (50)$$

Эти поправки малы (следовательно, применимы), пока $\omega_n \ll E_g \xi_0^2 / d^2$. В то же время этот диапазон даёт основной вклад в сумму для поправок к плотности в (28). Схематическое представление этой поправки показано на рис. 2 (верхняя стрелка).

Zeroth approximation

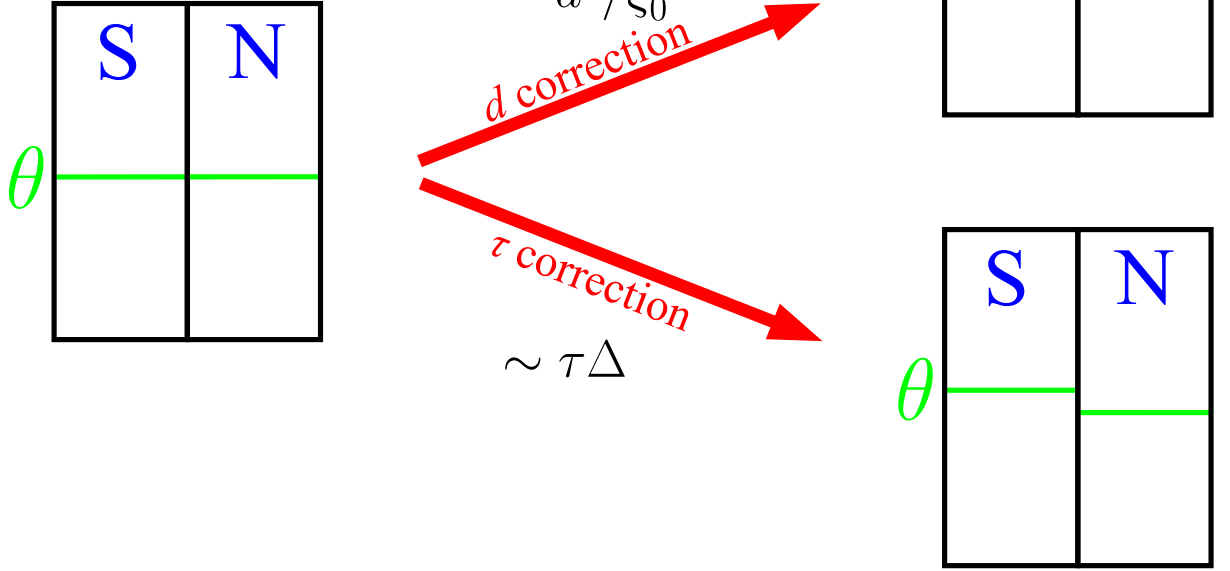


Рис. 2: Схематическое представление d - и τ -поправок первого порядка к спектральному углу в пределе слабо неидеальной границы в тонком бислое. Порядки величин поправок (показаны красными стрелками) следуют из анализа в разделе 2.

Ряд в (28) затем даёт логарифмический результат:

$$\frac{\delta n_{S(N),d}}{\bar{n}_0^{(0)}} = \frac{4}{\pi} \mu \frac{E_g^2}{E_{g0}^2} \frac{d_{S(N)} d}{\xi_0^2} \ln \frac{\xi_0^2}{d^2}. \quad (51)$$

Здесь $\bar{n}_0^{(0)} = \bar{n}^{(0)}(T=0, \Gamma=0)$ [см. (30) с $n_{S(N)}^{(0)}(0,0) = \pi m E_{g0} \sigma_{S(N)} / e^2$] – средняя сверхтекучая плотность при нулевой температуре в отсутствие магнитного поля и тока в нулевом порядке по неоднородности.

Основной несимметричный вклад в ток затем даётся (36) с

$$\delta q_{\text{cm}} = k q_c \frac{\bar{n}_0^{(0)}}{\bar{n}^{(0)}(\Gamma)} \left(\frac{E_g(\Gamma)}{E_{g0}} \right)^2 \frac{B}{B_c}, \quad (52)$$

и без $\delta \bar{n}(\Gamma)$, потому что последнее является чётной функцией импульса (не дающей СДЭ). Введённый здесь параметр неоднородности k характеризует силу СДЭ. Как будет показано ниже, в общем случае он включает как d -, так и τ -вклады ($k = k_d + k_\tau$).

Полученный на данном этапе d -вклад ($k = k_d$) мал из-за малости d -неоднородностей:

$$k_d = 2\sqrt{3} \frac{\delta x_{\text{cm}}(0,0)}{d_{\text{eff}}} = \mu \frac{5 - (d_S - d_N)(d_S - d_N + 32L_{\text{cm}})}{2\pi\sqrt{3}d_{\text{eff}}d} \left(\frac{d^2}{\xi_0^2} \right) \ln \frac{\xi_0^2}{d^2}. \quad (53)$$

Здесь $L_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}^{(0)} - (d_S - d_N)/2$ – смещение центра масс относительно геометрического центра бислоя. Эффективная магнитная толщина также может быть выражена через эти величины:

$$(d_{\text{eff}}/d)^2 = 1 - 4L_{\text{cm}}(d_S - d_N + 3L_{\text{cm}})/d^2. \quad (54)$$

Параметр неоднородности можно оценить следующим образом:

$$k_d \sim \frac{d^2}{\xi_0^2} \ln \frac{\xi_0^2}{d^2} \ll 1. \quad (55)$$

Условие малости, $k_d \ll 1$, подразумевает, что $d \ll \xi_0$, что может быть переписано как $\Delta \ll \langle D \rangle / d^2$. Последнее выражение имеет смысл эффективной энергии Таулесса всего бислоя.

Числитель в (53) всегда положителен. Это связано с тем, что при фиксированном $(d_S - d_N)$ значение L_{cm} может изменяться только в пределах $-d_S/2 < L_{\text{cm}} < d_N/2$.

Уравнения (36) и (52) демонстрируют СДЭ, обусловленный поперечными сверхпроводящими неоднородностями (∇n на рис. 1). Изменение профиля $n(x)$ вызвано ненулевым δq_{cm} и нетривиальным $\delta x_{\text{cm}} \neq \text{const}_{q_{\text{cm}}, B}$, которые нарушают симметрию (13) и, таким образом, порождают СДЭ.

Сила СДЭ, обусловленная d -неоднородностями, характеризуется параметром k_d из (53). В отсутствие неоднородностей $k_d = 0$. Например, неоднородности исчезают в отсутствие N-слоя, $d_N \rightarrow 0$, или в случае плохо проводящего N-слоя, $\sigma_N \rightarrow 0$. Неоднородности также подавляются с уменьшением толщины бислоя, $d \rightarrow 0$. В то же время уменьшение толщины или проводимости S-слоя ($d_S \rightarrow 0$ или $\sigma_S \rightarrow 0$) не приводит к исчезновению сверхпроводящих неоднородностей в бислое в целом, и k_d остаётся конечным. Это происходит потому, что в этом случае неоднородности исчезают только в S-слое, тогда как индуцированная сверхпроводимость в N-слое (фиксированной толщины) остаётся неоднородной. [Тем не менее, СДЭ исчезает в этом пределе, потому что $\delta q_{\text{cm}} \rightarrow 0$ из-за $q_c \rightarrow 0$ в (52).]

Параметр k_d является нетривиальной функцией параметров бислоя. Анализ (53) показывает, что в пределе тонкого бислоя СДЭ может быть максимизирован увели-

чением полной толщины бислоя d при сохранении умеренных отношений $d_S/d_N \sim 1$ и $\sigma_S/\sigma_N \sim 1$.

Явные аналитические выражения (как функции $q_{\text{см}}$ и B) для $\delta q_{\text{см}}$ в (52) и соответствующего тока в (36) могут быть получены только в предельных случаях теории АГ: при нулевой температуре ($T = 0$) и вблизи фазового перехода ($\Gamma \rightarrow \Gamma_c$). Эти случаи будут обсуждаться позже в разделе 4.

d -поправки к θ также неизбежно подразумевают неоднородность параметра порядка, т. е. наличие $\Delta_1(x)$. В то же время наше рассмотрение показало, что СДЭ появляется уже на фоне однородного параметра порядка Δ . Поправкой $\Delta_1(x)$ поэтому можно пренебречь, поскольку она привела бы только к малым поправкам к нашим результатам.

2.3 τ -поправки

Далее учитываются поправки, связанные с конечным сопротивлением (неидеальной прозрачностью) границы, $\tau \neq 0$. В пределе слабой неидеальности скачок спектрального угла мал, $\delta\theta_{S(N),\tau} = \pm\theta_j/2 \ll \theta$. Здесь параметр θ определяется из уравнения нулевого порядка (39). Поправки затем могут быть найдены разложением либо (20), либо (21):

$$\theta_j = \tau_S \sin \theta \cos \theta \left(-\frac{\omega_n}{\cos \theta} - E_S + \frac{\Delta}{\sin \theta} \right) = -\tau_N \sin \theta \cos \theta \left(-\frac{\omega_n}{\cos \theta} - E_N \right). \quad (56)$$

Поправки $\delta\theta_{S(N),\tau}$ малы, пока $\omega_n \ll 1/\tau_N$. Схематическое представление этих поправок показано на рис. 2 (нижняя стрелка).

Ряд в (27) затем даёт логарифмический результат

$$\frac{\delta n_{S(N),\tau}}{\bar{n}_0^{(0)}} = \pm \frac{1}{\pi} \mu \frac{D_{S(N)} d}{\langle D \rangle d_{S(N)}} \frac{E_g^2 \tau_N \tau_{S(N)}}{E_{g0} \tau} \ln \frac{1}{E_{g0} \tau_N}. \quad (57)$$

[Расчёт аналогичен случаю d -поправок в (51).]

В результате СДЭ определяется (36) и (52) со следующим параметром неоднородности:

$$k = k_d + k_\tau, \quad (58)$$

$$k_\tau = \mu \frac{8\sqrt{3}}{\pi} \frac{D_S D_N}{\langle D \rangle^2} \frac{d}{d_{\text{eff}}} E_{g0} \tau \ln \frac{1}{E_{g0} \tau_N}, \quad (59)$$

и без $\delta\bar{n}$, потому что последнее является чётной функцией импульса (не дающей СДЭ).

Параметр k в (58) содержит вклады как d -, так и τ -неоднородностей и определяет полную силу СДЭ в нашей системе. Поскольку τ -вклад увеличивает полный параметр неоднородности k , он усиливает СДЭ. (59) демонстрирует, что СДЭ монотонно растёт с увеличением τ в пределе слабо неидеальной границы.

Согласно (58), СДЭ появляется, даже если $k_d = 0$. Несмотря на то, что сверхтекучая плотность $n(x)$ в этом случае является ступенчатой функцией, τ -поправки делают отношение плотностей n_{S0}/n_{N0} чувствительным к току и магнитному полю, что подразумевает изменение профиля [см. (25) и (57)].

2.4 Условия применимости

Теперь обсудим условия применимости полученных выше решений. В этом отношении следует обсудить два типа условий. Первое – условие слабо неидеальной границы, $\theta_j \ll \theta$. Второе – условие слабой внутрислойной неоднородности, $\delta\theta_{S(N),d} \ll 1$. Оба условия должны рассматриваться при характерных частотах $\omega_n \gtrsim E_g$, обеспечивающих основной вклад в суммы в (26)–(28) для сверхтекучих плотностей.

Требование слабого сопротивления границы, $\theta_j \ll \theta$, согласно (56) выполняется при

$$\tau_{S(N)}\Delta \ll 1. \quad (60)$$

Информация о границе включена в (60) не только непосредственно через $\tau_{S(N)}$, но и через Δ , поскольку его максимальное значение $\Delta_0 = \Delta(T=0, \Gamma=0)$ зависит от времён вылета $\tau_{S(N)}$ [29]:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_{S0}} = \frac{\tau_N}{\tau} \left(\frac{\Delta_{S0}}{2\omega_D} \sqrt{1 + (\omega_D\tau)^2} \right)^{\tau_N/\tau_S}. \quad (61)$$

Здесь ω_D – дебаевская частота, $\Delta_{S0} = T_{CS}\pi/e^\gamma$ – параметр порядка изолированного S-слоя при нулевой температуре в отсутствие магнитного поля и тока, а $\gamma \approx 0.577$ – постоянная Эйлера.

С помощью условия $\Delta < \Delta_0$ мы можем упростить условие в (60) как

$$\tau\Delta \ll 1. \quad (62)$$

Это условие также гарантирует, что $\delta n_{S(N),\tau} \ll n_{S(N),0}$.

Вышеуказанные условия могут быть переписаны как $\tau_S\Delta \ll 1$ и $\tau_N E_g \ll 1$, что может быть интерпретировано на языке характерных длин. Расстояние $\sqrt{D_{S(N)}\tau_{S(N)}}$, пройден-

ное за время $\tau_{S(N)}$, много меньше длины когерентности соответствующего слоя $\xi_{S(N)}$:

$$\sqrt{D_{S(N)} \tau_{S(N)}} \ll \xi_{S(N)}, \quad (63)$$

$$\xi_S = \sqrt{D_S/\Delta}, \quad \xi_N = \sqrt{D_N/E_g}. \quad (64)$$

Второе требование, $\delta\theta_d \ll 1$, согласно (49) и (50) выполняется при

$$d_S \ll \xi_S/\sqrt{\mu}, \quad d_N \ll \xi_N. \quad (65)$$

Эти условия также могут быть записаны в энергетической форме с помощью энергий Таулесса, определённых в (18):

$$\mu\Delta \ll E_{\text{Th},S}, \quad (1-\mu)\Delta \ll E_{\text{Th},N}. \quad (66)$$

Итак, наше рассмотрение случая слабой неоднородности и слабого сопротивления границы справедливо для сопротивлений, заданных условием (62), и для тонких слоёв в смысле условия (65).

2.5 Сравнение вкладов

Получены два вклада в СДЭ: от d -поправок (конечная толщина бислоя), описываемых (53), и от τ -поправок (конечное сопротивление границы), описываемых (59). Сравнивая эти два вклада, получаем два режима, в которых один из вкладов доминирует.

Предполагая, что логарифмы и коэффициенты диффузии $D_{S(N)}$ в (53) и (59) одного порядка, находим, что условие $k_d \sim k_\tau$ означало бы

$$\tau \sim d^2/\langle D \rangle. \quad (67)$$

Последнее выражение имеет смысл времени диффузии поперёк бислоя.

