

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ПРОБЛЕМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Плазмоны и их затухание в грязных сверхпроводящих
пленках**

(Дипломная работа магистра)

Выполнил: Даниил Карузин Константинович

Научный руководитель: Михаил Андреевич Скворцов

г. Долгопрудный

2026

Аннотация

В работе построена микроскопическая теория плазмонных возбуждений в грязных сверхпроводниках во всём интервале температур ниже критической температуры T_c . Исходя из формализма Келдышевской нелинейной сигма-модели для диффузного сверхпроводника, получены уравнения движения для электрического потенциала и фазы параметра порядка. В длинноволновом пределе задача сведена к нелинейному спектральному уравнению, связывающему комплексную дисперсию плазмона $\omega(q)$ с оптической проводимостью Маттиса–Бардина $\sigma(\omega, T)$. Показано, что корректное решение этого уравнения требует аналитического продолжения проводимости в нижнюю полуплоскость комплексной частоты. Такое продолжение приводит к качественно новому результату: при переходе через T_c действительная и мнимая части плазмонной дисперсии испытывают скачок. Для любой температуры $T < T_c$ спектр имеет точку окончания $q_c(T)$, в которой затухание исчезает, а частота слабо зависит от температуры и остаётся порядка $2\Delta(0)$. Получены аналитические предельные выражения при $T = 0$, при низких температурах и вблизи T_c , а также обсуждена связь плазмонной ветви с модой Карлсона–Голдмана. Результаты важны для описания современных сильно неупорядоченных сверхпроводящих плёнок, используемых в нанопроводниковых однофотонных детекторах и устройствах на квантовых фазовых проскоках.

Оглавление

Аннотация	2
Введение	4
1 Коллективные моды и постановка задачи	7
1.1 Коллективные возбуждения в сверхпроводниках	7
1.2 Нормальный грязный металл	7
1.3 Формулировка спектральной задачи	11
2 Келдышевская сигма-модель и спектральное уравнение	12
2.1 Микроскопический вывод спектрального уравнения	12
2.1.1 Действие нелинейной сигма-модели в формализме Келдыша . . .	12
2.1.2 Сверхпроводящее седло	13
2.1.3 Параметризация диффузионных мод	14
2.1.4 Бозонные вершины: потенциал и фаза	15
2.1.5 Происхождение структуры π_{ij}^R	16
2.1.6 Эффективное действие для потенциала и фазы	17
2.2 Спектральное уравнение для плазмона	18
2.3 Проводимость Маттиса–Бардина	19
2.4 Аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость	19
3 Дисперсия и затухание плазмонов	22
3.1 Нулевая температура	22
3.2 Затухание при низких температурах	23
3.3 Окрестность критической температуры	24
3.3.1 Скачок дисперсии при T_c	24
3.3.2 Режим слабого нормального затухания	26
3.3.3 Мода Карлсона–Голдмана	27
3.4 Произвольные температуры	29
4 Обсуждение результатов	34
Заключение	35

Введение

Коллективные возбуждения в сверхпроводниках являются одним из центральных объектов современной физики конденсированного состояния и на протяжении многих десятилетий исследуются как теоретически, так и экспериментально [1–13]. Они возникают из совместной динамики квазичастиц, электромагнитного поля и комплексного параметра порядка. В отличие от одночастичных возбуждений, коллективные моды несут информацию не только о спектре Боголюбова, но и о законах сохранения, кулоновском взаимодействии, кинетике неравновесных квазичастиц и степени беспорядка. Поэтому исследование таких мод важно как для фундаментального понимания сверхпроводимости, так и для описания реальных сверхпроводящих устройств.

Особый интерес представляют низкоразмерные грязные сверхпроводники. Именно сильный беспорядок характерен для многих материалов, используемых в современных сверхпроводящих наноустройствах, в частности в сверхпроводящих нанопроводниковых однофотонных детекторах и устройствах на квантовых фазовых проскоках [20–22, 28, 29]: нитрида ниобия, нитрида титана, гранулированных плёнок и родственных соединений. В этих системах длина свободного пробега мала, нормальная электронная динамика становится диффузионной, а кулоновские и сверхпроводящие эффекты оказываются тесно переплетены. При этом нормальный грязный металл не поддерживает хорошо определённых плазмонных колебаний: вместо осциллирующей моды возникает чисто релаксационный полюс

$$\omega(q) = -i\gamma_n(q), \quad \gamma_n(q) = 2\nu Dq^2 V_0(q). \quad (1)$$

Здесь $\omega(q)$ — комплексная частота коллективной моды, q — модуль волнового вектора, $\gamma_n(q)$ — скорость релаксации зарядовой неоднородности в нормальном металле, ν — плотность состояний на уровне Ферми на одну проекцию спина, D — коэффициент диффузии, а $V_0(q)$ — голый кулоновский потенциал. Возникает естественный вопрос: каким образом при переходе в сверхпроводящее состояние из этой релаксационной моды формируется незатухающий плазмон, существующий при нулевой температуре?

Актуальность работы связана с тем, что ранее плазмонный спектр грязных сверхпроводников был хорошо изучен только в отдельных предельных случаях: при низких температурах и в окрестности T_c при малых частотах. Между тем в экспериментально важных сверхпроводящих плёнках требуется описание всей температурной области и всего диапазона частот вплоть до оптического порога $2\Delta(T)$. Дополнительная трудность состоит в том, что затухающий плазмон соответствует полюсу отклика в нижней полуплоскости комплексной частоты. Поэтому для нахождения дисперсии недостаточно знать стандартную проводимость на вещественной оси; необходимо выполнить её аналитическое продолжение.

Объект исследования — грязный низкоразмерный сверхпроводник в диффузионном режиме. **Предмет исследования** — спектр и затухание плазмонных возбуждений, возникающих из совместной динамики электрического потенциала и фазы сверхпроводящего параметра порядка.

Цель работы состоит в построении микроскопического описания плазмонной дисперсии в грязном сверхпроводнике во всём интервале температур ниже T_c и в выявлении качественных особенностей, связанных с аналитической структурой оптической проводимости.

Для достижения этой цели решаются следующие задачи:

1. вывести из Келдышевской нелинейной сигма-модели эффективные уравнения движения для электрического потенциала и фазы параметра порядка;
2. получить общее спектральное уравнение для коллективных мод и его длинноволновое упрощение;
3. связать спектральное уравнение с оптической проводимостью сверхпроводника;
4. выполнить аналитическое продолжение проводимости Маттиса–Бардина в нижнюю полуплоскость комплексной частоты;
5. исследовать дисперсию плазмона при $T = 0$, при низких температурах, вблизи T_c и при произвольной температуре;
6. установить физический смысл точки окончания спектра и области подавленного затухания;
7. обсудить связь плазмонной ветви с модой Карлсона–Голдмана.

Методы исследования. Основным теоретическим методом является использование Келдышевской нелинейной сигма-модели для описания неупорядоченных сверхпроводников [30, 35]. В работе также применяются функции Грина Боголюбова–де Жена, диффузионные и куперонные пропагаторы, аналитическое продолжение функций отклика, асимптотический анализ интегралов в предельных температурных областях и численное решение комплексного спектрального уравнения.

Научная значимость работы состоит в том, что получено единое описание плазмонного спектра грязного сверхпроводника при всех $T < T_c$. Центральным результатом является обнаружение скачка плазмонной дисперсии в точке сверхпроводящего перехода: ниже T_c у моды сразу появляется действительная часть частоты, а затухание скачком уменьшается относительно нормального состояния. Этот эффект не может быть найден без корректного аналитического продолжения проводимости в нижнюю полуплоскость.

Практическая значимость связана с возможностью применения результатов к сверхпроводящим нанопроволочным однофотонным детекторам и устройствам на квантовых фазовых проскоках. В таких системах распространение плазмонных импульсов

определяет высокочастотный отклик, локализацию события поглощения фотона и динамику фазовых флуктуаций.

Апробация результатов. Основные результаты работы представлены в статье “Plasmon excitations and their attenuation in dirty superconductors”, подготовленной Д. К. Карузиным и М. А. Скворцовым и принятой к печати в *Phys. Rev. B*. Материал настоящей диссертации основан на этой статье и развивает её изложение в формате выпускной квалификационной работы.

Глава 1

Коллективные моды и постановка задачи

1.1 Коллективные возбуждения в сверхпроводниках

В сверхпроводнике комплексный параметр порядка можно записать в виде

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = |\Delta(\mathbf{r}, t)|e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}. \quad (1.1)$$

Колебания модуля $|\Delta|$ соответствуют амплитудной моде Шмида–Хиггса [2], а колебания фазы φ связаны с зарядовой динамикой и потому сильно взаимодействуют с электрическим потенциалом ϕ . Именно фазово-зарядовый сектор отвечает за плазмонные возбуждения. Если постоянный сверхток отсутствует, то в линейном приближении амплитудная мода отделяется от фазовой, и плазмон можно рассматривать как связанную динамику двух бозонных полей: ϕ и φ .

Физически плазмон в сверхпроводнике можно понимать как колебание заряда, при котором кинетическая индуктивность куперовского конденсата играет роль инерционного элемента. В низкоразмерной геометрии кулоновская энергия зависит от импульса, поэтому эффективная ёмкость оказывается импульсно-зависимой. В результате при низких температурах плазмонная частота определяется резонансом распределённой LC-линии, образованной сверхпроводящей кинетической индуктивностью и кулоновской ёмкостью [7]. В сверхпроводящих нанопроводниковых однофотонных детекторах такие импульсы могут использоваться для определения координаты поглощения фотона по времени задержки [23, 24].

Существуют и другие коллективные моды. Мода Карлсона–Голдмана возникает вблизи T_c и соответствует синхронизованным осцилляциям нормального и сверхпроводящего токов, при которых накопление заряда почти подавлено [3, 5, 7, 9, 11]. Амплитудная мода Шмида–Хиггса связана с колебанием величины щели; современный интерес к ней во многом обусловлен экспериментами с ультрабыстрой терагерцовой спектроскопией [14–16]. Электромагнитное возбуждение этой моды возможно при наличии постоянного сверхтока [8, 17, 18] либо в нелинейном отклике [19]. В данной работе основное внимание уделяется именно плазмонной ветви, однако мода Карлсона–Голдмана будет рассмотрена для полноты картины.

1.2 Нормальный грязный металл

В чистой двумерной электронной системе плазмон имеет хорошо известную дисперсию, подтвержденную экспериментально в высокоподвижных гетероструктурах [25–

27],

$$\omega_p^2(q) = \frac{n_{2D} q^2 V_0(q)}{m}, \quad (1.2)$$

где n_{2D} — двумерная концентрация электронов, m — эффективная масса, а $V_0(q)$ — затравочный кулоновский потенциал. Такая формула предполагает баллистическую динамику и слабое рассеяние. В грязном металле с частотой упругого рассеяния τ^{-1} в пределе $\omega_p(q)\tau \ll 1$ инерция нормальных электронов подавлена диффузией. Переход между слабо затухающим плазмоном и чисто релаксационной модой показан на рис. 1.1.