Когда время вылета много меньше времени диффузии, $\tau \ll d^2/\langle D \rangle$, частицы легко перемещаются между слоями, и d -вклад доминирует, $k_d \gg k_\tau$. В этом режиме СДЭ определяется только геометрией бислоя и мал как $\eta \sim \tilde{\eta} \sim d^2/\xi_0^2$.

Если время вылета много больше времени диффузии, $d^2/\langle D \rangle \ll \tau \ll \Delta^{-1}$, тогда частицы проводят большую часть времени в одном из слоёв, и τ -вклад в СДЭ доминирует, $k_\tau \gg k_d$. В этом режиме СДЭ увеличивается с ростом сопротивления границы,

$$\eta \sim \tilde{\eta} \sim E_g \tau.$$

3 Сильно резистивная граница в тонких и умеренно толстых бислоях

3.1 d - и τ -поправки

Далее рассмотрим предельный случай, соответствующий сильно резистивной границе и слабому сверхпроводящему эффекту близости в нормальном металле, так что $\theta_N \ll \theta_S$. В нулевом приближении ($\tau \rightarrow \infty$) S-слой эффективно изолирован, что приводит к $\theta_N^{(0)} = 0$ и $\theta_S^{(0)} = \text{const}_x$. В рамках теории возмущений τ -поправки включаются в граничные значения следующим образом:

$$\theta_{S0} = \theta + \delta\theta_{S,\tau}, \quad \theta_{N0} = \delta\theta_{N,\tau} \ll \theta, \quad \theta_j \approx \theta. \quad (68)$$

Спектральный угол θ в нулевом порядке определяется из следующего уравнения:

$$-\frac{\omega_n}{\cos \theta(\omega_n)} + \frac{\Delta}{\sin \theta(\omega_n)} = E_S, \quad (69)$$

которое имеет ту же АГ-форму, что и (39), но теперь применяется к изолированному S-слою. Параразрушающий параметр здесь следует из (22) с центром масс, расположенным в центре S-слоя ($x_{\text{cm}}^{(0)} = d_S/2$):

$$E_S = \frac{D_S}{2} \left(q_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{3} (eBd_S)^2 \right) = E_{Sc} \left(\frac{q_{\text{cm}}^2}{q_c^2} + \frac{B^2}{B_c^2} \right). \quad (70)$$

Критические импульс и магнитное поле определяются аналогично (46), но для изолированного S-слоя ($d_{\text{eff}} \mapsto d_S$, $\Gamma \mapsto E_S$, $\langle D \rangle \mapsto D_S$):

$$q_c(T) = \sqrt{\frac{2E_{Sc}(T)}{D_S}}, \quad B_c(T) = \frac{\sqrt{3}\Phi_0 q_c(T)}{\pi d_S}. \quad (71)$$

В случае сильно резистивной границы $T_{c0} \mapsto T_{cS}$. Следовательно, $E_{Sc}(T)$ определяется уравнением, имеющим ту же форму, что и (123) с $T_{c0} \mapsto T_{cS}$ и $\Gamma_c \mapsto E_{Sc}$.

Соответствующие τ -поправки выводятся разложением (20) и (21), тогда как d -поправки определяются из (19), как и ранее. В результате,

$$\delta\theta_{S,\tau} = -\frac{\sin \theta}{\tau_S(\omega_n \cos \theta + E_S \cos 2\theta + \Delta \sin \theta)}, \quad (72)$$

$$\delta\theta_{N,\tau} = \frac{\sin \theta}{\tau_N(\omega_n + E_N)}, \quad \delta\theta_{S(N),d} = \frac{\sin \theta}{\tau_S(N)E_{\text{Th},S(N)}}. \quad (73)$$

Схематическое представление этих поправок показано на рис.3.

Полученная τ -поправка в S-слое, $\delta\theta_{S,\tau}$, и обе d -поправки, $\delta\theta_{S(N),d}$, зависят от импульса q_{cm} и магнитного поля B только через E_S и являются чётными функциями обоих. В то же время τ -поправка в N-слое, $\delta\theta_{N,\tau}$, зависит также от E_N , которая принимает вид

$$E_N = \frac{D_N}{D_S} E_{Sc} \left[\frac{(q_{\text{cm}} + eBd)^2}{q_c^2} + \frac{B^2}{B_c^2} \right]. \quad (74)$$

Это не является чётной функцией, $\delta\theta_{N,\tau}(-q_{\text{cm}}, B) \neq \delta\theta_{N,\tau}(q_{\text{cm}}, B) \neq \delta\theta_{N,\tau}(q_{\text{cm}}, -B)$, и эта асимметрия даёт вклад в СДЭ через $\delta\bar{n}$ [см. (36)].

Поправки, задаваемые (72) и (73), вместе с нулевым спектральным углом из (69), определяют соответствующие поправки к плотности $\delta n_{S(N),\tau}$ и $\delta n_{S(N),d}$ из (27) и (28) соответственно. Суммы по мацубаровским частотам для этих поправок не могут быть вычислены явно в общем случае. Однако их можно оценить как

$$\delta n_{S,\tau} \sim \frac{n_S^{(0)}}{\tau_S \Delta}, \quad \delta n_{N,\tau} \sim \frac{\sigma_N}{\sigma_S} \frac{n_S^{(0)}}{(\tau_N \Delta)^2}, \quad (75)$$

$$\delta n_{S,d} \sim \frac{n_S^{(0)}}{\tau_S \Delta} \frac{d_S^2}{\xi_S^2}, \quad \delta n_{N,d} \sim \frac{\sigma_N}{\sigma_S} \frac{n_S^{(0)}}{\tau_N \Delta} \frac{d_N^2}{\xi_N^2}. \quad (76)$$

Здесь $n_S^{(0)}$ – нулевая сверхтекучая плотность в S-слое, определяемая (26) с $\theta_S^{(0)} = \theta$ из (69). Длины когерентности здесь определяются (64) с $E_g = 1/\tau_N$. Заметим, что $\xi_N \gg \xi_S$ в пределе сильно резистивной границы (который мы сейчас обсуждаем).

Хотя $\delta n_{S,\tau}$ может быть самой большой поправкой среди четырёх, задаваемых (75) и (76), она лишь модифицирует полную сверхтекучую плотность в пределах S-слоя. Важно, что она является чётной функцией импульса, $\delta n_{S,\tau}(-q_{\text{cm}}, B) = \delta n_{S,\tau}(q_{\text{cm}}, B)$, и поэтому не вносит вклад в СДЭ. Следовательно, мы не включаем её в δq_{cm} и $\delta\bar{n}$.

Условия малости d -поправок выполняются в пределе тонких слоёв, $d_{S(N)} \ll \xi_{S(N)}$. Однако эти поправки остаются малыми даже для умеренно толстых слоёв, $d_{S(N)} \gtrsim \xi_{S(N)}$, при условии, что выполняется $\tau_{S(N)} \Delta \gg (d_{S(N)}/\xi_{S(N)})^2$. Это позволяет распространить анализ на случай умеренно толстых слоёв с достаточно резистивной границей, для которого характерны большие $\tau_{S(N)}$. Ниже рассматриваются оба случая.

3.1.1 Предел тонких слоёв

Для начала рассмотрим случай тонких слоёв, $d_{S(N)} \ll \xi_{S(N)}$. Также предполагается, что соответствующие параметры слоёв одного порядка: $d_S \sim d_N \sim d$, $\sigma_S \sim \sigma_N$ и $\tau_S \sim \tau_N \sim$

Zeroth approximation

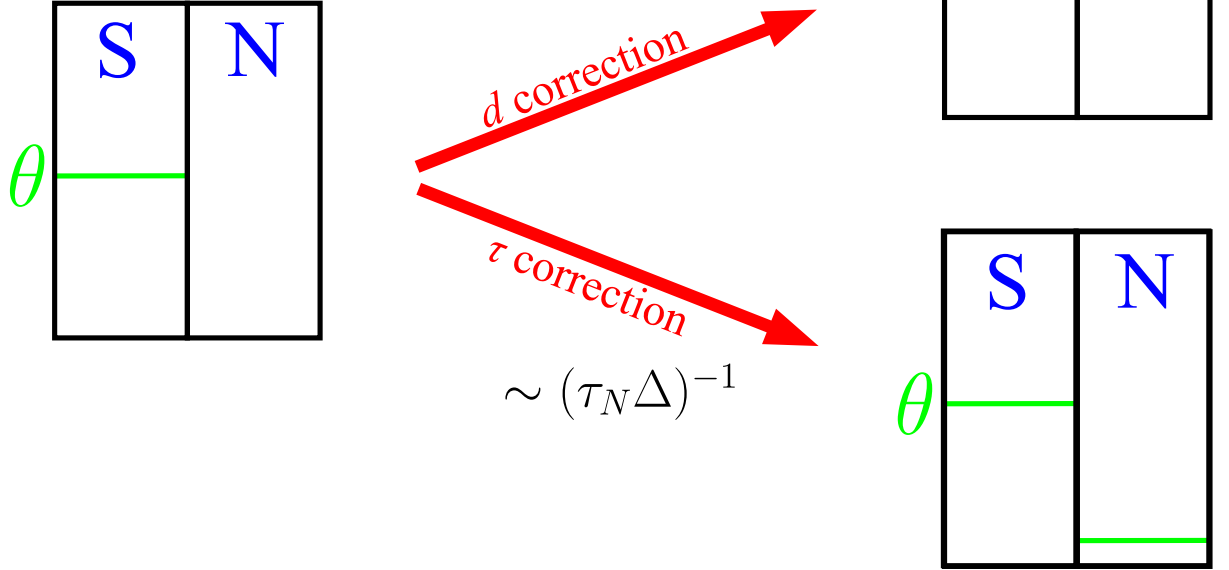


Рис. 3: Схематическое представление d - и τ -поправок первого порядка к спектральному углу в пределе сильно резистивной границы. Порядки величин поправок (показаны красными стрелками) следуют из анализа в разделе 3.

τ . В этом случае основными поправками, ответственными за СДЭ, являются $\delta n_{S,d} \sim \delta n_{S,\tau} (d_S/\xi_S)^2$ и $\delta n_{N,\tau} \sim \delta n_{S,\tau} (\tau\Delta)^{-1}$. Соответствующие асимметричные поправки даются выражениями

$$\delta \bar{n} = \delta n_{N,\tau} d_N / d, \quad (77)$$

$$\delta q_{\text{cm}} = 2eB \left(\frac{\delta n_{S,d}}{12n_S^{(0)}} d_S - \frac{\delta n_{N,\tau}}{n_S^{(0)}} \frac{d_N d}{d_S} \right). \quad (78)$$

В то же время поправка $\delta n_{N,d}$ имеет более высокий порядок малости, $\delta n_{N,d} \sim \delta n_{S,d} (\tau\Delta)^{-1} \sim \delta n_{N,\tau} (d_N/\xi_S)^2$, и поэтому ею можно пренебречь. Заметим, что $\delta n_{S,d}$ опущена в (77), потому что она является чётной функцией q_{cm} и не вносит вклад в нечётную часть $\delta \bar{n}(q_{\text{cm}})$.

Конкуренция между вкладами $\delta n_{S,d}$ и $\delta n_{N,\tau}$ определяет два режима. В пределе относительно малого сопротивления, $\tau\Delta \ll \xi_S^2/d_S^2$, доминирует поправка $\delta n_{N,\tau}$, и, следовательно, СДЭ убывает как $\eta \sim \tilde{\eta} \sim (\tau\Delta)^{-2}$. В противоположном пределе $\tau\Delta \gg \xi_S^2/d_S^2$ индуцированная сверхпроводимость подавлена, главную роль играет неоднородность внутри S-слоя, $\delta n_{S,d}$, и СДЭ убывает как $\eta \sim \tilde{\eta} \sim (\tau\Delta)^{-1}$.

В целом, ток I как функция импульса q_{cm} и магнитного поля B в пределе тонких

слоёв описывается (36) с $\delta\bar{n}$ и $\delta q_{\text{см}}$, заданными (77) и (78) соответственно.

3.1.2 Предел умеренно толстых слоёв

Теперь рассмотрим случай, когда по крайней мере один из слоёв является умеренно толстым, $d_{S(N)} \sim \xi_S$ (напомним, что $\xi_S \ll \xi_N$ в рассматриваемом сильно резистивном пределе). В этом режиме d -поправка в S-слое доминирует над поправками в N-слое, $\delta n_{S,d} \gg \delta n_{N,\tau}, \delta n_{N,d}$. Следовательно, вклад в СДЭ из (77) пренебрежимо мал.

Ток I тогда задаётся (36) с $\delta\bar{n} = 0$, и $\delta q_{\text{см}}$ определяется (78) без вклада $\delta n_{N,\tau}$. В результате СДЭ ведёт себя как $\eta \sim \tilde{\eta} \sim (\tau\Delta)^{-1}$.

3.2 Условия применимости

Теперь исследуются условия применимости полученных решений. Используется процедура, аналогичная описанной в 2.4, с фокусом на двух типах условий. Первое – применимость сильно резистивного случая, $\theta_{N0} \ll \theta_{S0}$. Второе – выполнение условия слабой неоднородности, $\delta\theta_{S(N),d} \ll 1$. Необходимо рассмотреть условия для поправок $\delta\theta_{S(N),\tau}$ и $\delta\theta_{S(N),d}$ при характерных частотах $\omega_n \sim \Delta$, обеспечивающих основной вклад в суммы в (26)–(28) для сверхтекучих плотностей.

Условие применимости случая сильно резистивной границы, $\theta_{N0} \ll \theta_{S0}$, может быть получено из (73) и составляет $\tau_N \Delta \gg 1$. Как обсуждалось в 2.4, величина Δ ограничена сверху значением Δ_0 из (61). Это делает полученное условие достижимым только в случае $\tau_S \gtrsim \tau_N$. Условие тогда эквивалентно

$$\tau\Delta \gg 1, \quad (79)$$

которое записано в тех же терминах, что и (62). (Противоположный случай, $\tau_S \ll \tau_N$, неизбежно ведёт к пределу слабо неидеальной границы, $\tau\Delta \ll 1$.)