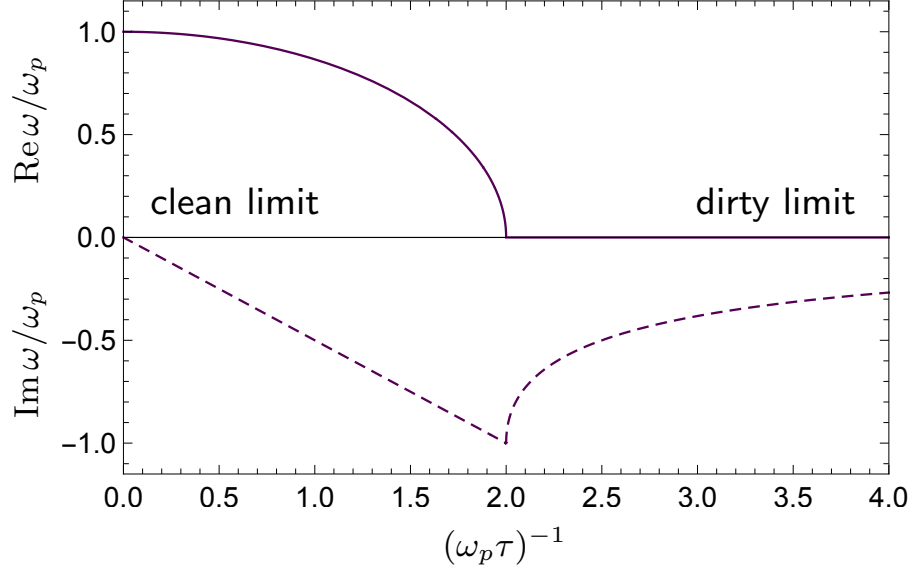


Рис. 1.1: Дисперсия плазмона в нормальном металле в области кроссовера между чистым и грязным пределами. Степень беспорядка контролируется отношением скорости релаксации импульса τ^{-1} к чистой плазменной частоте $\omega_p(q)$. В чистом пределе $\omega_p \tau \gg 1$ плазмон представляет собой слабо затухающую коллективную моду, тогда как в грязном пределе $\omega_p \tau \ll 1$ он превращается в чисто релаксационную диффузионную моду.

Рассмотрим двумерный нормальный металл с кулоновским взаимодействием $V_0(q)$ и конечным временем релаксации импульса τ . Дисперсия коллективной зарядовой моды определяется условием обращения в нуль диэлектрической функции:

$$1 + V_0(q)P(\omega, q) = 0, \quad (1.3)$$

где $P(\omega, q)$ — поляризационный оператор, то есть запаздывающая корреляционная функция плотность–плотность. Беспорядок будем моделировать гауссовым случайным потенциалом $U(\mathbf{r})$ с коррелятором

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi\nu\tau}, \quad (1.4)$$

где ν — плотность состояний на уровне Ферми на одну проекцию спина. В лестничном

приближении по примесному рассеянию поляризационный оператор принимает вид

$$\frac{P(\omega, q)}{2\nu} = 1 - i\omega\tau \left[1 - \frac{1}{B(\omega, q)} \right]^{-1}, \quad (1.5)$$

где $B(\omega, q)$ обозначает примесный лестничный блок. Для плазмонов характерны малые волновые векторы, поэтому можно использовать предел $ql \ll 1$, где l — длина свободного пробега, сохраняя при этом произвольное значение параметра $\omega\tau$. В этом пределе

$$\frac{1}{B(\omega, q)} = 1 - i\omega\tau - \frac{Dq^2}{1 - i\omega\tau}, \quad (1.6)$$

где D — коэффициент диффузии.

Подставляя выражение (1.6) в (1.5), получаем

$$1 - \frac{1}{B(\omega, q)} = i\omega\tau + \frac{Dq^2}{1 - i\omega\tau}. \quad (1.7)$$

Следовательно,

$$\frac{P(\omega, q)}{2\nu} = 1 - \frac{i\omega\tau}{i\omega\tau + Dq^2/(1 - i\omega\tau)}. \quad (1.8)$$

Приводя выражение к общему знаменателю, находим

$$\frac{P(\omega, q)}{2\nu} = \frac{Dq^2}{Dq^2 + i\omega\tau(1 - i\omega\tau)}. \quad (1.9)$$

Теперь подставим это в спектральное условие (1.3). В длинноволновом пределе кулоновский вклад является большим, так что именно он определяет плазменную моду. Вводя нормальную диффузионную скорость затухания

$$\gamma_n(q) = 2\nu Dq^2 V_0(q) \quad (1.10)$$

и чистую плазменную частоту

$$\omega_p^2(q) = \frac{\gamma_n(q)}{\tau} = \frac{2\nu Dq^2 V_0(q)}{\tau}, \quad (1.11)$$

получаем спектральное уравнение

$$i\omega(1 - i\omega\tau) = \omega_p^2(q)\tau. \quad (1.12)$$

После раскрытия скобок оно принимает вид

$$\omega^2 + \frac{i}{\tau}\omega - \omega_p^2(q) = 0. \quad (1.13)$$

Выбирая ветвь решения с положительной действительной частью частоты, получаем

$$\omega(q) = \sqrt{\omega_p^2(q) - \frac{1}{4\tau^2}} - \frac{i}{2\tau}. \quad (1.14)$$

Формула (1.14) описывает кроссовер между чистым и грязным пределами. При слабом беспорядке, когда $\omega_p(q)\tau \gg 1$, имеем

$$\omega(q) \simeq \omega_p(q) - \frac{i}{2\tau}. \quad (1.15)$$

В этом режиме плазмон является хорошо определенной коллективной модой: его частота почти совпадает с чистой плазменной частотой, а затухание мало по сравнению с действительной частью частоты.

Напротив, при сильном беспорядке, когда $\omega_p(q)\tau \ll 1$, корень в (1.14) становится чисто мнимым. Разлагая его по малому параметру $\omega_p(q)\tau$, получаем

$$\omega(q) = -\frac{i}{2\tau} + \frac{i}{2\tau} \sqrt{1 - 4\omega_p^2(q)\tau^2} \simeq -i\omega_p^2(q)\tau. \quad (1.16)$$

С учетом определения (1.11) это дает

$$\omega(q) \simeq -i\gamma_n(q). \quad (1.17)$$

Тем самым в грязном нормальном металле плазмон перестает быть осциллирующей модой и превращается в чисто затухательный.

Рисунок 1.1 иллюстрирует именно этот переход. При малой величине $(\omega_p\tau)^{-1}$ система находится в чистом пределе: $\text{Re } \omega$ близка к ω_p , а $\text{Im } \omega$ мало. При увеличении беспорядка действительная часть частоты уменьшается, а затухание возрастает. При $\tau^{-1} > 2\omega_p(q)$ действительная часть частоты исчезает, и мода становится чисто затухающей.

Область применимости диффузионного описания

Используемая далее теория предполагает, что электронное движение на масштабах, существенных для коллективной моды, является диффузионным. Это означает выполнение условий $ql \ll 1$ и $\omega\tau \ll 1$, где l — длина свободного пробега, а τ — время упругого рассеяния. При этом само сверхпроводящее состояние остается хорошо определенным: характерная энергия упругого рассеяния может значительно превышать щель, но немагнитный беспорядок не разрушает изотропное s -волновое спаривание в соответствии с теоремой Андерсона. Таким образом, сильное примесное рассеяние радикально меняет кинетику квазичастиц, переводя ее из баллистического режима в диффузионный, но не устраняет сверхпроводящий конденсат.

В низкоразмерной геометрии существенную роль играет также вид кулоновского потенциала. Для изолированной двумерной пленки $V_0(q) \propto 1/q$, вследствие чего нор-

мальная скорость релаксации $\gamma_n(q)$ пропорциональна q . В нанопроводе или в пленке, расположенной рядом с металлическим экраном, функциональная зависимость $V_0(q)$ изменяется. Однако микроскопическая часть задачи при этом остается той же: геометрия входит в спектральное уравнение только через комбинацию $\gamma_n(q) = 2\nu D q^2 V_0(q)$. Поэтому ниже дисперсия будет преимущественно представляться как функция $\gamma_n(q)$, что позволяет отделить универсальный сверхпроводящий отклик от конкретной электростатической геометрии образца.

Важно также различать два вида затухания. Упругое примесное рассеяние уже включено в коэффициент диффузии D и само по себе не является необратимым каналом распада коллективной моды: оно лишь определяет диффузионный характер движения электронов. Собственно диссипация плазмона возникает из действительной части оптической проводимости, то есть из процессов поглощения энергии квазичастицами. При $T = 0$ и частотах ниже 2Δ такие процессы запрещены щелью, поэтому даже очень грязный сверхпроводник поддерживает незатухающую плазмонную моду. Это обстоятельство принципиально отличает его от нормального грязного металла, где отсутствует индуктивный отклик конденсата и зарядовая мода является чисто релаксационной.

1.3 Формулировка спектральной задачи

В нормальном металле усиление беспорядка последовательно уширяет плазменный резонанс и в грязном пределе переводит его в чисто релаксационную моду. В грязном сверхпроводнике ситуация иная: несмотря на сильное примесное рассеяние, при понижении температуры ниже T_c появляется когерентное движение конденсата, которое восстанавливает осциллирующий характер зарядовой моды. Поэтому переход в сверхпроводящее состояние можно качественно интерпретировать как эффективное уменьшение диссипации для коллективной зарядовой динамики.

В линейном отклике уравнения движения для потенциала и фазы можно записать в матричном виде

$$(V^R)^{-1}_{\omega,q} \begin{pmatrix} \phi_{\omega,q} \\ |\Delta| \varphi_{\omega,q} \end{pmatrix} = 0. \quad (1.18)$$

Здесь V^R — запаздывающая функция отклика в фазово-зарядовом секторе. Точное условие существования коллективной моды будет получено из эффективного действия в разд. 2.1. Поскольку плазмон в общем случае затухает, его частота комплексна:

$$\omega(q) = \text{Re } \omega(q) + i \text{Im } \omega(q), \quad \text{Im } \omega(q) < 0. \quad (1.19)$$

Величина $-\text{Im } \omega(q)$ является скоростью затухания. Следовательно, спектральная задача должна решаться не на вещественной оси частот, а в нижней полуплоскости комплексной частоты.

Глава 2

Келдышевская сигма-модель и спектральное уравнение

2.1 Микроскопический вывод спектрального уравнения

В этой главе мы переходим от феноменологического описания плазменной моды к микроскопическому выводу спектрального уравнения. Основная задача состоит в том, чтобы получить эффективное квадратичное действие для двух бозонных полей: электрического потенциала ϕ и фазы сверхпроводящего параметра порядка φ . Именно эти поля отвечают за зарядовую коллективную динамику. Амплитудная мода параметра порядка в отсутствие стационарного сверхтока отщепляется от фазово-зарядового сектора и далее не рассматривается.

Удобным микроскопическим языком для грязного сверхпроводника является нелинейная сигма-модель в формализме Келдыша [30, 35]. Она позволяет одновременно учитывать диффузионное движение квазичастиц, сверхпроводящую когерентность и неравновесную динамику медленных бозонных полей.

2.1.1 Действие нелинейной сигма-модели в формализме Келдыша

В результате усреднения по случайному примесному потенциалу низкоэнергетическое описание грязного сверхпроводника формулируется в терминах матричного поля $Q(\mathbf{r})$, удовлетворяющего нелинейному ограничению

$$Q^2 = 1. \quad (2.1)$$

Матрица Q действует в прямом произведении пространства Намбу и пространства Келдыша, а также несет два временных или энергетических индекса. В дальнейшем матрицы Паули в пространстве Намбу будем обозначать через τ_i , а в пространстве Келдыша — через σ_i .

Действие сигма-модели имеет вид

$$S[Q, \Phi, \Delta] = \frac{i\pi\nu}{4} \text{Tr} [D(\nabla Q)^2 + 4i(i\tau_3\partial_t + \check{\Phi} + i\check{\Delta})Q] \\ + \text{Tr} \left[\Phi^T (2\nu + V_0^{-1}) \sigma_1 \Phi - \frac{2\nu}{\lambda} \Delta^+ \sigma_1 \Delta \right]. \quad (2.2)$$

Здесь ν — плотность состояний на уровне Ферми на одну проекцию спина, D — коэффициент диффузии, $V_0(q)$ — голый кулоновский потенциал, а λ — безразмерная константа БКШ-притяжения. Символ Tr включает след по матричным индексам, интегрирование по координатам и по времени.

Бозонные поля удобно записывать как двухкомпонентные векторы в простран-

стве Келдыша:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_q \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta_q \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь первая компонента является классической, а вторая — квантовой компонентой поля. В матричной форме они входят в действие как

$$\check{\Phi} = \tau_0 (\phi \sigma_0 + \phi_q \sigma_1), \quad (2.4a)$$

$$\check{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix}_N \sigma_0 + \begin{pmatrix} 0 & \Delta_q \\ \Delta_q^* & 0 \end{pmatrix}_N \sigma_1. \quad (2.4b)$$

Первая строка действия (2.2) описывает низкоэнергетическую динамику электронов в диффузионном режиме. Градиентный член $D(\nabla Q)^2$ отвечает за пространственную диффузию, а оператор $i\tau_3 \partial_t + \check{\Phi} + i\check{\Delta}$ содержит энергетическую часть, связь со скалярным электрическим потенциалом и сверхпроводящим параметром порядка. Вторая строка действия включает кулоновскую энергию флуктуаций потенциала и затравочное притяжение в куперовском канале.

2.1.2 Сверхпроводящее седло

Сначала рассмотрим стационарное однородное седло. Выберем калибровку, в которой равновесный параметр порядка Δ действителен. Тогда седловое значение Q диагонально по энергии и имеет стандартную келдышевскую структуру

$$Q_\varepsilon = \begin{pmatrix} Q_\varepsilon^R & F_\varepsilon (Q_\varepsilon^R - Q_\varepsilon^A) \\ 0 & Q_\varepsilon^A \end{pmatrix}_K, \quad F_\varepsilon = \tanh \frac{\varepsilon}{2T}. \quad (2.5)$$

Запаздывающий и опережающий блоки являются матрицами в пространстве Намбу:

$$Q_\varepsilon^\alpha = \begin{pmatrix} g_\varepsilon^\alpha & f_\varepsilon^\alpha \\ f_\varepsilon^\alpha & -g_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix}_N, \quad \alpha = R, A. \quad (2.6)$$

Функции g_ε^α и f_ε^α имеют вид

$$\begin{pmatrix} g_\varepsilon^{R,A} \\ f_\varepsilon^{R,A} \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}} \begin{pmatrix} \varepsilon \pm i0 \\ i\Delta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Они удовлетворяют условию нормировки

$$(g_\varepsilon^\alpha)^2 + (f_\varepsilon^\alpha)^2 = 1, \quad (2.8)$$

которое является частным проявлением ограничения $Q^2 = 1$.

Самосогласованное значение Δ определяется из вариации действия по квантовой

компоненте параметра порядка. Это дает уравнение щели

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{1}{2} \int d\varepsilon F_\varepsilon \operatorname{Im} f_\varepsilon^R. \quad (2.9)$$

Интеграл в уравнении самосогласования понимается с ультрафиолетовой обрезкой на дебаевской частоте ω_D , поскольку эффективное притяжение в куперовском канале действует только в этом энергетическом интервале. Использование уравнения щели позволяет заменить $1/\lambda$ в фазовом канале на интегральное выражение и тем самым исключить явную зависимость наблюдаемых величин от дебаевской обрезки.

2.1.3 Параметризация диффузионных мод

Для получения динамического действия бозонных полей необходимо разложить сигма-модель около седла (2.5). Ограничение $Q^2 = 1$ удобно учитывать экспоненциальной или рациональной параметризацией. В квадратичном порядке достаточно записать

$$Q = U_F^{-1} U^{-1} \sigma_3 \tau_3 \left(1 + W + \frac{W^2}{2} + \dots \right) U U_F, \quad (2.10)$$

где матрица U_F содержит равновесную функцию распределения,

$$U_F = \begin{pmatrix} 1 & F_\varepsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_K, \quad (2.11)$$

а матрица U поворачивает нормальное седло к сверхпроводящему:

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} e^{i\tau_2 \theta_\varepsilon^R/2} & 0 \\ 0 & e^{i\tau_2 \theta_\varepsilon^A/2} \end{pmatrix}_K. \quad (2.12)$$

Углы $\theta_\varepsilon^\alpha$ связаны с функциями Грина как

$$g_\varepsilon^\alpha = \cos \theta_\varepsilon^\alpha, \quad f_\varepsilon^\alpha = i \sin \theta_\varepsilon^\alpha. \quad (2.13)$$

Матрица W антикоммутирует с $\sigma_3 \tau_3$,

$$\{W, \sigma_3 \tau_3\} = 0, \quad (2.14)$$

что гарантирует выполнение условия $Q^2 = 1$ в каждом порядке разложения. Физически W описывает мягкие диффузионные флуктуации квазичастиц. Именно их интегрирование порождает поляризационную матрицу $\Pi(\omega, q)$.

В сверхпроводнике удобно разделить W -моды на диффузионный и куперонный каналы. В гауссовом приближении соответствующие пропагаторы равны

$$\mathcal{D}_{\varepsilon, \varepsilon'}(q) = \frac{1}{Dq^2 + E_\varepsilon^R + E_{\varepsilon'}^A}, \quad (2.15a)$$

$$\mathcal{C}_{\varepsilon, \varepsilon'}^{\alpha}(q) = \frac{1}{Dq^2 + E_{\varepsilon}^{\alpha} + E_{\varepsilon'}^{\alpha}}. \quad (2.15b)$$

Здесь $\alpha = R, A$, а энергия равна

$$E_{\varepsilon}^{R,A} = \mp i \sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}. \quad (2.16)$$

В нормальном металле величины E_{ε}^R и $E_{\varepsilon'}^A$ сводятся к $-i\varepsilon$ и $i\varepsilon'$, и (2.15a) переходит в обычный диффузионный пропагатор $1/(Dq^2 - i\omega)$. В сверхпроводящем состоянии наличие щели Δ приводит к появлению щели и в спектре диффузионных и куперонных мод: их знаменатели определяются суммами квазичастичных энергий $E^{R,A}$ и не обращаются в нуль так же, как в нормальном металле.

2.1.4 Бозонные вершины: потенциал и фаза

Нас интересуют малые колебания электрического потенциала ϕ и фазы параметра порядка φ . Параметр порядка запишем в виде

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = \Delta e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)} \simeq \Delta [1 + i\varphi(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.17)$$

Амплитудную флуктуацию $|\Delta|$ здесь не учитываем. Тогда линейная фазовая флуктуация соответствует добавке к матрице параметра порядка, пропорциональной $\Delta\varphi$. Иными словами, два поля, которые входят в эффективное действие, можно объединить в вектор

$$b_{\omega, q} = \begin{pmatrix} \phi_{\omega, q} \\ \Delta\varphi_{\omega, q} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Разложение действия (2.2) по W и по внешним бозонным полям имеет структуру

$$S = S_0 + S_W^{(2)} + S_b^{(2)} + S_{bW}^{(1,1)} + S_{bWW}^{(1,2)} + \dots \quad (2.19)$$

Здесь $S_W^{(2)}$ — гауссово действие диффузионных мод, $S_b^{(2)}$ — голое квадратичное действие бозонных полей, а $S_{bW}^{(1,1)}$ и $S_{bWW}^{(1,2)}$ описывают связь бозонных полей с квазичастичными флуктуациями.

Эффективное действие для $b = (\phi, \Delta\varphi)^T$ получается после гауссова интегрирования по W :

$$e^{iS_{\text{eff}}[b]} = \int \mathcal{D}W e^{iS[W, b]}. \quad (2.20)$$

Во втором порядке по бозонным полям это эквивалентно вычислению двух вкладов:

$$iS_{\text{eff}}^{(2)}[b] = iS_b^{(2)} + i \left\langle S_{bWW}^{(1,2)} \right\rangle_W - \frac{1}{2} \left\langle \left(S_{bW}^{(1,1)} \right)^2 \right\rangle_W. \quad (2.21)$$

Первый из этих вкладов содержит статическое экранирование и затравочное притяжение в куперовском канале, а второй и третий дают динамический отклик квазичастиц.

Именно поэтому поляризационная матрица имеет вид

$$\Pi(\omega, q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\lambda \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \int d\varepsilon \pi^R(\varepsilon, \omega, q). \quad (2.22)$$

Единица в элементе 11 учитывает статическое экранирование электрического потенциала. Элемент 22 содержит затравочное притяжение $-1/\lambda$ в куперовском канале. Интегральная часть описывает динамический вклад диффузионных квазичастиц.