Условия применимости слабо неоднородного приближения, $\delta\theta_{S(N),d} \ll 1$, следуют из (73). Они имеют вид

$$d_S \ll \xi_S \sqrt{\tau_S \Delta}, \quad d_N \ll \xi_N, \quad (80)$$

которые [аналогично (65)] определяют верхние границы для толщин слоёв. Длины когерентности здесь определяются (64) с $E_g = 1/\tau_N$. Заметим, что условия (80) могут выполняться даже для умеренно толстых слоёв, $d_{S(N)} \gtrsim \xi_S$, если граница достаточно резистивна.

Аналогично (66), условия (80) могут быть переформулированы в терминах энергий

Таулесса, определённых в (18):

$$1/\tau_{S(N)} \ll E_{\text{Th},S(N)}. \quad (81)$$

Это условие подразумевает, что времена диффузии $E_{\text{Th},S(N)}^{-1}$ малы по сравнению с временами вылета $\tau_{S(N)}$. Физически это означает, что частица диффундирует через слой много раз, прежде чем туннелирует через границу.

Кроме того, условия в (80) могут быть выражены через сопротивление или прозрачность границы: $r_B \gg r_{S(N)}$ или, эквивалентно, $\mathcal{T} \ll l_{S(N)}/d_{S(N)}$ (здесь $\mathcal{T}$ – квантово-механическая прозрачность границы, а $l_{S(N)}$ – длина свободного пробега в соответствующем слое).

Итак, наше рассмотрение случая слабой неоднородности и сильно резистивной границы справедливо, если $\tau_S \gtrsim \tau_N$, для сопротивлений, заданных условием (79), и для толщин, заданных (80).

4 Предельные случаи эффективной теории Абрикосова–Горькова

Предельные случаи, рассмотренные в разделах 2 и 3, в нулевом порядке свелись к эффективной теории АГ в каждом случае [см. (39) и (69) соответственно]. Теория АГ допускает аналитическое описание при нулевой температуре или вблизи фазового перехода. В этих предельных случаях АГ мы можем получить полное аналитическое решение в смысле нахождения выражений для $E_g(q_{\text{cm}}, B)$ [или $\Delta(q_{\text{cm}}, B)$] и $\tilde{n}^{(0)}(q_{\text{cm}}, B)$, см. Приложение В. Если мы также можем найти аналитические выражения для неоднородных поправок, мы можем, наконец, получить явные результаты для $I(q_{\text{cm}}, B)$ и, следовательно, для η и $\tilde{\eta}$.

4.1 Нулевая температура (предел слабо неидеальной границы)

Начнём со случая нулевой температуры. В этом случае мы будем рассматривать только предел малого сопротивления границы, $\tau\Delta \ll 1$, который допускает полное аналитическое рассмотрение.

В зависимости от паразитизирующего параметра Γ теория АГ [см. (39)] демонстрирует как щелевой, так и бесщелевой режимы, поскольку спектральная щель ведёт себя как

$$E_{\text{gap}} = \begin{cases} E_g[1 - (\Gamma/E_g)^{2/3}]^{3/2}, & \Gamma < E_g, \\ 0, & \Gamma > E_g. \end{cases} \quad (82)$$

В этом разделе мы рассматриваем щелевой режим, $\Gamma < E_g(\Gamma)$, поскольку он соответствует наибольшему СДЭ. В этом режиме зависимости E_g и $\tilde{n}^{(0)}$ от Γ даются (125)–(128) с $z < 1$.

Критический ток является экстремумом функции $I(q_{\text{cm}})$. В то же время, поскольку $E_g(q_{\text{cm}})$ – монотонная функция, мы можем максимизировать/минимизировать зависимость $I(E_g)$ вместо этого. Вводя параметр $x = E_g/E_{g0} < 1$, мы можем записать условие щелевого режима как $e^{-\pi/4} < x < 1$. Выражая ток, полученный в разделе 2 [вместе с (36)], через x , находим

$$\frac{I(x, B)}{I_{\text{ch}}} = \pm x \left(1 - \frac{16}{3\pi^2} \ln \frac{1}{x} \right) \sqrt{\frac{8}{\pi} x \ln \frac{1}{x} - \frac{B^2}{B_c^2}} + kx^2 \frac{B}{B_c}, \quad (83)$$

$$\frac{q_{\text{cm}}(x, B)}{q_c} = \sqrt{\frac{8}{\pi} x \ln \frac{1}{x} - \frac{B^2}{B_c^2}}. \quad (84)$$

Верхний и нижний знаки соответствуют двум противоположным направлениям тока ($I > 0$ и $I < 0$ соответственно). Экстремумы достигаются при x_m , удовлетворяющем следующему уравнению:

$$\left[\left(\frac{16 + 3\pi^2}{\pi^2} - \frac{16}{\pi^2} \ln \frac{1}{x_m} \right) x_m + \frac{4}{3\pi} \frac{B^2}{B_c^2} \right] \ln \frac{1}{x_m} = x_m + \frac{16 + 3\pi^2}{12\pi} \frac{B^2}{B_c^2} \mp \frac{\pi k}{2} x_m \frac{B}{B_c} \sqrt{\frac{8}{\pi} x_m \ln \frac{1}{x_m} - \frac{B^2}{B_c^2}}. \quad (85)$$

При нулевом магнитном поле это уравнение имеет точное решение

$$x_{m0} = x_m(B = 0) = \exp \left(-\frac{16 + 3\pi^2 - \sqrt{256 + 32\pi^2 + 9\pi^4}}{32} \right) \approx 0.79, \quad (86)$$

что даёт

$$I_{c0} = |I(x_{m0}, B = 0)| \approx 0.47 I_{\text{ch}}. \quad (87)$$

Согласно (125), значение x_{m0} соответствует паразарушающему параметру $\Gamma_{m0}/\Gamma_c = -(8/\pi)x_{m0} \ln x_{m0} \approx 0.475$. В то же время спектральная щель исчезает при паразарушающем параметре $\Gamma_{\text{gap}}/\Gamma_c = 2e^{-\pi/4} \approx 0.91$. Это демонстрирует, что ток в (87) соответствует щелевому режиму. Конечное магнитное поле тогда приводит к СДЭ, всё ещё сохраняя щелевую сверхпроводимость.

Переход в бесщелевой режим происходит при $x_{\text{gap}} = e^{-\pi/4}$. Согласно (85), это соот-

ветствует магнитному полю

$$\frac{B_{\text{gap}}}{B_c} = \sqrt{\frac{3e^{-\pi/4}(16 - 8\pi + 3\pi^2)}{16 - 4\pi + 3\pi^2}} \pm \frac{3\pi^2 \sqrt{e^{-3\pi/4}(4 - \pi)(3\pi - 4)}}{(16 - 4\pi + 3\pi^2)^{3/2}} k \approx 0.92 \pm 0.10k. \quad (88)$$

Поскольку $B_{\text{gap}} \sim B_c$, диапазон магнитных полей, сохраняющих щелевую сверхпроводимость, $0 < B < B_{\text{gap}}$, довольно широк. (При больших магнитных полях, $B > B_{\text{gap}}$, СДЭ может быть аналитически рассмотрен вблизи фазового перехода, см. 4.2 ниже.)

Резюмируя, при нулевой температуре задача сводится к решению (85). Для малых магнитных полей, $B \ll B_{\text{gap}}$, мы приближённо находим диодную эффективность и абсолютную диодную асимметрию [см. определения в (14) и (15)]:

$$\eta(B) = ak \frac{B}{B_{\text{gap}}} \left(1 + c_1 \frac{B^2}{B_{\text{gap}}^2} \right), \quad (89)$$

$$\tilde{\eta}(B) = ak \frac{B}{B_{\text{gap}}} \left(1 - c_2 \frac{B^2}{B_{\text{gap}}^2} \right). \quad (90)$$

Здесь числовые константы выражаются следующим образом:

$$a = x_{m0}^2 \frac{B_{\text{gap}}/B_c}{I_{c0}/I_{\text{ch}}} \approx 1.21, \quad (91)$$

$$c_0 = \sqrt{256 + 32\pi^2 + 9\pi^4}, \quad (92)$$

$$c_1 = \frac{(3\pi^2 - 16 + c_0)(B_{\text{gap}}/B_c)^2}{6\pi^{3/2}(I_{c0}/I_{\text{ch}})\sqrt{x_{m0}}\sqrt{16 + 3\pi^2 - c_0}} - c_2 \approx 0.28, \quad (93)$$

$$c_2 = \frac{\pi(3\pi^2 + 16 + c_0)(B_{\text{gap}}/B_c)^2}{12c_0 x_{m0}} \approx 0.62. \quad (94)$$

Функции в (89) и (90) проиллюстрированы на рис. 4 и 5 соответственно вместе с численными решениями (85).

В нашем случае нулевой температуры и слабо неидеальной границы мы также можем обсудить кинетическую индуктивность. В щелевом режиме она может быть получена из (83) и (84):

$$\frac{L_k(x, B)}{L_k(x=1, B=0)} = -\frac{I_{\text{ch}}}{q_c} \frac{dq_{\text{cm}}(x, B)/dx}{dI(x, B)/dx}. \quad (95)$$

(95) вместе с (83) параметрически определяет зависимость $L_k(I, B)$ (с x в качестве параметра). Эта зависимость проиллюстрирована на рис. 6, который демонстрирует СДЭ при $B \neq 0$.

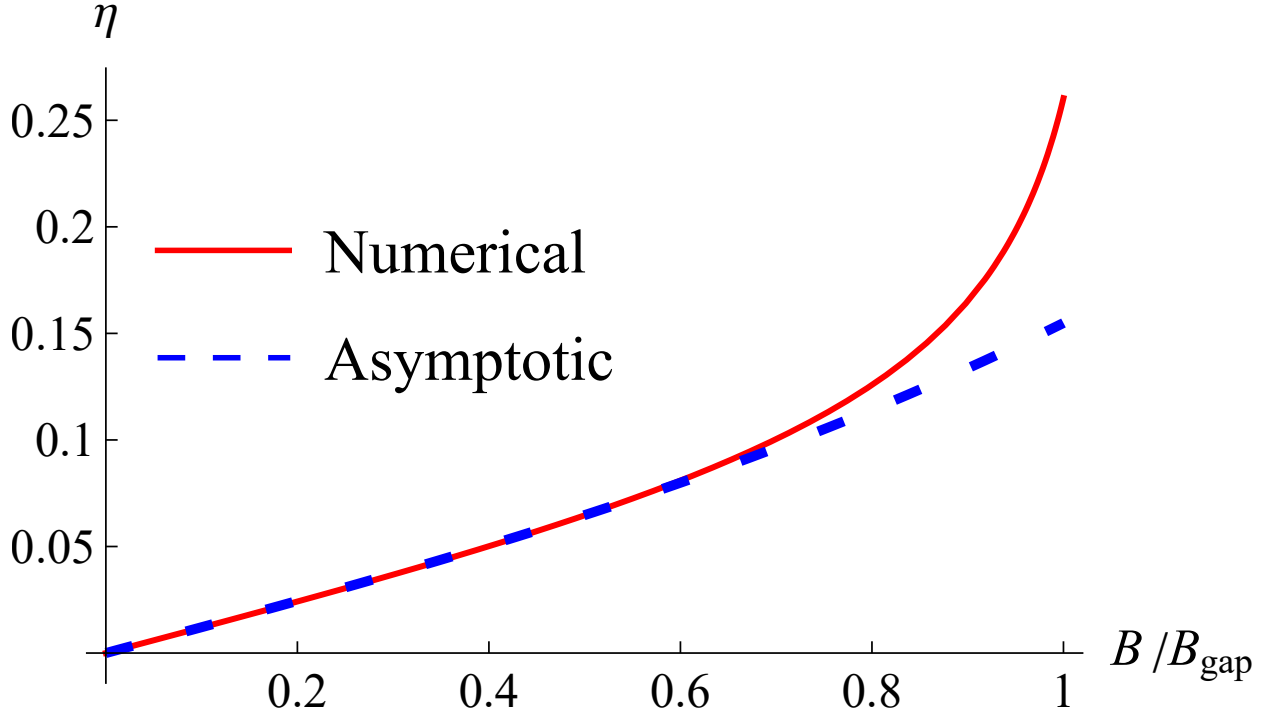


Рис. 4: Диодная эффективность η в зависимости от B в щелевом режиме при $k = 0.1$. Красная сплошная кривая получена в результате численного решения (85). Синяя пунктирная кривая представляет асимптотическое решение, задаваемое (89), выведенным в пределе малых магнитных полей ($B \ll B_{\text{gap}}$). Это асимптотическое решение даёт хорошее приближение на большей части изображённого диапазона. В отличие от $\tilde{\eta}$, мы находим, что η монотонно возрастает с B .

4.2 Окрестность фазового перехода

Другой случай, в котором могут быть получены явные ответы для СДЭ, – это окрестность сверхпроводящего фазового перехода, т. е. при $\Delta \ll \Delta_0$. Это достигается либо вблизи критической температуры, либо вблизи критического паразаразрушающего параметра [$T \rightarrow T_{c0}$ или $\Gamma \rightarrow \Gamma_c(T)$ в случае слабо неидеальной границы; $T \rightarrow T_{cS}$ или $E_S \rightarrow E_{Sc}(T)$ в случае сильно резистивной границы]. Альтернативное условие применимости этого случая обсуждается в Приложении В.4 [см. (134)].