2.1.5 Происхождение структуры π_{ij}^R

Рассмотрим происхождение выражений для элементов π_{ij}^R . При разложении действия по полям ϕ , $\Delta\varphi$ и W внешние бозонные поля входят в электронную петлю через соответствующие матрицы в пространстве Намбу. После гауссова усреднения по W возникают три аналитические комбинации функций Грина: RA , RR и AA . Первая содержит диффузон $\mathcal{D}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}$, а две последние — купероны $\mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^R$ и $\mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^A$; здесь $\varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm \omega/2$.

Коэффициенты при этих трех вкладах получаются при вычислении следа в пространстве Келдыша. Для комбинации RA возникает разность функций распределения $F_{\varepsilon_+} - F_{\varepsilon_-}$, тогда как комбинации RR и AA входят с множителями F_{ε_-} и $-F_{\varepsilon_+}$ соответственно. Поэтому каждый элемент можно представить в общем виде

$$\pi_{ij}^R = (F_{\varepsilon_+} - F_{\varepsilon_-}) \mathcal{D}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-} \Gamma_{ij}^{RA} + F_{\varepsilon_-} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^R \Gamma_{ij}^{RR} - F_{\varepsilon_+} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^A \Gamma_{ij}^{AA}. \quad (2.23)$$

Матрицы $\Gamma_{ij}^{\alpha\beta}$ определяются следами по пространству Намбу. Поскольку поле ϕ связано с флуктуацией плотности заряда, а $\Delta\varphi$ — с фазовой флуктуацией параметра порядка, в трех элементах матрицы поляризации возникают различные комбинации нормальных и аномальных функций Грина.

После взятия следов по пространству Намбу возникают три множителя:

$$\mathfrak{M}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{\alpha\beta} = 1 - g_{\varepsilon_1}^{\alpha} g_{\varepsilon_2}^{\beta} - f_{\varepsilon_1}^{\alpha} f_{\varepsilon_2}^{\beta}, \quad (2.24a)$$

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{\alpha\beta} = 1 + g_{\varepsilon_1}^{\alpha} g_{\varepsilon_2}^{\beta} + f_{\varepsilon_1}^{\alpha} f_{\varepsilon_2}^{\beta}, \quad (2.24b)$$

$$\mathfrak{N}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^{\alpha\beta} = g_{\varepsilon_1}^{\alpha} f_{\varepsilon_2}^{\beta} - f_{\varepsilon_1}^{\alpha} g_{\varepsilon_2}^{\beta}. \quad (2.24c)$$

Множитель $\mathfrak{M}$ входит в коррелятор двух флуктуаций электрического потенциала, $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — в коррелятор двух фазовых флуктуаций, а $\mathfrak{N}$ — в смешанный коррелятор потенциала и фазы. Различие знаков определяется матрицами, с которыми поля ϕ и $\Delta\varphi$ входят в пространство Намбу.

Подставляя эти множители в формулу (2.23), получаем

$$\pi_{11}^R = (F_{\varepsilon_+} - F_{\varepsilon_-}) \mathcal{D}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-} \mathfrak{M}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{RA} + F_{\varepsilon_-} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^R \mathfrak{M}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{RR} - F_{\varepsilon_+} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^A \mathfrak{M}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{AA}, \quad (2.25a)$$

$$\pi_{12}^R = -\pi_{21}^R = (F_{\varepsilon_+} - F_{\varepsilon_-}) \mathcal{D}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-} \mathfrak{N}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{RA} + F_{\varepsilon_-} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^R \mathfrak{N}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{RR} - F_{\varepsilon_+} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^A \mathfrak{N}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{AA}, \quad (2.25b)$$

$$\pi_{22}^R = - (F_{\varepsilon_+} - F_{\varepsilon_-}) \mathcal{D}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-} \widetilde{\mathfrak{M}}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{RA} - F_{\varepsilon_-} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^R \widetilde{\mathfrak{M}}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{RR} + F_{\varepsilon_+} \mathcal{C}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^A \widetilde{\mathfrak{M}}_{\varepsilon_+, \varepsilon_-}^{AA}. \quad (2.25c)$$

Антисимметрия смешанного элемента,

$$\pi_{12}^R = -\pi_{21}^R, \quad (2.26)$$

имеет простую интерпретацию. Поле ϕ связано с плотностью заряда, а поле φ является фазовой переменной, канонически сопряженной заряду. Поэтому смешанная часть эффективного действия имеет гироскопический, то есть антисимметричный, характер.

2.1.6 Эффективное действие для потенциала и фазы

После интегрирования по флуктуациям W квадратичное действие должно сохранять причинную структуру формализма Келдыша. Введем классическую и квантовую компоненты фазово-зарядового поля, $b_{\omega, q}^{\text{cl}, q} = (\phi_{\omega, q}^{\text{cl}, q}, \Delta\varphi_{\omega, q}^{\text{cl}, q})^T$. Тогда действие можно записать в стандартной форме

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\omega, q} \begin{pmatrix} (b_{-\omega, -q}^{\text{cl}})^T & (b_{-\omega, -q}^{\text{q}})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (V^A)_{\omega, q}^{-1} \\ (V^R)_{\omega, q}^{-1} & (V^{-1})_{\omega, q}^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\omega, q}^{\text{cl}} \\ b_{\omega, q}^{\text{q}} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Здесь запаздывающий блок равен

$$(V^R)_{\omega, q}^{-1} = \begin{pmatrix} V_0^{-1}(q) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\nu\Pi(\omega, q),$$

опережающий блок связан с ним условием причинности, а келдышевский блок задает корреляционную функцию бозонных полей. Варьирование (2.27) по квантовой компоненте с последующим условием $b^{\text{q}} = 0$ дает уравнение движения

$$(V^R)_{\omega, q}^{-1} b_{\omega, q}^{\text{cl}} = 0. \quad (2.28)$$

Ненулевое решение этой однородной системы существует при условии

$$\det (V^R)_{\omega, q}^{-1} = 0. \quad (2.29)$$

Именно это условие определяет дисперсию коллективных возбуждений.

2.2 Спектральное уравнение для плазмона

Подставляя выражение для $(V^R)^{-1}$ в условие (2.29), получаем

$$[2\nu V_0(q)]^{-1} \Pi_{22}(\omega, q) + \det \Pi(\omega, q) = 0. \quad (2.30)$$

В общем случае уравнение (2.30) аналитически неразрешимо: матричные элементы Π_{ij} зависят от частоты, импульса и температуры через интегралы по энергии, содержащие диффузионные и куперонные знаменатели. Существенное упрощение возникает в длинноволновом пределе.

При $q = 0$ матрица поляризации вычисляется точно:

$$\Pi(\omega, 0) = f(\omega, T) \begin{pmatrix} 1 & i\omega/2\Delta \\ -i\omega/2\Delta & (\omega/2\Delta)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

где

$$f(\omega, T) = \int_{\Delta}^{\infty} d\varepsilon \frac{\Delta^2 \tanh(\varepsilon/2T)}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2} [\varepsilon^2 - (\omega/2 + i0)^2]}. \quad (2.32)$$

Следовательно,

$$\det \Pi(\omega, 0) = 0. \quad (2.33)$$

Это тождество является проявлением калибровочной инвариантности и электронейтральности. Для пространственно однородных колебаний кулоновское взаимодействие устанавливает соотношение $\phi = \dot{\varphi}/2$, при котором электрохимический потенциал остается постоянным и флуктуация плотности заряда не возникает.

Используя введенную ранее скорость релаксации зарядовой моды в нормальном металле $\gamma_n(q)$, определенную в (1.10), уравнение (2.30) можно переписать в форме

$$\frac{\Pi_{22}(\omega, q)}{\gamma_n(q)} + \frac{\det \Pi(\omega, q)}{Dq^2} = 0. \quad (2.34)$$

Оно содержит как плазмонную ветвь, так и нейтральную моду Карлсона–Голдмана. Для двумерной электронной системы $V_0(q) = 2\pi e^2/q$, поэтому

$$\frac{\gamma_n(q)}{Dq^2} = 2\nu V_0(q) = \frac{\kappa_2}{q} \gg 1, \quad (2.35)$$

где $\kappa_2 = 4\pi e^2\nu$ — двумерный волновой вектор томас–фермиевского экранирования. Благодаря большой величине κ_2/q плазмонная ветвь и нейтральная мода Карлсона–Голдмана относятся к различным масштабам импульса и могут рассматриваться независимо.

Для плазмонной ветви достаточно положить $\Pi_{22}(\omega, q) \simeq \Pi_{22}(\omega, 0)$ и заменить

$\det \Pi(\omega, q)/(Dq^2)$ первой производной $\det' \Pi(\omega, 0)$ по Dq^2 . Используя (2.31), находим

$$\det' \Pi(\omega, 0) = f(\omega, T) \left[\frac{\omega^2}{4\Delta^2} \Pi'_{11} + \frac{i\omega}{\Delta} \Pi'_{12} + \Pi'_{22} \right]. \quad (2.36)$$

Специальная комбинация производных в квадратных скобках выражается через оптическую проводимость грязного БКШ-сверхпроводника:

$$\det' \Pi(\omega, 0) = \frac{i\omega f(\omega, T)}{4\Delta^2} \frac{\sigma(\omega, T)}{\sigma_0}, \quad \sigma_0 = 2e^2 \nu D. \quad (2.37)$$

В результате спектральное уравнение плазмона принимает компактный вид

$$\boxed{\omega = -i \frac{\sigma(\omega, T)}{\sigma_0} \gamma_n(q)}. \quad (2.38)$$

Несмотря на простоту формулы (2.38), ее решение требует знания проводимости при комплексной частоте в нижней полуплоскости.

2.3 Проводимость Маттиса–Бардина

Оптическая проводимость грязного сверхпроводника была впервые вычислена Маттисом и Бардином [31]. Для дальнейшего анализа удобно использовать представление, предложенное в работе [33]:

$$\frac{\sigma(\omega, T)}{\sigma_0} = 1 + K^{RA}(\omega) + K^R(\omega), \quad (2.39)$$

где

$$K^{RA}(\omega) = -\frac{1}{4\omega} \int d\varepsilon (F_{\varepsilon+} - F_{\varepsilon-}) (1 + g_{\varepsilon+}^R g_{\varepsilon-}^A - f_{\varepsilon+}^R f_{\varepsilon-}^A), \quad (2.40a)$$

$$K^R(\omega) = \frac{1}{2\omega} \int d\varepsilon F_{\varepsilon-} (1 - g_{\varepsilon+}^R g_{\varepsilon-}^R + f_{\varepsilon+}^R f_{\varepsilon-}^R). \quad (2.40b)$$

Представление (2.39)–(2.40) математически эквивалентно формулам, полученным в работе [32], но более удобно для аналитического продолжения и численного расчета.