В обоих предельных случаях (слабо и сильно резистивной границы) мы ранее получили эффективные уравнения АГ [см. (39) и (69)]. Вблизи фазового перехода имеют место несколько упрощений. (i) Эффективный параметр порядка и сверхтекучая плотность определяются (130) и (135) соответственно (эти выражения непосредственно применимы в слабо неидеальном случае, тогда как в сильно резистивном случае они работают после замены $E_g \mapsto \Delta$, $\Gamma \mapsto E_S$ и $d_{\text{eff}} \mapsto d_S$). (ii) В обоих случаях член $\delta \tilde{n}$ в (36) мал и им можно пренебречь. (iii) Эффективный параметр порядка и сверхтекучая плотность зависят от паразаразрушающего параметра как $E_g^2 \propto \tilde{n}^{(0)} \propto (\Gamma_c - \Gamma)$. Следовательно,

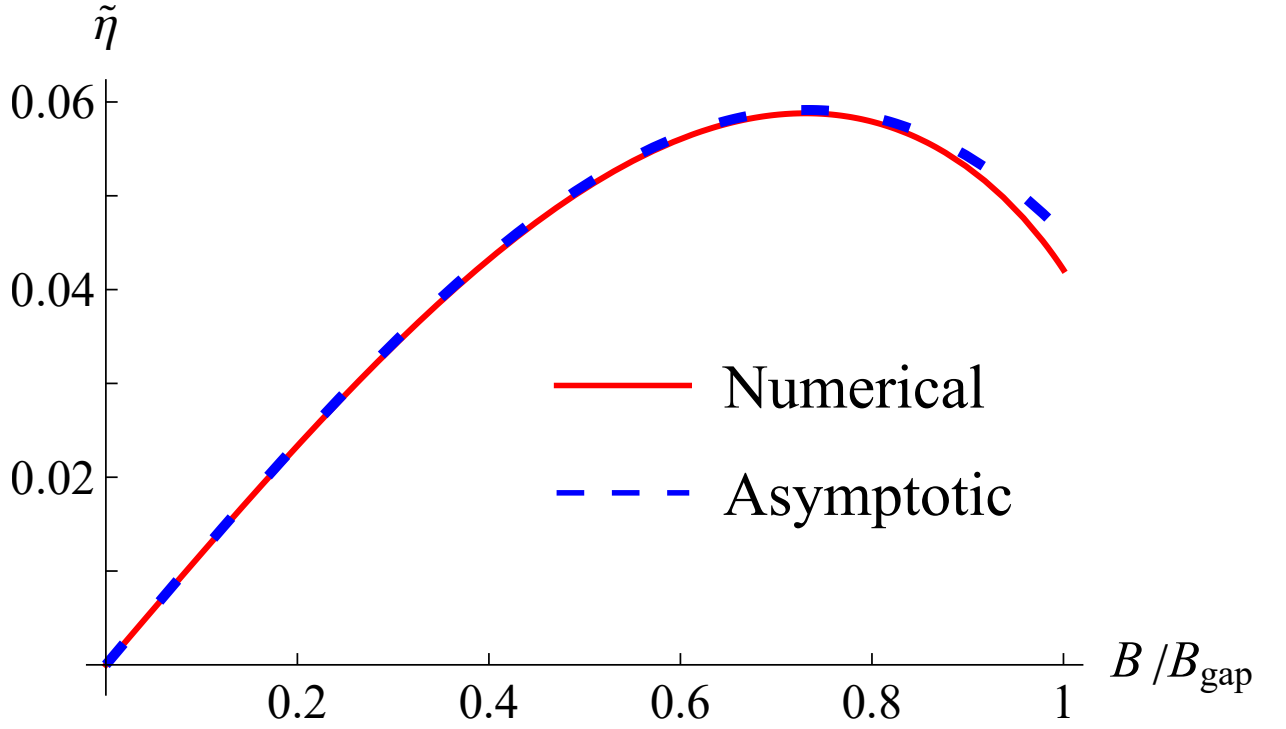


Рис. 5: Абсолютная диодная асимметрия $\tilde{\eta}$ в зависимости от B в щелевом режиме при $k = 0.1$. Красная сплошная кривая получена в результате численного решения (85). Синяя пунктирная кривая представляет асимптотическое решение, задаваемое (90), выведенным в пределе малых магнитных полей ($B \ll B_{\text{gap}}$). Это асимптотическое приближение демонстрирует отличное согласие с численным результатом во всём показанном диапазоне. Максимум $\tilde{\eta}$ достигается при промежуточной напряжённости поля, $0 < B < B_{\text{gap}}$.

зависимость от Γ сокращается в (52), так что $\delta q_{\text{cm}} \propto B$.

В результате в обоих предельных случаях выражение для тока может быть записано как

$$\frac{I(q_{\text{cm}}, B)}{I_{c0}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left[1 - \left(\frac{q_{\text{cm}}}{q_c} + \tilde{k} \frac{B}{B_c} \right)^2 - \frac{B^2}{B_c^2} \right] \frac{q_{\text{cm}}}{q_c}, \quad (96)$$

с разными перенормированными параметрами неоднородности:

$$\tilde{k}(T) = \frac{\tilde{n}_0^{(0)}}{\tilde{n}(T)} \times \begin{cases} k\tilde{E}_g^2(T)/E_{g0}^2, & \tau\Delta \ll 1, \\ \left[\frac{d_N}{d_S} \left(1 + \frac{d_N}{d_S} \right) \frac{\sigma_N}{2\sigma_S} \frac{1}{\Delta_0^2 \tau_N^2} + \frac{1}{3\Delta_0 \tau} \frac{d_S^2}{\xi_S^2} \right] \frac{\tilde{\Delta}(T)^2}{\Delta_0^2}, & \tau\Delta \gg 1. \end{cases} \quad (97)$$

Зависящие от температуры функции $\tilde{E}_g(T)$ и $\tilde{n}(T)$ определяются (131) и (136) соответственно [$\tilde{\Delta}(T)$ определяется (131) с заменой $\tilde{E}_g \mapsto \tilde{\Delta}$ и $\Gamma_c \mapsto E_{Sc}$]. Ток нормирован на критический ток при нулевом магнитном поле:

$$I_{c0} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\tilde{n}(T)}{\tilde{n}_0^{(0)}} I_{\text{ch}}. \quad (98)$$

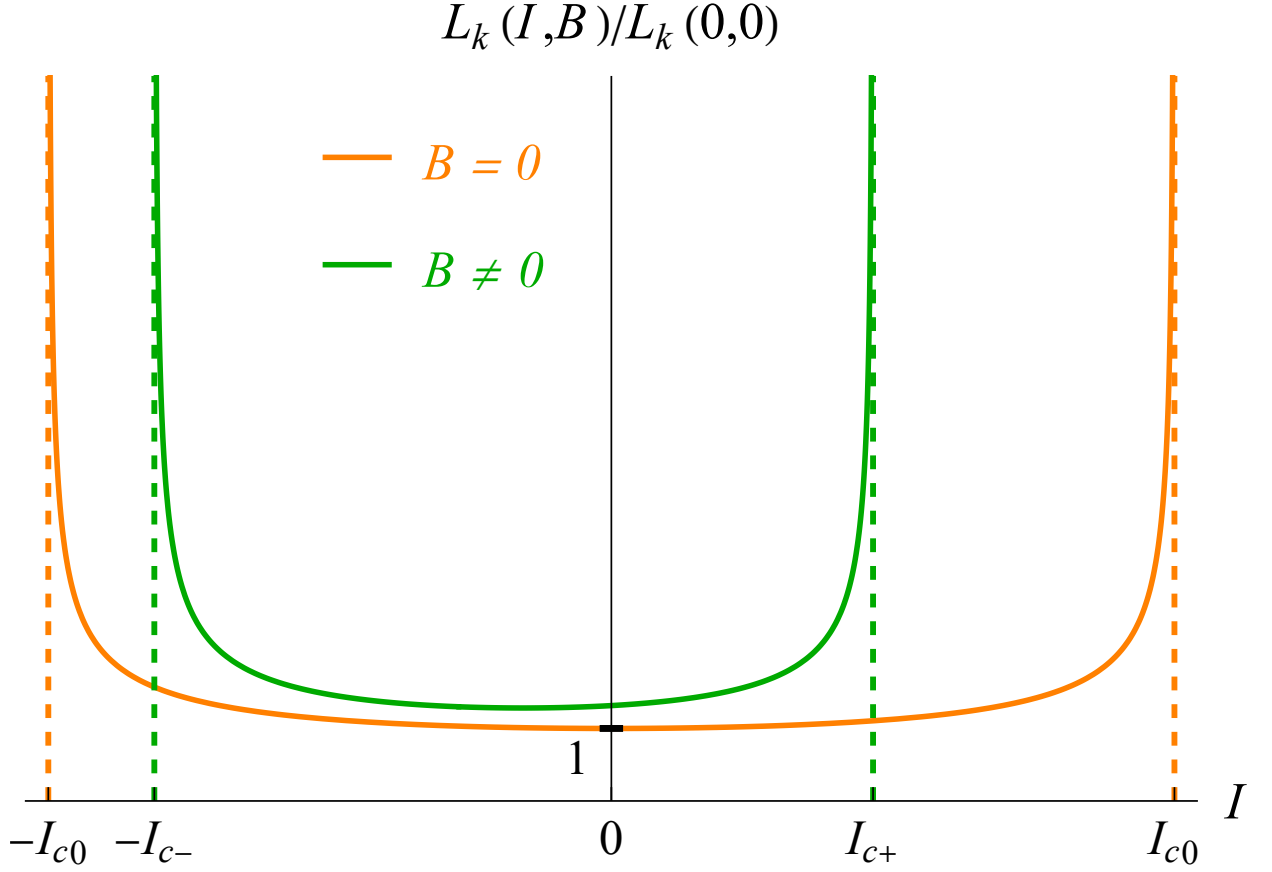


Рис. 6: Кинетическая индуктивность L_k при нулевой температуре в зависимости от тока I при нулевом и ненулевом магнитном поле B [см. (95)] при $k = 0.3$. Нормировочное значение $L_k(0, 0) \equiv L_k(I = 0, B = 0) = L_k(x = 1, B = 0)$ [заметим, что $I = 0$ соответствует $x = 1$ в (83)]. При $B = 0$ зависимость симметрична, $L_k(I) = L_k(-I)$, и, следовательно, СДЭ отсутствует. Напротив, при $B \neq 0$ (зелёная кривая соответствует $B = 0.6B_c$) эта симметрия нарушается, что даёт $L_k(I) \neq L_k(-I)$.

Результат (96) проиллюстрирован на рис. 7.

В случае $\tau\Delta \ll 1$ параметр неоднородности k в (97) определяется (58) и содержит τ - и d -вклады. В противоположном случае $\tau\Delta \gg 1$ выражение в квадратных скобках в (97) является параметром неоднородности k для сильно резистивного случая, также содержащим τ - и d -вклады (первое и второе слагаемые в квадратных скобках соответственно).

Поскольку ток задаётся одним и тем же (96) в обоих предельных случаях (с точностью до разных выражений для $\tilde{k}$), мы можем обсудить критические токи в обоих случаях единым образом. Критические токи находятся как экстремумы тока по импульсу:

$$\frac{I_{c\pm}(B)}{I_{c0}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \left(2\tilde{k}\frac{B}{B_c} \pm \sqrt{3 - (3 - \tilde{k}^2)\frac{B^2}{B_c^2}} \right) \left(\tilde{k}\frac{B}{B_c} \sqrt{3 - (3 - \tilde{k}^2)\frac{B^2}{B_c^2}} \pm 3 \mp \frac{B^2}{B_c^2}(3 + \tilde{k}^2) \right). \quad (99)$$

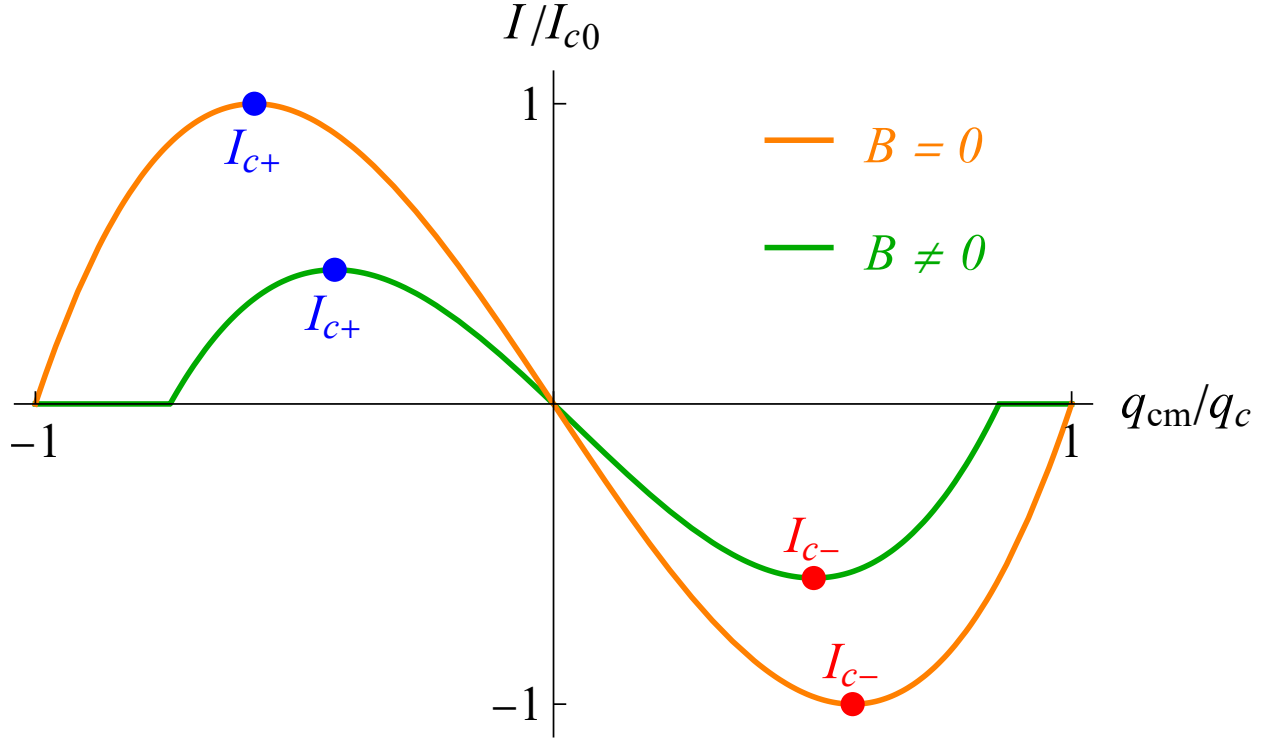


Рис. 7: Сверхток I в зависимости от импульса центра масс q_{cm} в отсутствие ($B = 0$) и в присутствии ($B \neq 0$) магнитного поля [см. (96)] при $\tilde{k} = 0.1$. Максимумы (синие точки) и минимумы (красные точки) соответствуют критическим токам в положительном (I_{c+}) и отрицательном (I_{c-}) направлениях соответственно. При $B = 0$ зависимость симметрична, $I(-q) = -I(q)$, и, следовательно, СДЭ отсутствует ($I_{c+} = I_{c-}$). Напротив, при $B \neq 0$ (на графике $B = 0.6B_c$) эта симметрия нарушается, что даёт $I(-q) \neq -I(q)$ и приводит к СДЭ ($I_{c+} \neq I_{c-}$).