2.4 Аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость

Затухающий плазмон соответствует комплексной частоте с $\text{Im } \omega(q) < 0$. Поэтому проводимость в (2.38) необходимо определить не только на вещественной оси, но и в нижней полуплоскости комплексной частоты. Прямая подстановка комплексного ω в интегралы (2.40) некорректна: при движении ω вниз точки ветвления функций Грина пересекают исходный контур интегрирования по вещественной энергии.

Для вещественной частоты точки ветвления расположены при $\varepsilon = \pm\Delta \pm (\omega/2 +$

$i0$). В силу причинности разрезы запаздывающих функций g^R, f^R проходят ниже вещественной оси, а разрезы опережающих функций g^A, f^A — выше нее. При $\text{Im } \omega < 0$ один разрез в K^R и два разреза в K^{RA} пересекают вещественную ось. Поэтому путь интегрирования по ε в комплексной плоскости энергии необходимо непрерывно деформировать вместе с изменением ω , не допуская пересечения разрезов функций Грина. Такой деформированный путь далее называется контуром интегрирования по энергии. Именно эта процедура определяет аналитическое продолжение запаздывающей проводимости на физический лист нижней полуплоскости комплексной частоты. Расположение точек ветвления, разрезов и соответствующая деформация контура показаны на рис. 2.1.

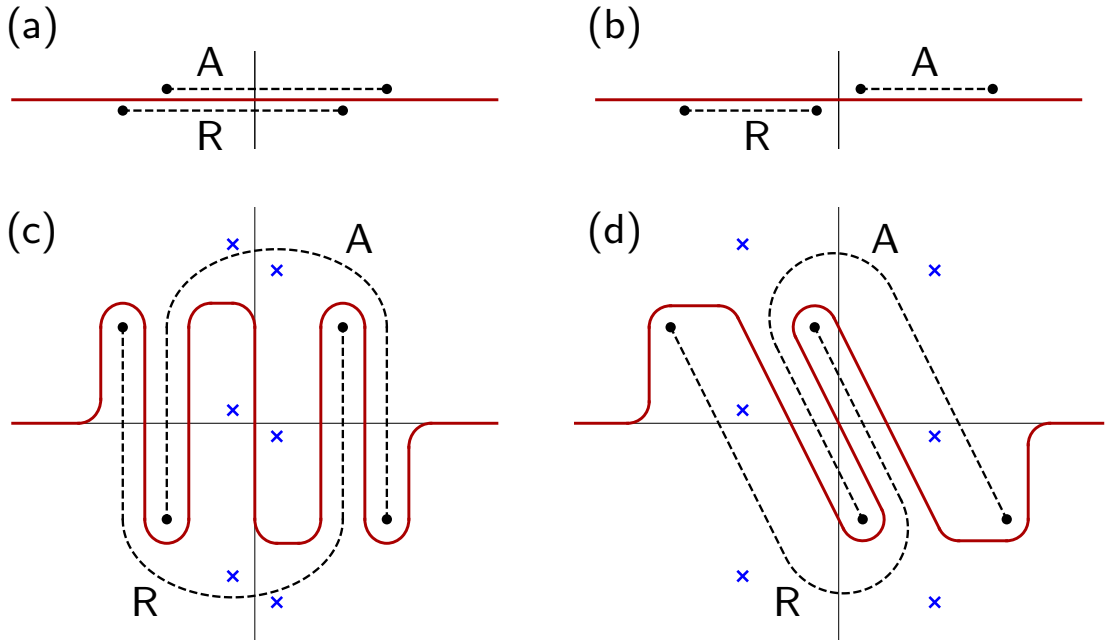


Рис. 2.1: Контур интегрирования по энергии ε в выражении для вклада $K^{RA}(\omega)$. Панели (a), (b) соответствуют вещественной частоте, а панели (c), (d) — продолжению в нижнюю полуплоскость, $\text{Im } \omega < 0$. Точками отмечены точки ветвления $\pm\Delta \pm \omega/2$, штриховыми линиями — разрезы функций Грина, крестами — полюса $F_{\varepsilon\pm}$. Панели (a), (c) относятся к области $\omega < \Delta$, панели (b), (d) — к области $\omega > \Delta$.

Для вклада K^R контур следует провести выше точек $\pm\Delta - \omega/2$. В K^{RA} запаздывающие точки ветвления движутся вверх, а опережающие — вниз, поэтому контур принимает зигзагообразную форму, показанную на рис. 2.1. Именно эта геометрия взаимопроникающих разрезов оказывается ответственной за скачок дисперсии при T_c , существование точки окончания спектра и восстановление распространяющегося плазмона при больших импульсах.

Принципы решения комплексного спектрального уравнения

Спектральное уравнение (2.38) является нелинейным, поскольку искомая частота входит одновременно в левую часть и в аргумент проводимости. При заданных T и

q требуется найти нуль функции

$$\mathcal{F}(\omega; T, q) = \omega + i\gamma_n(q) \frac{\sigma(\omega, T)}{\sigma_0} \quad (2.41)$$

на физическом листе в нижней полуплоскости. Для отслеживания одной и той же ветви удобно начинать с аналитически известного решения при малом q и затем плавно увеличивать $\gamma_n(q)$, используя найденный корень как начальное приближение для следующего шага. Такой способ позволяет отличить непрерывное продолжение физического полюса от посторонних нулей на других листах римановой поверхности.

При численном вычислении проводимости необходимо одновременно контролировать положение точек ветвления в плоскости энергии. Контур интегрирования зависит от текущего комплексного значения ω и должен непрерывно деформироваться при движении корня. Если вместо этого интегрировать по вещественной оси, численная процедура может формально сходиться, однако полученный ответ не является аналитическим продолжением запаздывающей функции отклика. Именно поэтому проверка причинности и непрерывности выбранного листа является частью решения спектральной задачи, а не только технической деталью интегрирования.

Для физического полюса должно выполняться $\text{Im } \omega \leq 0$. При $\text{Im } \omega < 0$ величина $-\text{Im } \omega$ задает скорость затухания амплитуды, а характерное время жизни равно $(-\text{Im } \omega)^{-1}$. Отношение действительной части к удвоенному затуханию определяет добротность Q . Условие $Q \gg 1$ соответствует хорошо разрешенной резонансной моде; при $Q \lesssim 1$ затухание сравнимо с частотой колебаний, поэтому резонанс становится плохо разрешимым. Далее такой режим будем называть режимом сильного затухания.

Глава 3

Дисперсия и затухание плазмонов

3.1 Нулевая температура

При $T = 0$ проводимость грязного БКШ-сверхпроводника имеет точный вид [31, 36]

$$\frac{\sigma(\omega, 0)}{\sigma_0} = \frac{2i\Delta}{\omega} E\left(\frac{\omega}{2\Delta}\right), \quad \Delta = \Delta(0), \quad (3.1)$$

где $E(z)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Подстановка (3.1) в (2.38) дает

$$\omega^2 = 2\Delta\gamma_n(q)E\left(\frac{\omega}{2\Delta}\right). \quad (3.2)$$

При $\gamma_n(q) \leq 2\Delta$ решения вещественны, поэтому плазмоны не затухают. В длинноволновом пределе $\gamma_n(q) \ll 2\Delta$ можно положить $E(0) = \pi/2$:

$$\omega_0(q) = \sqrt{\pi\Delta(0)\gamma_n(q)}. \quad (3.3)$$

Эта зависимость соответствует резонансу распределенной линии, в которой инерция куперовских пар задает кинетическую индуктивность, а кулоновское взаимодействие — импульсно-зависимую емкость.

Уравнение (3.2) содержит только аналитические функции и допускает прямой поиск комплексных корней. При $\gamma_n(q) > 2\Delta$ решений нет ни на вещественной оси, ни в комплексной плоскости физического листа. Следовательно,

$$\gamma_n[q_c(0)] = 2\Delta(0), \quad \omega_c(0) = 2\Delta(0), \quad (3.4)$$

а $q_c(0)$ является точкой окончания физической плазмонной ветви.

Полный эллиптический интеграл имеет разрезы $(-\infty, -2\Delta)$ и $(2\Delta, \infty)$. Переход на второй риманов лист можно описать функцией [34]

$$E^\downarrow(z) = \begin{cases} E(z), & \text{Im } z > 0, \\ E(z) - 2iz[E(z) - K(z)/z^2], & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $K(z)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Замена $E \rightarrow E^\downarrow$ продолжает формальное решение за точку окончания. На втором, нефизическом листе при $q \gg q_c(0)$ оно насыщается при $\omega = (2.309 - 0.857i)\Delta(0)$. Эти решения не являются самостоятельными физическими возбуждениями, хотя могут проявляться как особенности функции отклика.

3.2 Затухание при низких температурах

При конечной температуре подщелевые плазмоны затухают вследствие переходов с участием термически возбужденных квазичастиц, и частота приобретает отрицательную мнимую часть. В пределе $T \ll T_c$ число таких квазичастиц экспоненциально мало. Главный вклад дают переходы между состояниями с энергиями $\varepsilon \simeq \Delta$ и $\varepsilon + \omega$.

Обозначим температурную поправку к проводимости через $\delta\sigma(\omega, T) = \sigma(\omega, T) - \sigma(\omega, 0)$. В интегралах (2.40) необходимо оставить ведущие асимптотики спектральных функций и диффузионных пропагаторов при $\varepsilon \rightarrow \Delta + \omega/2$, а также учесть экспоненциально малое отличие F_ε от $\text{sign } \varepsilon$. В результате получаем

$$\frac{\delta\sigma(\omega, T)}{\sigma_0} = \frac{\Delta}{\omega} \sqrt{2\pi \frac{T}{\omega} \frac{2\Delta + \omega}{\Delta}} e^{-\Delta/T} (1 - e^{-\omega/T}). \quad (3.6)$$

Эта поправка вносит в правую часть спектрального уравнения малый диссипативный вклад $-i\omega[\delta\sigma(\omega, T)/\sigma_0]\gamma_n(q)$.

В области $\omega(q) \ll 2\Delta$ комплексная дисперсия принимает вид

$$\boxed{\omega(q) = \omega_0(q) - i\sqrt{\frac{T\omega_0(q)}{\pi}} e^{-\Delta/T} (1 - e^{-\omega_0(q)/T})}. \quad (3.7)$$

Первое слагаемое совпадает с нуль-температурной дисперсией (3.3); второе описывает затухание на термических квазичастицах. Экспоненциальный множитель $e^{-\Delta/T}$ показывает, что при низких температурах затухание экспоненциально мало: $|\text{Im } \omega| \ll \text{Re } \omega$, и плазмон является слабозатухающим возбуждением. При $\omega_0 \gg T$ квадратная скобка стремится к единице, тогда как при $\omega_0 \ll T$ она дает дополнительный фактор ω_0/T .