Этот результат проиллюстрирован на рис. 8. Заметим, что $I_{c-} \geq I_{c+}$ при $B > 0$. Согласно нашим предположениям, мы рассматриваем $\tilde{k} \ll 1$, тем не менее членами $\tilde{k}^2$ нельзя пренебрегать, поскольку они становятся важными при $B \approx B_c$.

При низких магнитных полях критические токи ведут себя линейно как функции B :

$$I_{c\pm}(B \ll B_c) \approx I_{c0} \left(1 \mp \sqrt{3} \tilde{k} B / B_c \right). \quad (100)$$

С увеличением магнитного поля больший критический ток I_{c-} достигает максимума при $B_{\max} = B_c \tilde{k} / \sqrt{3}$:

$$I_{c,\max} \approx I_{c0} (1 + \tilde{k}^2 / 2). \quad (101)$$

Меньший критический ток I_{c+} также имеет особенность; он обращается в нуль при некотором значении магнитного поля, меньшем критического:

$$I_{c+}(B \geq B_0) = 0, \quad B_0 = B_c (1 + \tilde{k}^2)^{-1/2} < B_c. \quad (102)$$

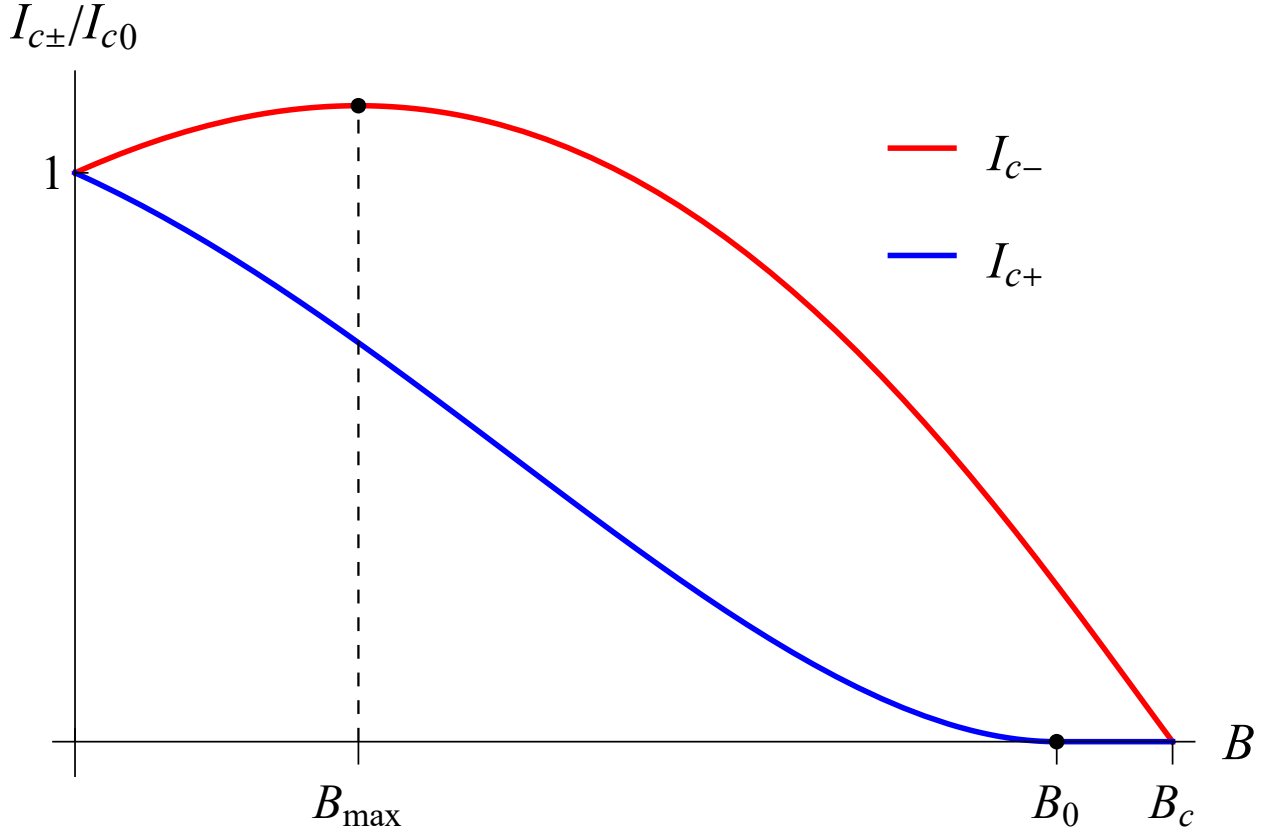


Рис. 8: Критические токи $I_{c\pm}$ в зависимости от B [см. (99)] при $\tilde{k} = 0.5$. При $B = 0$ СДЭ отсутствует, $I_{c+}(0) = I_{c-}(0)$. Большой критический ток, I_{c-} , демонстрирует немонотонную зависимость от B : он достигает максимума при $B_{\max}$ [см. (101)] и обращается в нуль при критическом поле B_c . Напротив, меньший критический ток, I_{c+} , монотонно убывает с B и обращается в нуль при меньшем поле $B_0 < B_c$ [см. (102)].

Диодная эффективность и абсолютная диодная асимметрия также могут быть записаны явно:

$$\eta(B) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} \tilde{k} \frac{B}{B_c} \left[1 - \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{9} \right) \frac{B^2}{B_c^2} \right]}{\left[1 - \left(1 - \frac{\tilde{k}^2}{3} \right) \frac{B^2}{B_c^2} \right]^{3/2}}, & B < B_0, \\ 1, & B > B_0, \end{cases} \quad (103)$$

и

$$\tilde{\eta}(B) = \begin{cases} \sqrt{3} \tilde{k} \frac{B}{B_c} \left[1 - \left(1 + \frac{\tilde{k}^2}{9} \right) \frac{B^2}{B_c^2} \right], & B < B_0, \\ I_{c-}(B)/2I_{c0}, & B > B_0, \end{cases} \quad (104)$$

см. рис. 9 для иллюстрации.

Абсолютная диодная асимметрия имеет максимальное значение при определённом магнитном поле:

$$B_{\tilde{\eta}, \max} \approx B_c / \sqrt{3}, \quad \tilde{\eta}_{\max} \approx 2\tilde{k}/3. \quad (105)$$

В то же время из-за обращения в нуль одного из критических токов диодная эффектив-

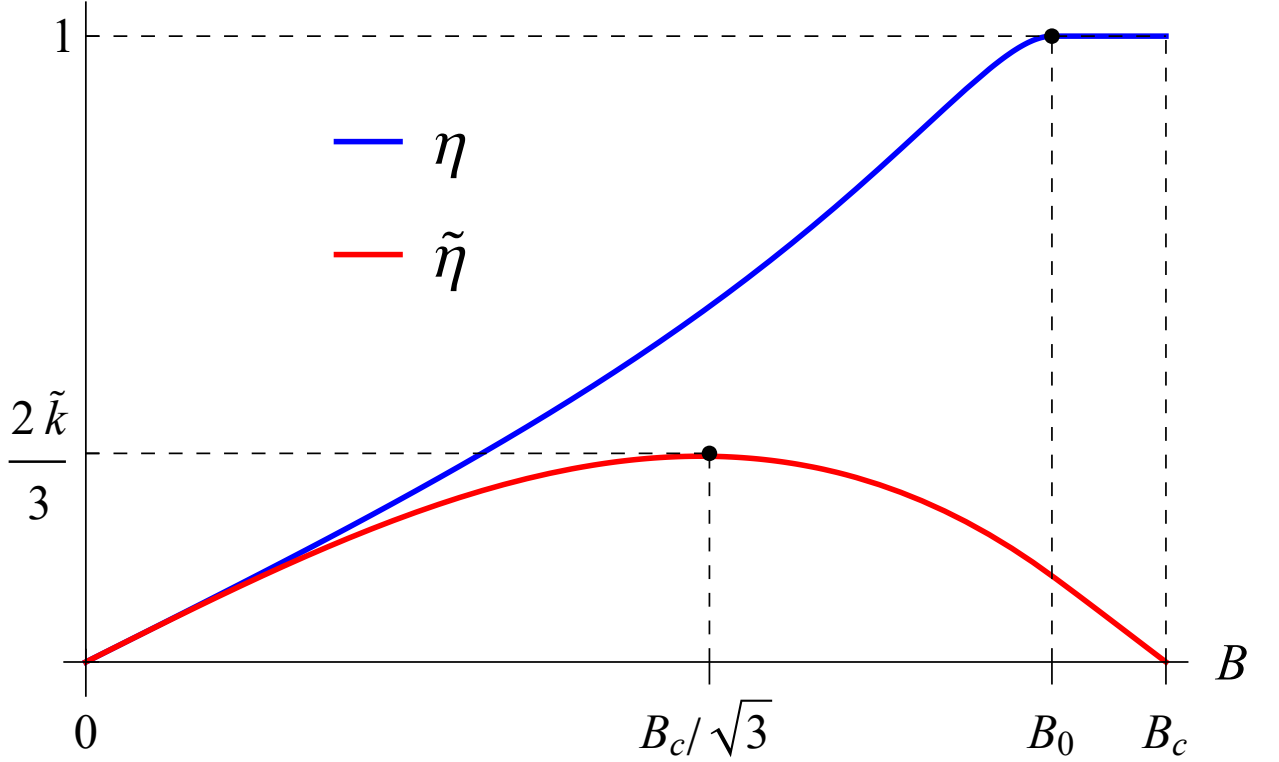


Рис. 9: Диодная эффективность η (синяя линия) и абсолютная диодная асимметрия $\tilde{\eta}$ (красная линия) в зависимости от B [см. (103) и (104) соответственно] при $\tilde{k} = 0.5$. Эти две величины демонстрируют различное поведение. Диодная эффективность η монотонно возрастает до тех пор, пока меньший критический ток не обращается в нуль при B_0 [см. (102)], где η достигает своего максимального значения $\eta(B \geq B_0) = 1$. Напротив, $\tilde{\eta}$ немонотонна: она достигает своего максимального значения $\tilde{\eta}_{\max}$ при $B_{\tilde{\eta},\max}$ [см. (105), справедливое для $\tilde{k} \ll 1$] и обращается в нуль при критическом поле B_c . Хотя график построен для не слишком малого $\tilde{k}$, положение максимума, задаваемое (105), остаётся близким к фактическому. Заметим, что для малых магнитных полей $B \ll B_c$ имеем $\eta \approx \tilde{\eta} \propto B$, как непосредственно следует из их определений [см. (14) и (15)].

ность максимальна ($\eta = 1$) в конечном интервале магнитных полей, $B_0 < B < B_c$, вблизи критического.

Кинетическая индуктивность вблизи фазового перехода задаётся соотношением

$$\frac{L_k(q_{\text{cm}}, B)}{L_k(0, 0)} = \left(1 - (1 + \tilde{k}^2) \frac{B^2}{B_c^2} - 3 \frac{q_{\text{cm}}^2}{q_c^2} - 4\tilde{k} \frac{q_{\text{cm}}}{q_c} \frac{B}{B_c} \right)^{-1} \quad (106)$$

вместе с (96) как параметрическая функция (с параметром q_{cm}). Полученная зависимость $L_k(I, B)$ проиллюстрирована на рис. 10, который демонстрирует СДЭ при $B \neq 0$.

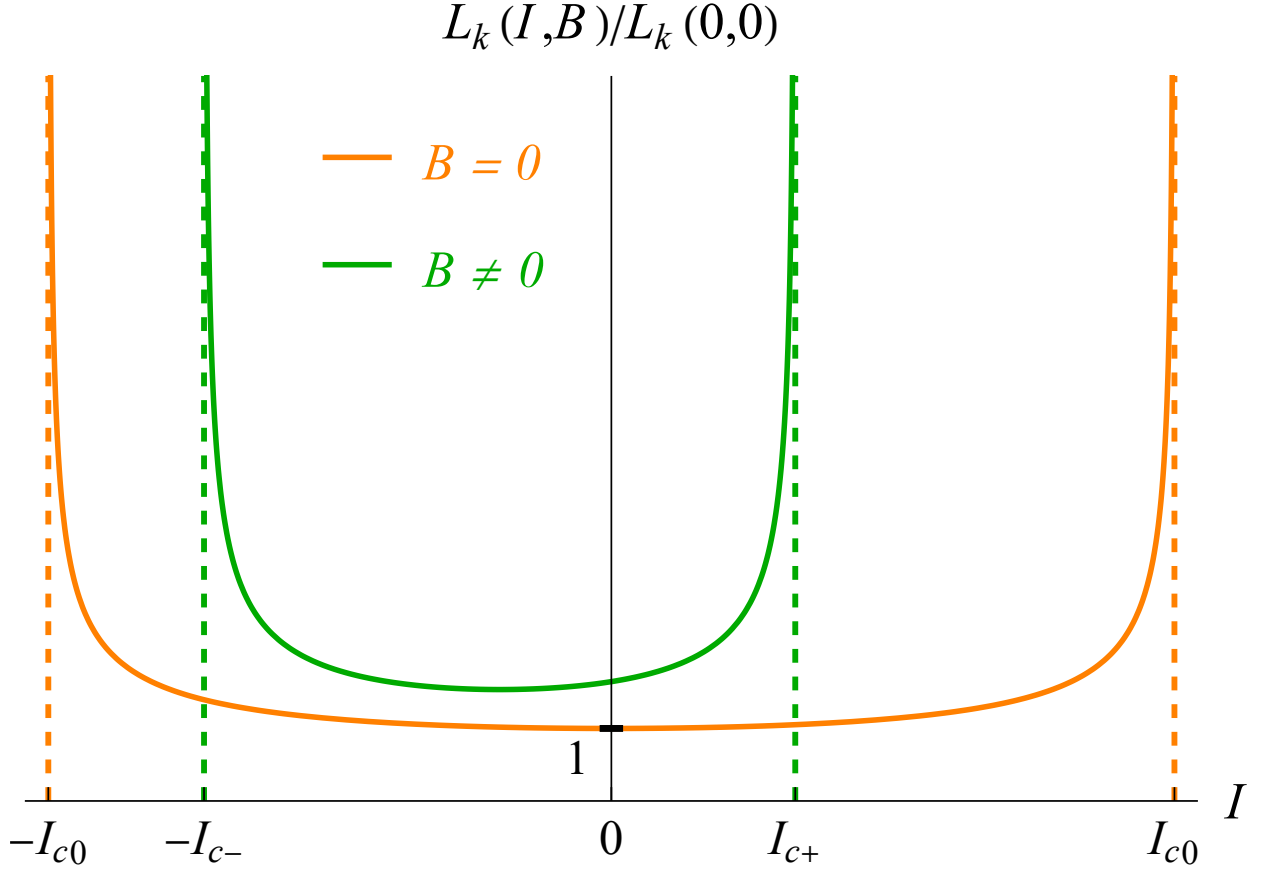


Рис. 10: Кинетическая индуктивность L_k в зависимости от тока I вблизи фазового перехода для нулевого и ненулевого магнитного поля B [см. (106)] при $\tilde{k} = 0.3$. При $B = 0$ зависимость симметрична, $L_k(I) = L_k(-I)$, и, следовательно, СДЭ отсутствует. Напротив, при $B \neq 0$ (зелёная кривая соответствует $B = 0.6B_c$) симметрия нарушается, $L_k(I) \neq L_k(-I)$. Оранжевая кривая ($B = 0$) выглядит почти идентично своему аналогу на рис. 6, хотя лежащие в основе функциональные формы различны. Зелёная кривая ($B \neq 0$) качественно похожа на соответствующую кривую на рис. 6, но демонстрирует несколько меньшую ширину при этом значении B , что отражает меньшие критические токи $I_{c\pm}$ по сравнению с соответствующим I_{c0} .