Физический смысл низкотемпературной асимптотики

Выражение (3.7) допускает наглядную интерпретацию. Тепловой множитель $e^{-\Delta/T}$ определяется концентрацией квазичастиц вблизи края щели. Корневой множитель возникает из сингулярности БКШ-плотности состояний и фазового объема переходов между состояниями, разделенными энергией плазмона. Наконец, комбинация $1 - e^{-\omega_0/T}$ обеспечивает подробный баланс между поглощением и вынужденным испусканием энергии. Поэтому формула одновременно содержит как спектральную структуру квазичастиц, так и их тепловое заполнение.

В пределе $\omega_0 \ll T$ имеем $1 - e^{-\omega_0/T} \simeq \omega_0/T$, и скорость затухания растет как $\omega_0^{3/2}/\sqrt{T}$. Для $\omega_0 \gg T$ обратные переходы экспоненциально подавлены, и скобка стремится к единице. В обоих случаях отношение $|\text{Im } \omega|/\text{Re } \omega$ остается экспоненциально малым при $T \ll \Delta$, поэтому температурное уширение резонанса значительно слабее изменения его частоты.

Следует отметить, что низкотемпературная формула применима вдали от точки окончания спектра. Когда ω приближается к 2Δ , приближение, основанное на малости

$\omega/2\Delta$, перестает работать, а положение разрезов проводимости становится существенным. В этой области необходимо решать полное спектральное уравнение. Именно полное решение показывает, что частота окончания при малой температуре лежит немного выше $2\Delta(T)$, тогда как затухание в самой точке окончания вновь обращается в нуль.

3.3 Окрестность критической температуры

3.3.1 Скачок дисперсии при T_c

В нормальном состоянии при $T > T_c$ коллективная зарядовая мода является чисто релаксационной:

$$\omega(q) = -i\gamma_n(q). \quad (3.8)$$

Ниже перехода появляется конечная действительная часть частоты. Несмотря на непрерывное обращение щели в нуль, предел $\omega(q)$ при $T \rightarrow T_c - 0$ не переходит в результат (3.8) для нормального состояния: $\text{Re } \omega$ возникает скачком, а скорость затухания $-\text{Im } \omega$ оказывается меньше $\gamma_n(q)$.

Причина состоит в противоположном движении разрезов g^R и g^A во вкладе $K^{RA}(\omega)$. При $\Delta \rightarrow 0$, но конечной комплексной частоте, контур по ε зажимается между запаздывающими и опережающими разрезами. Функция $g_{\varepsilon+}^R$ равна своему нормальному значению 1 вне узкой полосы $\mathfrak{S}^R$ и меняет знак внутри нее; аналогично $g_{\varepsilon-}^A$ имеет нормальное значение -1 вне полосы $\mathfrak{S}^A$ и значение 1 внутри. Хотя ширина полос пропорциональна Δ и исчезает при переходе, длина зигзагообразного контура остается порядка $|\omega|$. Поэтому вклад не исчезает в пределе $\Delta \rightarrow 0$.

Пренебрегая членом $f_{\varepsilon+}^R f_{\varepsilon-}^A \propto \Delta^2$, получаем

$$\begin{aligned} K^{RA}(\omega) &= -\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\int_{-\omega/2}^{\omega/2-\Delta} + \int_{\Delta-\omega/2}^{\omega/2} \right) d\varepsilon \frac{F_{\varepsilon+} - F_{\varepsilon-}}{2\omega} \\ &= -\int_{-\omega/2}^{\omega/2} d\varepsilon \frac{F_{\varepsilon+} - F_{\varepsilon-}}{\omega} = -\frac{4T}{\omega} \ln \cosh \frac{\omega}{2T}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Формула (3.9) справедлива при произвольном отношении $|\omega|/T_c$ при условии $\text{Im } \omega < 0$. Непосредственно ниже перехода спектр задается уравнением

$$\boxed{\omega = -i \left[1 - \frac{4T_c}{\omega} \ln \cosh \frac{\omega}{2T_c} \right] \gamma_n(q)}. \quad (3.10)$$

При $\gamma_n(q) \ll T_c$ решение является сильно затухающим:

$$\omega(q) = -i\gamma_n(q) + \frac{\gamma_n^2(q)}{2T_c} + i\frac{\gamma_n^3(q)}{4T_c^2} + \dots \quad (3.11)$$

Таким образом, даже при сколь угодно малом γ_n действительная часть частоты сразу ниже T_c конечна и имеет порядок γ_n^2/T_c . Из (3.11) также следует $-\text{Im } \omega = \gamma_n - \gamma_n^3/(4T_c^2) +$

...: затухание меньше нормального значения γ_n , а первое различие возникает в третьем порядке по γ_n/T_c .

В противоположном пределе $\gamma_n(q) \gg T_c$ плазмон становится слабозатухающим:

$$\omega(q) = 2.438 T_c - 8.756 i \frac{T_c^2}{\gamma_n(q)} - 46.21 \frac{T_c^3}{\gamma_n^2(q)} + \dots \quad (3.12)$$

При больших импульсах частота насыщается:

$$\omega_c(T_c - 0) = 2.438 T_c = 1.382 \Delta(0). \quad (3.13)$$

Это значение задает нижнюю границу частоты окончания спектра $\omega_c(T)$. Полная температурная эволюция комплексной частоты при нескольких фиксированных значениях $\gamma_n(q)$ показана на рис. 3.1.

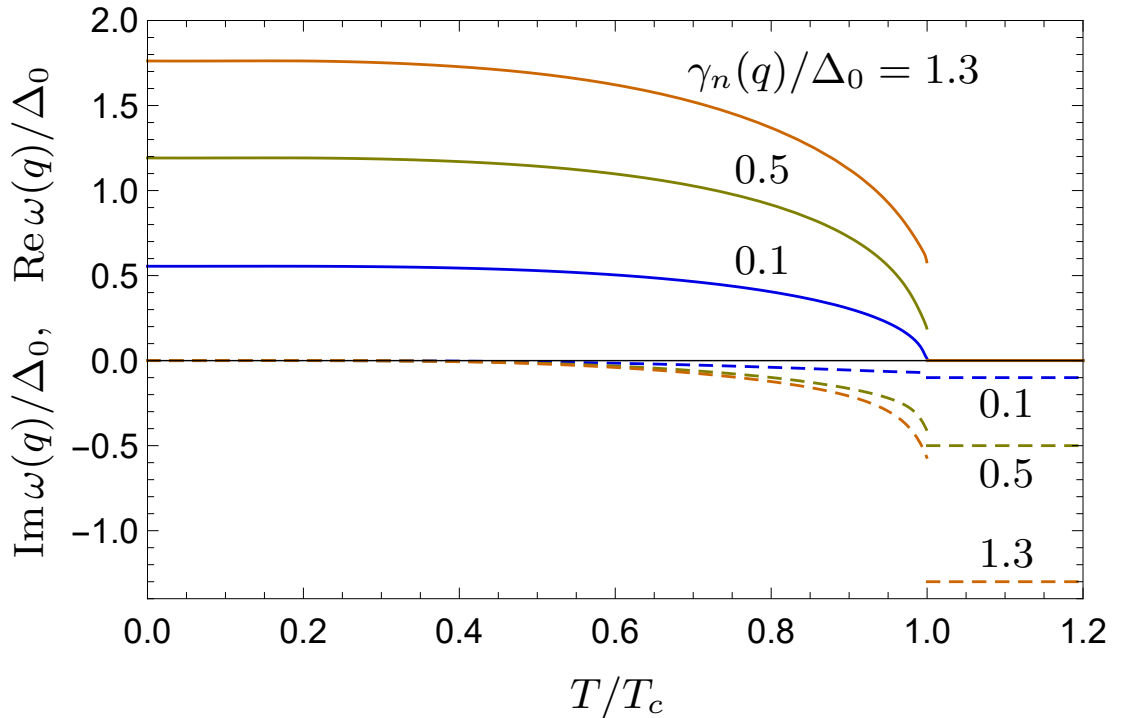


Рис. 3.1: Температурные зависимости действительной (положительные ветви) и мнимой (отрицательные ветви) частей плазмонной дисперсии при трех фиксированных импульсах, соответствующих $\gamma_n(q)/\Delta(0) = 0.1, 0.5$ и 1.3 . При понижении температуры ниже T_c нормальная релаксационная динамика $\omega = -i\gamma_n(q)$ скачком сменяется режимом с конечной $\text{Re}\omega$ и меньшим по модулю затуханием.

Неравномерность предела $\Delta \rightarrow 0$

Скачок при T_c на первый взгляд противоречит непрерывному обращению параметра порядка в нуль. Однако предел $\Delta \rightarrow 0$ в задаче о затухающем полюсе является неравномерным. На вещественной оси частот сверхпроводящая проводимость действительно стремится к нормальной почти всюду. Полюс же расположен при конечной отрицательной мнимой части частоты, и при его поиске необходимо учитывать

область комплексной плоскости, в которой разрезы запаздывающих и опережающих функций сближаются и зажимают контур интегрирования. Ширина каждой отдельной полосы стремится к нулю, но интегральный вклад от участка контура конечной длины остается конечным. Поэтому результат зависит от порядка операций. Если сначала положить $\Delta = 0$ на вещественной оси, получается проводимость нормального металла. Если же сначала аналитически продолжить сверхпроводящую проводимость к частоте с $\text{Im } \omega < 0$ и лишь затем перейти к пределу $\Delta \rightarrow 0$, сохраняется конечный вклад (3.9). Именно второй порядок действий требуется при поиске полюса запаздывающей функции отклика.

Этот механизм не означает скачка термодинамической величины: параметр порядка, свободная энергия и статические характеристики меняются в переходе обычным непрерывным образом. Разрыв возникает в положении динамического полюса на не вещественной частотной плоскости. Подобная ситуация характерна для задач, где малый параметр меняет топологию разрезов или положение полюсов функции отклика. Поэтому обнаруженный эффект следует рассматривать как динамическую особенность сверхпроводящего перехода, связанную с аналитической структурой неравновесного отклика.

Уравнение (3.10) также объясняет различие между длинными и короткими волнами. При $\gamma_n \ll T_c$ кулоновская релаксация медленна, и полюс остается близок к отрицательной мнимой оси. Действительная часть появляется лишь во втором порядке по γ_n/T_c . При $\gamma_n \gg T_c$ зарядовая динамика значительно быстрее теплового масштаба; тогда решение приближается к конечной частоте порядка T_c , а затухание убывает как T_c^2/γ_n . Именно эта асимптотика лежит в основе восстановления плазмонной моды при больших импульсах непосредственно под переходом.

3.3.2 Режим слабого нормального затухания

Рассмотрим экспериментально важный случай $\gamma_n(q) \ll T_c$. Непосредственно ниже перехода из (3.11) следует иерархия

$$\text{Re } \omega(q) \ll |\text{Im } \omega(q)| \ll T_c. \quad (3.14)$$

В приближении Гинзбурга–Ландау

$$\Delta(T) = \sqrt{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}} \sqrt{T_c(T_c - T)}. \quad (3.15)$$

Условие $2\Delta(T) = \text{Re } \omega$ выполняется при $T' = T_c(1 - \tau')$, а условие $2\Delta(T) = |\text{Im } \omega|$ — при $T'' = T_c(1 - \tau'')$, где

$$\tau' = \frac{7\zeta(3)}{2^7\pi^2} \left[\frac{\gamma_n(q)}{T_c} \right]^4, \quad \tau'' = \frac{7\zeta(3)}{2^5\pi^2} \left[\frac{\gamma_n(q)}{T_c} \right]^2. \quad (3.16)$$

При слабом затухании $\tau' \ll \tau''$. Уже при $\gamma_n/T_c \simeq 0.2$ величина τ'' составляет лишь порядка 10^{-3} .

Ниже T'' расстояние между точками ветвления $2\Delta(T)$ превышает $|\omega|$, и можно использовать низкочастотную асимптотику проводимости вблизи T_c [17]:

$$\frac{\sigma(\omega, T)}{\sigma_0} = 1 + \frac{\Delta}{2T} \ln \frac{8\Delta}{e\omega} + \frac{i\pi\Delta^2}{2T\omega}. \quad (3.17)$$

При $|\omega| \ll \Delta$ эта формула допускает непосредственное аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость.

Если сначала пренебречь логарифмическим членом, спектральное уравнение решается в виде

$$\omega_0(q) = -i\gamma_n(q) \frac{1 + \sqrt{1 - \tau/\tau_*}}{2}, \quad \tau = 1 - \frac{T}{T_c}, \quad (3.18)$$

где

$$\tau_* = \frac{7\zeta(3)}{2^4\pi^2} \frac{\gamma_n(q)}{T_c}. \quad (3.19)$$

Параметр τ_* существенно больше τ' и τ'' , но все еще мал по сравнению с единицей. При $T > T_* = (1 - \tau_*)T_c$ приближение (3.18) предсказывает чисто релаксационную моду.

Учет логарифма в (3.17) сглаживает корневую особенность при T_* и создает конечную $\text{Re } \omega$ вплоть до T_c . Вместе с тем при $T > T_*$ добротность остается малой, то есть плазмон находится в режиме сильного затухания. Тот же логарифмический член обуславливает слабый максимум $|\text{Im } \omega|$ вблизи T_* . Аналогичное уравнение без логарифмического члена было получено в работе [9]; оно совпадает с (3.18). Однако низкочастотное приближение (3.17) принципиально не способно воспроизвести скачок при T_c , поскольку этот эффект возникает в области $-\text{Im } \omega \gg \Delta$ и требует полного аналитического продолжения проводимости. Сопоставление точного решения с двумя приближениями представлено на рис. 3.2.

3.3.3 Мода Карлсона–Голдмана

Мода Карлсона–Голдмана получается из общего уравнения (2.34) в пределе сильного кулоновского взаимодействия, когда зарядовая неоднородность практически полностью подавлена. Первый член тогда можно отбросить, а второй необходимо разложить до второго порядка по Dq^2 :

$$\det' \Pi(\omega, 0) + \frac{Dq^2}{2} \det'' \Pi(\omega, 0) = 0. \quad (3.20)$$

Первый член определяется формулой (2.37), где в режиме $\omega \ll \Delta$ используются (3.17) и $f(\omega, T) \simeq \pi\Delta/(4T)$.

Вторая производная представляется как $\det'' \Pi = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$. Здесь $\mathfrak{D}_1 = 2 \det \Pi'(\omega, 0)$, а

$$\frac{\mathfrak{D}_2}{f(\omega, T)} = \frac{\omega^2}{4\Delta^2} \Pi''_{11} + \frac{i\omega}{\Delta} \Pi''_{12} + \Pi''_{22} = \frac{1}{2\Delta^2}. \quad (3.21)$$

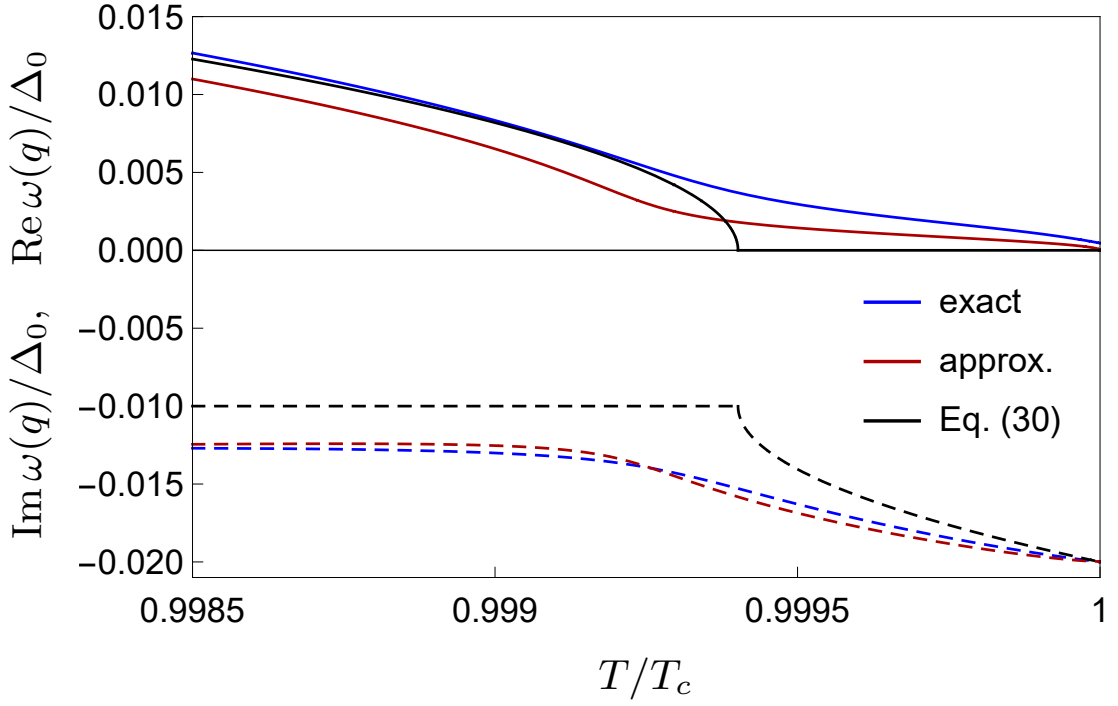


Рис. 3.2: Детальный вид температурной зависимости $\text{Re } \omega(q)$ (сплошные линии) и $\text{Im } \omega(q)$ (штриховые линии) вблизи T_c при $\gamma_n(q)/\Delta(0) = 0.02$. Синим показано точное решение, красным — численное решение с приближенной проводимостью (3.17), черным — грубая оценка (3.18).

Последнее тождество справедливо при произвольных ω и T . В рассматриваемом пределе $\mathfrak{D}_2 \simeq \pi/(8T\Delta)$. Низкочастотные асимптотики

$$\Pi'_{11} = \frac{i}{\omega} + O(\omega), \quad \Pi'_{12} = O(\omega), \quad \Pi'_{22} = -\frac{\pi}{8T} + o(\omega \ln \omega) \quad (3.22)$$

дают

$$\mathfrak{D}_1 = -\frac{i\pi}{4T\omega}. \quad (3.23)$$

При $\omega \ll \Delta$ вклад $\mathfrak{D}_1$ доминирует. Пренебрегая малым логарифмическим членом в (3.17), получаем

$$\omega^2 + \frac{i\pi\Delta^2}{2T}\omega - 2D\Delta q^2 = 0. \quad (3.24)$$

Это уравнение было ранее получено в работах [5, 7, 9]. Его решение имеет вид

$$\omega_{\text{CG}}(q) = \sqrt{2\Delta D q^2 - \left(\frac{\pi\Delta^2}{4T}\right)^2} - i\frac{\pi\Delta^2}{4T}. \quad (3.25)$$

При $q < q_0$, где

$$Dq_0^2 = \frac{\pi^2\Delta^3}{32T^2}, \quad (3.26)$$

корень в (3.25) является чисто мнимым, и мода имеет релаксационный характер. При $q \gg q_0$ ее дисперсия становится звуковой, $\text{Re } \omega_{\text{CG}} \simeq \sqrt{2\Delta D} q$, а затухание мало. Пренебрежение кулоновским членом оправдано разделением масштабов $\gamma_n(q) \gg Dq^2$: плаз-

мон и CG-мода принадлежат различным областям импульсов.

Согласование различных асимптотических областей

Полученные выше предельные результаты описывают разные участки одной непрерывной плазмонной ветви. При $T = 0$ ее положение определяется чисто индуктивным откликом конденсата. При малой температуре появляется экспоненциально слабая диссипация на термических квазичастицах. Вблизи T_c основным параметром становится малость щели по сравнению с температурой, причем низкочастотная область и область конечной комплексной частоты требуют разных порядков предельного перехода. Численное решение при произвольном T соединяет эти режимы без дополнительных интерполяционных предположений.

Особенно нетривиально поведение мнимой части частоты при изменении импульса. На малых q затухание растет вместе с частотой, поскольку увеличивается фазовый объем доступных квазичастичных переходов. Однако после прохождения максимума оно начинает уменьшаться. Такое немонотонное поведение нельзя объяснить только ростом сверхпроводящей жесткости или простым порогом рождения пар. Оно связано с тем, что физический полюс движется по комплексной плоскости относительно разрезов проводимости. При приближении к точке окончания положение полюса становится таким, что диссипативная часть спектрального уравнения компенсируется, и $\text{Im } \omega$ обращается в нуль.

Температурная зависимость $q_c(T)$ и $\omega_c(T)$ демонстрирует различие импульсного и энергетического масштабов окончания. Частота меняется сравнительно слабо и во всей области остается порядка нуль-температурной щели. Напротив, соответствующее значение $\gamma_c(T)$, а следовательно и $q_c(T)$ для заданной геометрии, существенно возрастает при приближении к переходу. Это означает, что высокочастотная часть плазмонной ветви сохраняется около T_c , но смещается к все более коротким длинам волн.

3.4 Произвольные температуры

При произвольной температуре уравнение (2.38) решается численно. Проводимость при $\text{Im } \omega < 0$ каждый раз вычисляется вдоль деформированного контура, описанного в разд. 2.4. Полученный спектр при нескольких температурах показан на рис. 3.3.