5 Слабо неидеальная граница в умеренно толстых бислоях

Режим толстого бислоя, $d \gtrsim \xi_0$, со слабо неидеальной границей, $\tau\Delta \ll 1$, не поддаётся полному аналитическому решению, и явные выражения для критических токов не могут быть получены. Тем не менее в этом режиме можно получить оценки, исходя из результатов для предела тонких слоёв, $d \ll \xi_0$, вводя дополнительные предположения о толщинах или проводимостях. Это позволяет расширить область применимости результатов, полученных в разделе 2.

Ниже предполагается слабое сопротивление, $\tau\Delta \ll 1$. Оценки будут основаны на результатах для параметров неоднородности k_d и k_τ [см. (53) и (59)].

5.1 Толстый и тонкий слои

В предыдущем рассмотрении не делались предположения о соотношении между толщинами или проводимостями двух слоёв. Теперь рассмотрим различные случаи для отношения d_N/d_S .

Во-первых, предположим, что $d_N/d_S \ll 1$, тем самым вводя дополнительный малый параметр. В этом пределе параметры неоднородности можно оценить как

$$k_d \sim d_S d_N / \xi_0^2, \quad k_\tau \sim (d_N/d_S) \tau \Delta. \quad (107)$$

Оба параметра всё ещё должны быть малы для применимости результатов раздела 2. Теперь k_d мал даже при $d_S \sim \xi_0$. В этом случае τ -поправки намного меньше: $k_\tau/k_d \sim \tau \Delta \ll 1$. Сила СДЭ в этом режиме, таким образом, определяется d -поправками и не зависит от сопротивления границы:

$$\eta \sim \tilde{\eta} \sim k_d. \quad (108)$$

Аналогично можно проанализировать противоположный случай, $d_N/d_S \gg 1$:

$$k_d \sim d_S d_N / \xi_0^2, \quad k_\tau \sim (d_S/d_N) \tau \Delta. \quad (109)$$

Этот предел также подразумевает доминирование d -поправок, и оценка (108) снова справедлива.

Таким образом, если $d_N/d_S \ll 1$ или $d_N/d_S \gg 1$, сопротивление границы существенно не влияет на СДЭ до тех пор, пока не достигается $\tau \Delta \sim 1$. При больших сопротивлениях границы индуцированная сверхпроводимость в N-слое подавляется, что ослабляет СДЭ.

На основе этих оценок ожидается аналогичное поведение для умеренно толстых бислоев, $d_S, d_N \gtrsim \xi_0$. Вклад τ -поправок тогда, как ожидается, будет ещё более сильно подавлен, и СДЭ будет в основном определяться d -поправками. Следовательно, влияние сопротивления границы остаётся пренебрежимо малым до тех пор, пока $\tau \Delta \sim 1$, после чего оно начинает уменьшать СДЭ. В режиме сильного сопротивления границы, $\tau \Delta \gg 1$, d -поправки по-прежнему доминируют, так что СДЭ убывает как $\eta \sim \tilde{\eta} \sim (\tau \Delta)^{-1}$, как обсуждалось в 3.1.2.

5.2 Высокая и низкая проводимость

Теперь исследуем случай умеренно толстого образца, $d_S \sim d_N \gtrsim \xi_0$, сначала введя дополнительное предположение о проводимостях слоёв: $\sigma_N/\sigma_S \ll 1$. Это предел так называемых жёстких граничных условий, в котором производная $\partial_x \theta_S(0)$ мала [см. (8)]. Это означает, что θ_S остаётся почти постоянным поперёк S-слоя. С другой стороны, сверхтекучая плотность в N-слое подавлена, $n_N \propto \sigma_N$, отсюда $n_N \ll n_S$. Параметры неоднородности тогда можно оценить как

$$k_d \sim \sigma_N/\sigma_S, \quad k_\tau \sim \tau \Delta \sigma_N/\sigma_S. \quad (110)$$

Аналогично, в противоположном случае, $\sigma_N/\sigma_S \gg 1$, получаем

$$k_d \sim \sigma_S/\sigma_N, \quad k_\tau \sim \tau \Delta \sigma_S/\sigma_N. \quad (111)$$

В обоих случаях из-за доминирования d -поправок снова применима оценка (108).

6 Подведение итогов

В данной работе проанализирован сверхпроводящий диодный эффект (СДЭ) в SN-бислое в предельных случаях, допускающих аналитическое решение: случай слабо неидеальной границы с тонкими слоями [см. условия применимости в (62) и (65)] и случай сильно резистивной границы с тонкими и умеренно толстыми слоями [см. условия применимости в (79) и (80)]. СДЭ в этой системе имеет чисто орбитальную природу (обусловлен орбитальным влиянием параллельного магнитного поля без зеемановского эффекта) и становится возможным благодаря пространственно неоднородному сверхпроводящему эффекту близости [20].

Рассмотрены предельные случаи слабо неидеальной границы, $\tau \Delta \ll 1$ (раздел 2), и сильно резистивной границы, $\tau \Delta \gg 1$ (раздел 3); в каждом случае уравнения сводятся к эффективной теории Абрикосова–Горькова (АГ) в главном порядке [см. (39) и (69) соответственно, которые соответствуют однородному решению внутри каждого слоя]. В слабо неидеальном случае бислой ведёт себя как единый слой с эффективными параметрами. В сильно резистивном случае сверхпроводимость в N-слое подавлена, и бислой ведёт себя как единый S-слой. Роль паразитирующего параметра в теории АГ в каждом пределе играет параметр Γ [см. (40)] или E_S [см. (70)] соответственно, которые являются квадратичными функциями импульса q_{cm} и магнитного поля B . По-

сколькx в главном порядке СДЭ отсутствует, рассмотрены поправки на неоднородность к решению главного порядка.

Для количественной оценки силы СДЭ используются две метрики: диодная эффективность η [см. (14)] и абсолютная диодная асимметрия $\tilde{\eta}$ [см. (15)]. Эти две величины ведут себя по-разному в зависимости от магнитного поля (см. рис. 4, 5 и 9). Абсолютная диодная асимметрия $\tilde{\eta}$ обращается в нуль, когда поле приближается к критическому значению сверхпроводящего фазового перехода, $\tilde{\eta}(B \rightarrow B_c) \rightarrow 0$, потому что сами критические токи обращаются в нуль. Напротив, диодная эффективность η достигает своего максимума, $\eta(B \rightarrow B_c) = 1$, потому что один из критических токов обращается в нуль при меньшем значении магнитного поля $B_0 < B_c$. В то же время при малых полях ($B \ll B_c$) обе метрики ведут себя сходным образом, линейно возрастая с полем: $\eta(B \ll B_c) \approx \tilde{\eta}(B \ll B_c) \propto B$. Следовательно, диодная эффективность η монотонно возрастает с магнитным полем, достигая 1 при B_0 , тогда как абсолютная диодная асимметрия $\tilde{\eta}$ ведёт себя немонотонно, проявляя максимум при промежуточном поле и обращаясь в нуль при критическом поле.

В то же время η и $\tilde{\eta}$ одинаково зависят от сопротивления границы $\tau\Delta \propto r_B$. Поэтому зависимость «силы» СДЭ от сопротивления границы может быть охарактеризована любой из этих величин. На рис. 11 и 12 изображённая «сила» должна интерпретироваться как характерное значение одной из этих величин при поле $B \sim B_c$, но не вблизи фазового перехода [например, можно рассмотреть значение η или $\tilde{\eta}$ при $B_{\tilde{\eta},\max}$ или $B_c/2$].

В случае тонкого бислоя, $d \ll \xi_0$, реализуются два режима в зависимости от сопротивления границы. В результате, в то время как умеренное сопротивление границы подавляет эффект близости, оно может усилить СДЭ (по сравнению с пределом идеальной границы).

В режиме слабо неидеальной границы, $\tau\Delta \ll 1$ (см. раздел 2), функции Грина почти однородны по всему бислою. СДЭ в этом случае возникает из двух типов поправок, связанных с неоднородностями: d - и τ -поправок, обсуждавшихся в 2.2 и 2.3 соответственно. Сила СДЭ контролируется параметром неоднородности $k = k_d + k_\tau$. В этом режиме $\eta \sim \tilde{\eta} \sim k$ и увеличиваются монотонно. Для идеальной границы эффект определяется d -поправкой: $k_d \sim d^2/\xi_0^2$ [см. (53)]. При увеличении сопротивления границы возникает монотонно возрастающий τ -вклад, масштабирующийся как $k_\tau \propto \tau\Delta$ [см. (59)].

В режиме сильно резистивной границы, $\tau\Delta \gg 1$ (см. раздел 3), сверхпроводимость почти подавлена в N-слое, будучи почти однородной в S-слое. СДЭ тогда определяется

двумя вкладами: τ -поправкой в N-слое и d -поправкой в S-слое [см. (75) и (76)]. Для относительно низкого сопротивления, удовлетворяющего $\tau\Delta \ll \xi_S^2/d_S^2$, доминирующий вклад даёт сверхтекучая плотность в N-слое $\delta n_{N,\tau}$, что приводит к $\eta \sim \tilde{\eta} \sim \delta n_{N,\tau} \sim (\tau_N\Delta)^{-2}$. В случае очень высокого сопротивления, $\tau\Delta \gg \xi_S^2/d_S^2$, СДЭ возникает из d -поправок в S-слое, $\delta n_{S,d}$, что даёт $\eta \sim \tilde{\eta} \sim \delta n_{S,d} \sim (\tau_S\Delta)^{-1} d_S^2/\xi_S^2$. Следовательно, сила СДЭ монотонно убывает в сильно резистивном режиме.

Для тонких слоёв, $d \ll \xi_0$, СДЭ, таким образом, демонстрирует немонотонную зависимость от сопротивления границы, с максимумом при сопротивлении, соответствующем $\tau\Delta \sim 1$. Это немонотонное поведение ярко выражено в режиме, где доминируют τ -поправки, а именно когда $d^2/\xi_0^2 \ll \tau\Delta \ll \xi_S^2/d_S^2$, режим, который существует только в пределе тонких слоёв. С одной стороны, граница с конечным сопротивлением разделяет слои и усиливает неоднородность плотности, тем самым усиливая СДЭ. С другой стороны, она подавляет сверхпроводимость в N-слое, делая систему ближе к пределу изолированного S-слоя (без СДЭ). Конкуренция между этими механизмами порождает немонотонное поведение (см. рис. 11).

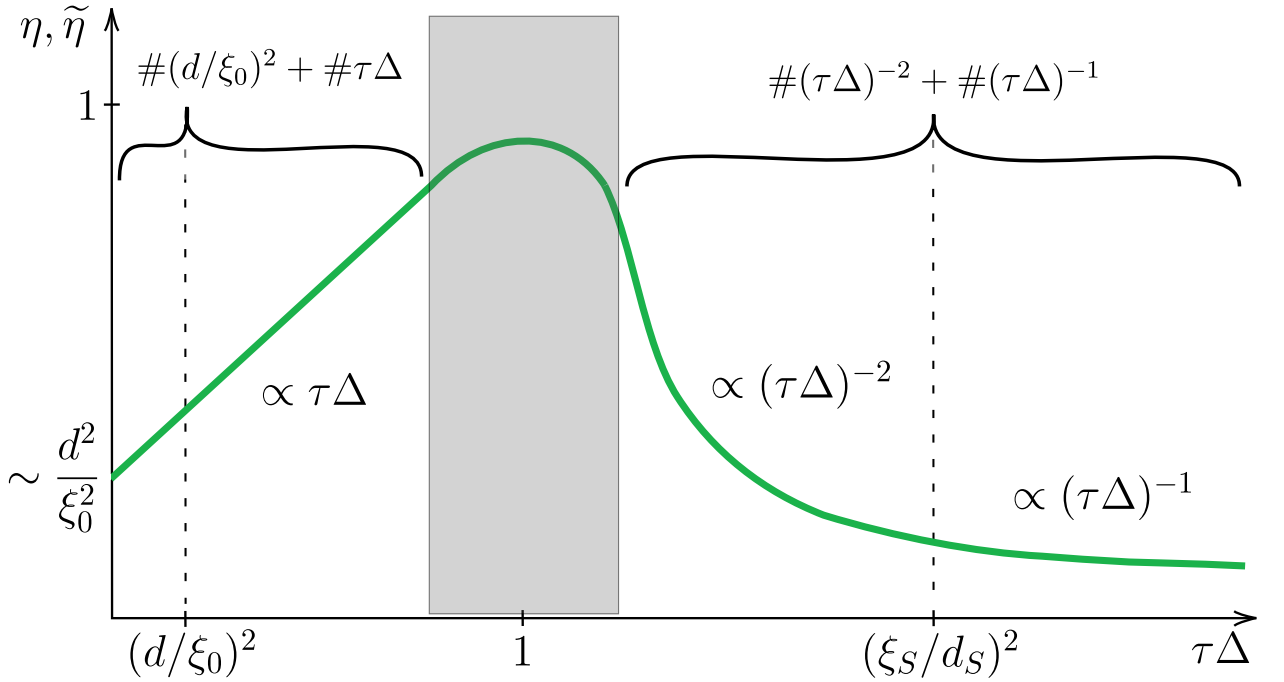


Рис. 11: Характерное значение (см. текст) диодной эффективности η или абсолютной диодной асимметрии $\tilde{\eta}$ в зависимости от нормированного сопротивления границы $\tau\Delta$ для тонкого бислоя ($d \ll \xi_0$). Заштрихованная область не поддаётся аналитическому описанию.

В то же время в случае умеренно толстого бислоя, $d \gtrsim \xi_0$, специфический режим немонотонности исчезает. Соответствующий рис. 12 может быть получен из рис. 11 «сжатием» области между двумя вертикальными пунктирными линиями (поскольку d

становится порядка ξ_0 и ξ_S). В режиме больших сопротивлений границы (определяемом условием $\tau\Delta \gg d^2/\xi_0^2$) поведение системы неотлично от соответствующего режима предела тонкого бислоя, снова приводя к $\eta \sim \tilde{\eta} \sim (\tau_S\Delta)^{-1}d_S^2/\xi_S^2$. В то же время в режиме малого сопротивления границы, $\tau\Delta \ll d^2/\xi_0^2$, СДЭ приблизительно постоянен как функция сопротивления границы, $\eta, \tilde{\eta} = \text{const}_\tau$.

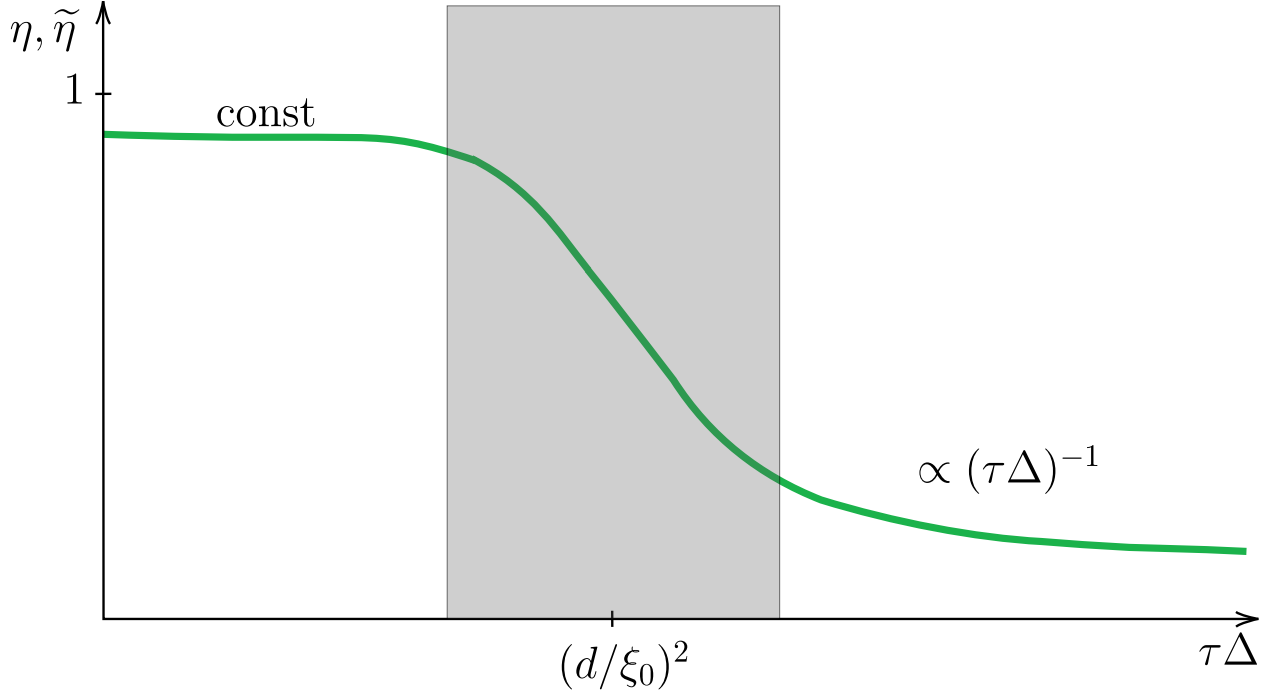


Рис. 12: Характерное значение (см. текст) диодной эффективности η или абсолютной диодной асимметрии $\tilde{\eta}$ в зависимости от нормированного сопротивления границы $\tau\Delta$ для умеренно толстого бислоя ($d \gtrsim \xi_0$). Заштрихованная область не поддаётся аналитическому описанию.

СДЭ также охарактеризован в терминах кинетической индуктивности L_k в предельных случаях нулевой температуры (4.1) и окрестности фазового перехода (4.2). СДЭ проявляется как несимметрично зависящая от тока кинетическая индуктивность, $L_k(I) \neq L_k(-I)$ (см. рис. 6 и 10). Зависимости $L_k(I, B)$ качественно сходны в обоих случаях.

Экспериментально выраженный СДЭ с относительно большими токами может наблюдаться в умеренно толстых бислоях с идеальными границами. В то же время в тонких бислоях наибольший СДЭ реализуется при конечных значениях сопротивления границы.

7 Заключение

Изучен сверхпроводниковый диодный эффект (СДЭ) в диффузном бислое сверхпроводник–нормальный металл (SN), находящемся в магнитном поле, приложенном в плоскости

слоёв. Сверхток течёт вдоль слоёв, перпендикулярно направлению поля. СДЭ, проявляющийся как асимметрия критических (распаривающих) токов и кинетической индуктивности для противоположных направлений тока, возникает за счёт орбитального механизма: неоднородного распределения мейснеровских токов, вызванного пространственно неоднородной сверхтекучей плотностью. Левичев с соавторами [20] показали реализацию этого эффекта в такой структуре, сопоставив численные расчёты для идеальной границы с экспериментом.

В данной работе исследуется влияние неидеальной границы с конечным сопротивлением на СДЭ. В рамках аналитического подхода основное внимание уделяется предельным случаям, соответствующим слабым внутрислойным неоднородностям. Показано, что при толщине бислоя, малой по сравнению с длиной когерентности, сила СДЭ немонотонно зависит от сопротивления границы. В частности, неидеальная граница может усиливать СДЭ по сравнению со случаем идеальной границы.

А Кинетическая индуктивность

В этом приложении мы выводим (16) для кинетической индуктивности L_k и обсуждаем её связь с экспериментом. В общем случае рассмотрим произвольную тонкую полоску толщиной $d \ll \lambda$ и шириной w , ограниченную областью $0 < x < d$, свойства которой могут быть неоднородны по толщине (например, слоистая структура со сверхпроводящими и нормальными слоями). Пусть $n_x(q)$ обозначает плотность сверхпроводящих электронов в координате x с импульсом q . Кинетическая индуктивность в неоднородных системах с фиксированным пространственным распределением n_x (отражающим внутренние свойства слоистых материалов) изучалась в ряде работ, см., например, [35, 36].

Однако, следуя работе [20], мы хотим учесть нелинейность, подразумевающую, что $n_x(q)$ зависит от импульса (т. е. от токов, текущих в структуре). В присутствии магнитного поля n_x в каждой координате зависит от своего собственного импульса $q_s(x)$. В случае тонкого слоя этот профиль импульса задаётся (6) с некоторым q_0 , определяемым из условия фиксированного полного тока:

$$I(q_0) = -\frac{ew}{2m} \int_0^d n_x(q_s(x)) q_s(x) dx. \quad (112)$$

А.1 Вывод

Кинетическая индуктивность определяется через связь между кинетической энергией на единицу длины и полным током. В простейшем линейном случае и в отсутствие

магнитного поля это соотношение принимает вид:

$$E_k = L_k I^2 / 2. \quad (113)$$

Линейность здесь подразумевает, что плотность не зависит от тока или импульса, т. е. $n_x = \text{const}_q$, что приводит к не зависящей от тока индуктивности $L_k = \text{const}_I$. В общем нелинейном случае (113) следует обобщить как

$$E_k(I) = \int_0^I L_k(I) I dI. \quad (114)$$

Чтобы получить кинетическую индуктивность из (114), выразим кинетическую энергию через импульсы куперовских пар с массой $2m$ и плотностью $n_x/2$. Для заданной координаты x изменение локального импульса на dq даёт приращение энергии $n_x(q) q dq / 4m$. Здесь мы явно допускаем, что число сверхпроводящих электронов зависит от самого импульса. Интегрируя по импульсам и координатам, получаем полную кинетическую энергию всего слоя:

$$E_k^{\text{tot}}(q_0) = \frac{w}{4m} \int_0^d dx \int_0^{q_0 - 2eBx} n_x(q) q dq. \quad (115)$$

Эта энергия содержит два вклада: от транспортного тока I и от «вихревых» токов, генерируемых магнитным полем B .

Во-первых, если мы приложим магнитное поле B даже в отсутствие транспортного тока I , генерируются «вихревые» токи, которые неоднородны по толщине полосы. Они соответствуют магнитной части полной кинетической энергии:

$$E_k^B = E_k^{\text{tot}}(q_{00}). \quad (116)$$

Здесь импульс q_{00} соответствует состоянию с нулевым транспортным током, $I(q_{00}) = 0$.

Если теперь мы включим транспортный ток I , магнитная часть кинетической энергии, (116), не изменяется. В то же время мы получаем дополнительный вклад энергии

$$E_k(q_0) = E_k^{\text{tot}}(q_0) - E_k^B = \frac{w}{4m} \int_0^d dx \int_{q_{00} - 2eBx}^{q_0 - 2eBx} n_x(q) q dq. \quad (117)$$

Это транспортно-токовая часть полной кинетической энергии, которая связана с кинетической индуктивностью и эквивалентна (114). (117) и (112) таким образом парамет-

рически определяют функцию $E_k(I)$ в (114).

Дифференцируя (117) по q_0 , получаем тот же интеграл, что и в (112):

$$\frac{dE_k(q_0)}{dq_0} = \frac{w}{4m} \int_0^d n_x(q_s(x)) q_s(x) dx = -\frac{1}{2e} I(q_0). \quad (118)$$

Интегрируя это соотношение обратно, можно записать

$$E_k(q_0) = -\frac{1}{2e} \int_{q_0}^{q_0} I(q_0) dq_0 = -\frac{1}{2e} \int_0^I I \frac{dq_0}{dI} dI. \quad (119)$$

Сравнивая это с (114), окончательно получаем (16).

Хотя $q_0 = q_s(0)$ определён как импульс в конкретной реперной точке $x = 0$, конечный результат в (16) не зависит от этого выбора. Мы можем фактически заменить q_0 в (16) на произвольное $Q = q_s(x')$ в любой фиксированной точке x' без изменения выражения [заметим, что $dQ = dq_0$ согласно (6)]. В то же время, хотя физически прозрачный, импульс центра масс q_{cm} не подходит для этой подстановки, потому что центр масс сверхпроводящего конденсата не является фиксированной точкой, $x_{\text{cm}} \neq \text{const}_{I,B}$.

A.2 Связь с экспериментом

Мы можем переписать (114) для кинетической энергии как работу по ускорению сверхпроводящих электронов с мощностью $I\mathcal{E}$ за время t :

$$E_k = \int_0^t I \mathcal{E} dt, \quad \mathcal{E} = L_k \frac{dI}{dt}. \quad (120)$$

Здесь $\mathcal{E}$ – электрическое поле (напряжение на единицу длины), которое ускоряет электроны. Связь между $\mathcal{E}$ и I соответствует кинетическому вкладу в импеданс $Z_k = -i\omega L_k$ на частоте ω . Кинетический вклад вместе с вкладом $Z_g = -i\omega L_g$ от геометрической индуктивности L_g составляет полный импеданс $Z = Z_k + Z_g$, который может быть измерен экспериментально [20].

В Теория Абрикосова–Горькова (АГ)

Предельные случаи, рассмотренные в разделах 2 и 3, в нулевом порядке свелись к эффективной теории АГ в каждом случае [см. (39) и (69) соответственно] с эффективным параметром порядка E_g и Δ и с паразитирующим параметром Γ и E_S соответственно. Теория АГ допускает аналитическое описание при нулевой температуре или в окрестности фазового перехода [34, 37]. В этом приложении мы представляем ана-

литические результаты для эффективного параметра порядка и средней сверхтекучей плотности как функций паразарушающего параметра в этих двух пределах.

Для определённости наши обозначения будут соответствовать пределу $\tau \rightarrow 0$ из раздела 2. Результаты в пределе $\tau \rightarrow \infty$ из раздела 3 могут быть получены формальной заменой $\Gamma \mapsto E_S$, $E_g \mapsto \Delta$, $d_{\text{eff}} \mapsto d_S$ и $T_{c0} \mapsto T_{cS}$.

В.1 Эффективное уравнение самосогласования

Рассмотрение в разделе 2, приведшее к (39), должно быть дополнено обсуждением уравнения самосогласования. Его эффективная форма может быть получена из (9) с однородными $\theta_S(x) = \theta$ и $\Delta(x) = \Delta$. В терминах эффективного параметра порядка E_g [см. (40)] эффективное уравнение самосогласования может быть записано как

$$E_g \ln \frac{T}{T_{c0}} = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left(\sin \theta(\omega_n) - \frac{E_g}{\omega_n} \right). \quad (121)$$

Здесь T_{c0} – критическая температура бислоя в целом в отсутствие тока и магнитного поля ($\Gamma = 0$). Она связана с эффективным параметром порядка стандартным БКШ-соотношением

$$T_{c0} = (e^\gamma/\pi)E_{g0}, \quad (122)$$

где $E_{g0} = E_g(\Gamma = 0, T = 0)$ – параметр порядка при нулевой температуре в отсутствие тока и магнитного поля.

Таким образом, задача сводится к решению (39) вместе с (121). Это можно сделать аналитически при нулевой температуре (см. В.3) или вблизи фазового перехода, $E_g \rightarrow 0$ (см. В.4).

В.2 Критический паразарушающий параметр

(39) справедливо для паразарушающего параметра, меньшего критического значения $\Gamma_c(T)$. При критическом значении происходит фазовый переход и сверхпроводимость исчезает: $\theta(\Gamma \rightarrow \Gamma_c) \rightarrow 0$ и $E_g(\Gamma \rightarrow \Gamma_c) \rightarrow 0$. В этом пределе (121) даёт следующее уравнение для критического паразарушающего параметра:

$$\ln \frac{T_{c0}}{T} = \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_c(T)}{2\pi T} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right). \quad (123)$$

Здесь ψ обозначает дигамма-функцию.

В пределах нулевой температуры ($T = 0$) и вблизи критической температуры (T_{c0} –

$T \ll T_{c0}$) получаем

$$\Gamma_c(T) = \begin{cases} E_{g0}/2, & T = 0, \\ 4(T_{c0} - T)/\pi, & T \rightarrow T_{c0}. \end{cases} \quad (124)$$

В.3 Предел нулевой температуры

При нулевой температуре мы можем заменить сумму в (121) на интеграл и вычислить его явно. Получаем зависимость эффективного параметра порядка от паразитирующего параметра, $E_g(\Gamma)$, определяемую следующим уравнением:

$$\ln(E_g/E_{g0}) + f(\Gamma/E_g) = 0, \quad (125)$$

с функцией f , определённой как

$$f(z) = \begin{cases} \pi z/4, & z < 1, \\ z + \frac{z}{2} \arcsin \frac{1}{z} - \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2z}, & z > 1. \end{cases} \quad (126)$$

Точка $E_g(\Gamma) = \Gamma = e^{-\pi/4} E_{g0}$ (т. е. $z = 1$), где поведение $E_g(\Gamma)$ меняется качественно, соответствует переходу в бесщелевой режим.

Мы также получаем среднюю сверхтекучую плотность $\bar{n}^{(0)}$ путём аналогичного приведения суммы в (26) к интегралу. В результате имеем

$$\frac{\bar{n}^{(0)}(\Gamma)}{\bar{n}_0^{(0)}} = \frac{E_g(\Gamma)}{E_{g0}} g\left(\frac{\Gamma}{E_g(\Gamma)}\right), \quad (127)$$

с функцией g , определённой как

$$g(z) = \begin{cases} 1 - 4z/3\pi, & z < 1, \\ \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{1}{z} - \frac{z}{3} \left[2 - \left(2 + \frac{1}{z^2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} \right] \right\}, & z > 1. \end{cases} \quad (128)$$

В.4 Окрестность фазового перехода

В окрестности фазового перехода ($\theta \rightarrow 0$, $E_g \rightarrow 0$) мы можем найти явную функцию $\theta(\omega_n > 0)$ из (39) и решить уравнение самосогласования (121):

$$\theta(\omega_n) \approx \frac{E_g}{\Gamma + \omega_n} - \frac{E_g^3 \omega_n}{2(\Gamma + \omega_n)^4}, \quad (129)$$

$$E_g^2(T, \Gamma) = \tilde{E}_g^2(T) (1 - \Gamma/\Gamma_c(T)). \quad (130)$$

Здесь зависящий от температуры предфактор задаётся выражением

$$\tilde{E}_g^2(T) = T\Gamma_c(T)\Xi\left(\frac{\Gamma_c(T)}{2\pi T}\right), \quad (131)$$

где Ξ обозначает следующую положительно определённую функцию [$\Xi(x) > 0$]:

$$\Xi(x) = -\frac{24\pi\psi'(1/2+x)}{3\psi''(1/2+x) + x\psi'''(1/2+x)}. \quad (132)$$

В предельных случаях нулевой температуры ($T = 0$) и вблизи критической температуры ($T_{c0} - T \ll T_{c0}$) эффективный параметр порядка ведёт себя следующим образом:

$$E_g^2 = \begin{cases} 6E_{g0}(\Gamma_c(0) - \Gamma), & T = 0, \\ \frac{2\pi^3 T_{c0}}{7\zeta(3)}(\Gamma_c(T) - \Gamma), & T \rightarrow T_{c0}. \end{cases} \quad (133)$$

Критический паразарушающий параметр $\Gamma_c(T)$, входящий в эти уравнения, в тех же предельных случаях был найден в (124).

(130) позволяет переписать условие $E_{g0} \ll E_g$ (окрестность фазового перехода) в терминах близости паразарушающего параметра к критическому значению:

$$\Gamma_c(T) - \Gamma \ll E_{g0}. \quad (134)$$

Это условие может быть выполнено не только в очевидном пределе $\Gamma \rightarrow \Gamma_c$, но и в пределе $T \rightarrow T_{c0}$, в котором $\Gamma_c(T) \ll E_{g0}$ и Γ может принимать произвольные значения между 0 и $\Gamma_c(T)$.

Наконец, используем (130) для получения сверхтекучей плотности:

$$\bar{n}^{(0)}(T, \Gamma) = \tilde{n}(T) (1 - \Gamma/\Gamma_c(T)), \quad (135)$$

с зависящим от температуры предфактором

$$\frac{\tilde{n}(T)}{\tilde{n}_0^{(0)}} = \frac{\tilde{E}_g^2(T)}{2\pi^2 T E_{g0}} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_c(T)}{2\pi T} \right). \quad (136)$$

Список литературы

- [1] Kulik, I. O. Josephson Effect In Superconducting Tunneling Structures / I. O. Kulik, I. K. Yanson. — New York: John Wiley & Sons, 1972.
- [2] Barone, A. Physics and Applications of the Josephson Effect / A. Barone, G. Paterno. — New York: Wiley, 1982.
- [3] Moll, P. J. W. Evolution of superconducting diodes / P. J. W. Moll, V. B. Geshkenbein // Nat. Phys. — 2023. — Vol. 19, no. 10. — Pp. 1379–1380. <https://doi.org/10.1038/s41567-023-02229-7>.
- [4] Levitov, L. S. Magnetostatics of superconductors without an inversion center / L. S. Levitov, Yu. V. Nazarov, G. M. Eliashberg // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1985. — Vol. 41. — P. 365. — [JETP Lett. 41, 445 (1985)]. http://jetpletters.ru/ps/1467/article_22366.shtml.
- [5] Edelstein, Victor M. The Ginzburg–Landau equation for superconductors of polar symmetry / Victor M. Edelstein // J. Phys.: Condens. Matter. — 1996. — jan. — Vol. 8, no. 3. — P. 339. <https://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/8/3/012>.
- [6] Krasnov, V. M. Fluxon dynamics in long Josephson junctions in the presence of a temperature gradient or spatial nonuniformity / V. M. Krasnov, V. A. Oboznov, N. F. Pedersen // Phys. Rev. B. — 1997. — Jun. — Vol. 55. — Pp. 14486–14498. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.55.14486>.
- [7] Quantum Ratchet Effect for Vortices / J. B. Majer, J. Peguiron, M. Grifoni et al. // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Feb. — Vol. 90. — P. 056802. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.056802>.
- [8] A Superconducting Reversible Rectifier That Controls the Motion of Magnetic Flux Quanta / J. E. Villegas, Sergey Savel'ev, Franco Nori et al. // Science. — 2003. — Vol. 302, no. 5648. — Pp. 1188–1191. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1090390>.

-
- [9] Considerable enhancement of the critical current in a superconducting film by a magnetized magnetic strip / D. Y. Vodolazov, B. A. Gribkov, S. A. Gusev et al. // Phys. Rev. B. — 2005. — Aug. — Vol. 72. — P. 064509. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.064509>.
- [10] Controlled multiple reversals of a ratchet effect / Clécio C. de Souza Silva, Joris Van de Vondel, Mathieu Morelle, Victor V. Moshchalkov // Nature. — 2006. — Vol. 440. — Pp. 651–654.
- [11] Morelle, M. Enhanced critical currents through field compensation with magnetic strips / M. Morelle, V. V. Moshchalkov // Appl. Phys. Lett. — 2006. — Vol. 88, no. 17. — P. 172507. <https://doi.org/10.1063/1.2199468>.
- [12] Reverse-domain superconductivity in superconductor-ferromagnet hybrids: Effect of a vortex-free channel on the symmetry of I - V characteristics / A. Yu. Aladyshkin, D. Yu. Vodolazov, J. Fritzsche et al. // Appl. Phys. Lett. — 2010. — 08. — Vol. 97, no. 5. — P. 052501. <https://doi.org/10.1063/1.3474622>.
- [13] The diode effect induced by domain-wall superconductivity / M. A. Silaev, A. Yu. Aladyshkin, M. V. Silaeva, A. S. Aladyshkina // J. Phys.: Condens. Matter. — 2014. — Vol. 26, no. 9. — P. 095702. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/26/9/095702>.
- [14] Yokoyama, Tomohiro. Anomalous Josephson effect induced by spin-orbit interaction and Zeeman effect in semiconductor nanowires / Tomohiro Yokoyama, Mikio Eto, Yuli V. Nazarov // Phys. Rev. B. — 2014. — May. — Vol. 89. — P. 195407. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.195407>.
- [15] Nonreciprocal charge transport in noncentrosymmetric superconductors / Ryohei Wakatsuki, Yu Saito, Shintaro Hoshino et al. // Sci. Adv. — 2017. — Vol. 3, no. 4. — P. e1602390. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.1602390>.
- [16] Asymmetric Josephson effect in inversion symmetry breaking topological materials / Chui-Zhen Chen, James Jun He, Mazhar N. Ali et al. // Phys. Rev. B. — 2018. — Aug. — Vol. 98. — P. 075430. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.075430>.
- [17] Nadeem, Muhammad. The superconducting diode effect / Muhammad Nadeem, Michael S. Fuhrer, Xiaolin Wang // Nat. Rev. Phys. — 2023. — Vol. 5, no. 10. — Pp. 558–577. <https://doi.org/10.1038/s42254-023-00632-w>.

-
- [18] Nagaosa, Naoto. Nonreciprocal Transport and Optical Phenomena in Quantum Materials / Naoto Nagaosa, Youichi Yanase // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. — 2024. — Vol. 15. — Pp. 63–83.
- [19] Shaffer, Daniel. Theories of Superconducting Diode Effects / Daniel Shaffer, Alex Levchenko // arXiv:2510.25864.
- [20] Finite momentum superconductivity in superconducting hybrids: Orbital mechanism / M. Yu. Levichev, I. Yu. Pashenkin, N. S. Gusev, D. Yu. Vodolazov // Phys. Rev. B. — 2023. — Sep. — Vol. 108. — P. 094517. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.108.094517>.
- [21] Supercurrent rectification and magnetochiral effects in symmetric Josephson junctions / Christian Baumgartner, Lorenz Fuchs, Andreas Costa et al. // Nat. Nanotechnol. — 2022. — Vol. 17. — Pp. 39–44.
- [22] Usadel, K. D. Generalized diffusion equation for superconducting alloys / K. D. Usadel // Phys. Rev. Lett. — 1970. — Vol. 25. — P. 507. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.507>.
- [23] Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity / W. Belzig, F. K. Wilhelm, C. Bruder et al. // Superlattices Microstruct. — 1999. — Vol. 25. — P. 1251. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749603699907103>.
- [24] Cooper, Leon N. Superconductivity in the Neighborhood of Metallic Contacts / Leon N. Cooper // Phys. Rev. Lett. — 1961. — Jun. — Vol. 6. — Pp. 689–690. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.6.689>.
- [25] de Gennes, P. G. Boundary Effects in Superconductors / P. G. de Gennes // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Jan. — Vol. 36. — Pp. 225–237. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.225>.
- [26] McMillan, W. L. Tunneling Model of the Superconducting Proximity Effect / W. L. McMillan // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 175. — P. 537. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.175.537>.
- [27] Golubov, A. A. Josephson effect in SNINS and SNIS tunnel structures with finite transparency of the SN boundaries / A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov // Zh. Eksp.

-
- Teor. Fiz. — 1989. — Vol. 96. — P. 1420. — [Sov. Phys. JETP 69, 805 (1989)].
<http://jetp.ras.ru/cgi-bin/e/index/r/96/4/p1420?a=list>.
- [28] Golubov, A. A. Proximity effect in dirty N/S multilayers / A. A. Golubov // Superconducting Superlattices and Multilayers / Ed. by Ivan Bozovic. — Vol. 2157. — SPIE, 1994. — Pp. 353–362. <https://doi.org/10.1117/12.179172>.
- [29] Fominov, Ya. V. Superconductive properties of thin dirty superconductor–normal-metal bilayers / Ya. V. Fominov, M. V. Feigel'man // Phys. Rev. B. — 2001. — Feb. — Vol. 63. — P. 094518. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.63.094518>.
- [30] Larkin, A. I. Vortex Motion in Superconductors / A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov // Nonequilibrium Superconductivity / Ed. by D. N. Langenberg, A. I. Larkin. — New York: Elsevier, 1986. — P. 530.
- [31] Zaikin, A. D. Theory of wide dirty SNS junctions / A. D. Zaikin, G. F. Zharkov // Fiz. Nizk. Temp. — 1981. — Vol. 7. — Pp. 375–378. — [Sov. J. Low Temp. Phys. 7, 184 (1981)].
- [32] Kuprianov, M. Yu. Influence of boundary transparency on the critical current of “dirty” SS'S structures / M. Yu. Kuprianov, V. F. Lukichev // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1988. — Vol. 94. — P. 139. — [Sov. Phys. JETP 67, 1163 (1988)]. <http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/e/index/r/94/6/p139?a=list>.
- [33] Fominov, Ya. V. Nonmonotonic critical temperature in superconductor/ferromagnet bilayers / Ya. V. Fominov, N. M. Chtchelkatchev, A. A. Golubov // Phys. Rev. B. — 2002. — Vol. 66. — P. 014507.
- [34] Abrikosov, A. A. Contribution to the theory of superconducting alloys with paramagnetic impurities / A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1960. — Vol. 39. — P. 1781. — [Sov. Phys. JETP 12, 1243 (1961)].
- [35] Observation of the superconducting proximity effect from kinetic-inductance measurements / J. H. Claassen, J. E. Evetts, R. E. Somekh, Z. H. Barber // Phys. Rev. B. — 1991. — Nov. — Vol. 44. — Pp. 9605–9608.
- [36] Magnetic Control of the Kinetic Inductance in Elements of Superconducting Electronics / A. A. Neilo, S. V. Bakurskiy, N. V. Klenov et al. // JETP Lett. — 2025. — Nov. — Vol. 121. — Pp. 58–66.

[37] Maki, K. Gapless Superconductivity / K. Maki // Superconductivity / Ed. by R. D. Parks. — New York: Marcel Dekker, 1969. — Vol. 2.