При абсолютном нуле затухание отсутствует. С ростом температуры оно увеличивается, однако даже при $T = 0.95T_c$ мода остается слабозатухающей во всем диапазоне ее существования. Для каждой температуры плазмонная ветвь ограничена условием $q \leq q_c(T)$. При подходе к $q_c(T)$ затухание уменьшается и точно в точке окончания обращается в нуль. Температурные зависимости $\omega_c(T)$ и $\gamma_c(T)$ приведены на рис. 3.4.

Частота $\omega_c(T)$ монотонно уменьшается от $2\Delta(0)$ до $1.382\Delta(0)$. Напротив, $q_c(T)$ растет с температурой и расходится при $T \rightarrow T_c - 0$. На римановой поверхности в точке окончания полюс покидает физический лист и продолжается на второй лист. Такие

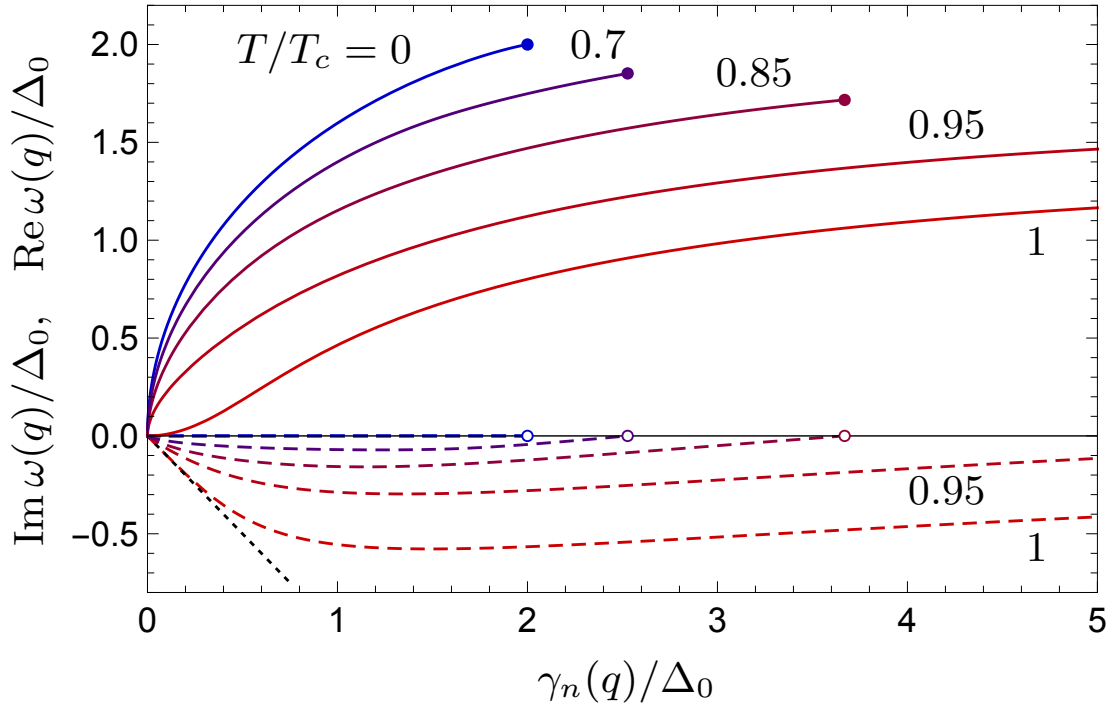


Рис. 3.3: Действительная (положительные сплошные линии) и мнимая (отрицательные штриховые линии) части плазменной дисперсии как функции $\gamma_n(q)/\Delta(0)$ при $T/T_c = 0, 0.7, 0.85, 0.95$ и $1 - 0$. Для каждой температуры спектр заканчивается при конечном $q_c(T)$; в точке окончания затухание обращается в нуль. В нормальном состоянии коллективная зарядовая мода является чисто релаксационной, $\omega = -i\gamma_n(q)$.

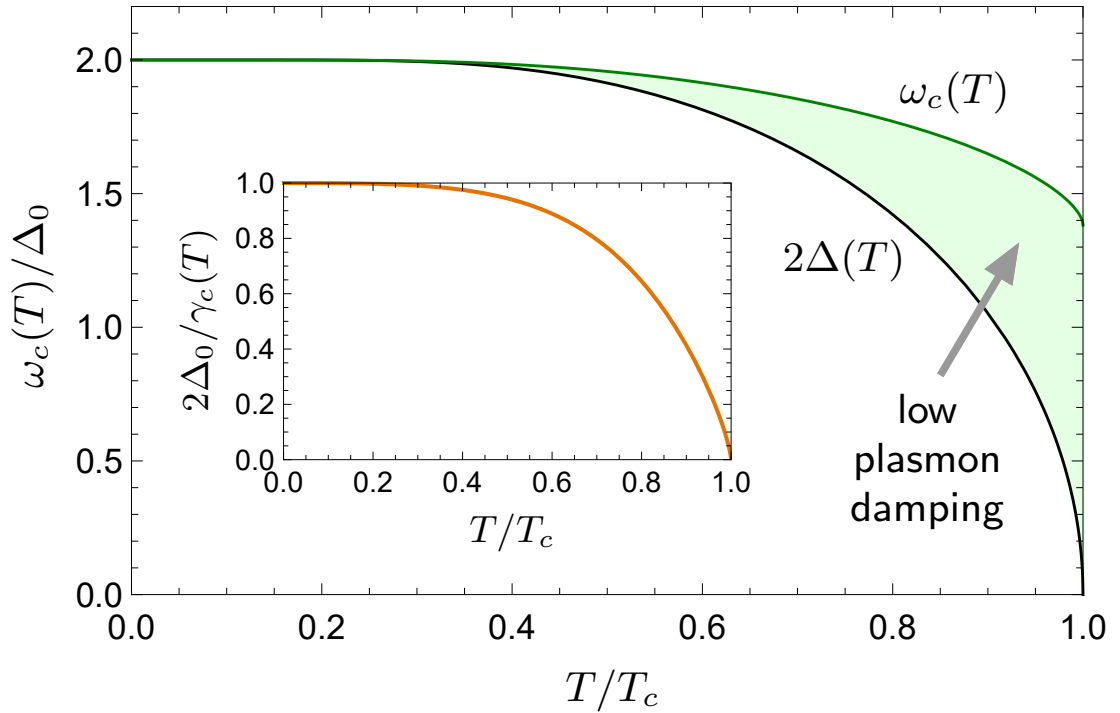


Рис. 3.4: Температурная зависимость частоты в точке окончания спектра $\omega_c(T)$ (верхняя кривая). При $T \ll T_c$ она экспоненциально близка к $2\Delta(T)$ (нижняя кривая), а при $T \rightarrow T_c - 0$ достигает $1.382 \Delta(0)$. На вставке показан импульс окончания через величину $\gamma_c(T) = \gamma_n[q_c(T)]$.

скрытые моды могут косвенно проявляться в виде максимума функции отклика [12, 34]. Поведение действительной и мнимой частей дисперсии в непосредственной окрестности перехода показано на рис. 3.5.

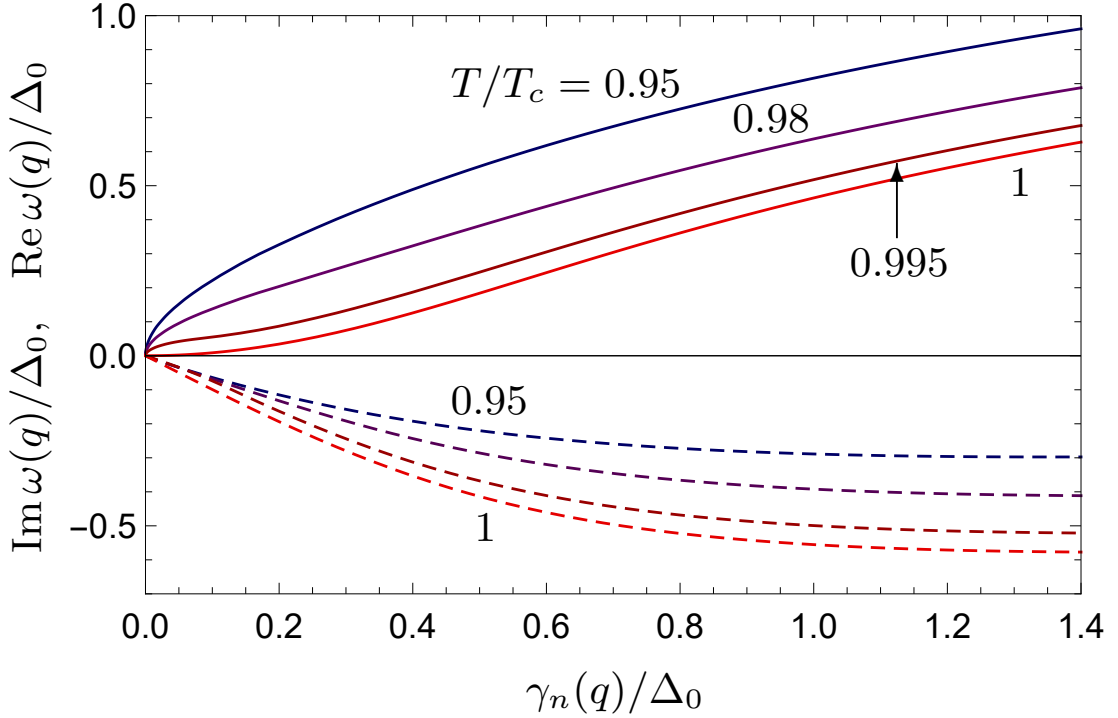


Рис. 3.5: Действительная (сплошные линии) и мнимая (штриховые линии) части $\omega(q)$ при $T/T_c = 0.95, 0.98, 0.995$ и $1 - 0$. При приближении к переходу обе части дисперсии смещаются вниз.

Для количественного анализа удобно ввести добротность

$$Q(q) = \frac{\text{Re} \omega(q)}{2|\text{Im} \omega(q)|}. \quad (3.27)$$

Ее импульсная зависимость для тех же температур представлена на рис. 3.6.

При малых q воспроизводится известное поведение $\omega \propto \sqrt{\gamma_n(q)}$ [7, 9]. Когда частота достигает масштаба $\Delta^2(T)/T_c$, добротность резко уменьшается. Однако при дальнейшем росте q она вновь возрастает, так что зависимость $Q(q)$ имеет минимум. Этот минимум превышает единицу при $T < 0.96T_c$.

Следовательно, режим сильного затухания плазмона возможен лишь в очень узком температурном интервале шириной около 4% от T_c . Даже внутри этого интервала увеличение импульса превращает затухающую моду обратно в распространяющуюся. Восстановление плазмона связано со скачком при T_c : при росте q действительная часть частоты увеличивается, а $|\text{Im} \omega|$ уменьшается. Частота входит в область между $2\Delta(T)$ и $\omega_c(T)$, где диссипация подавлена.

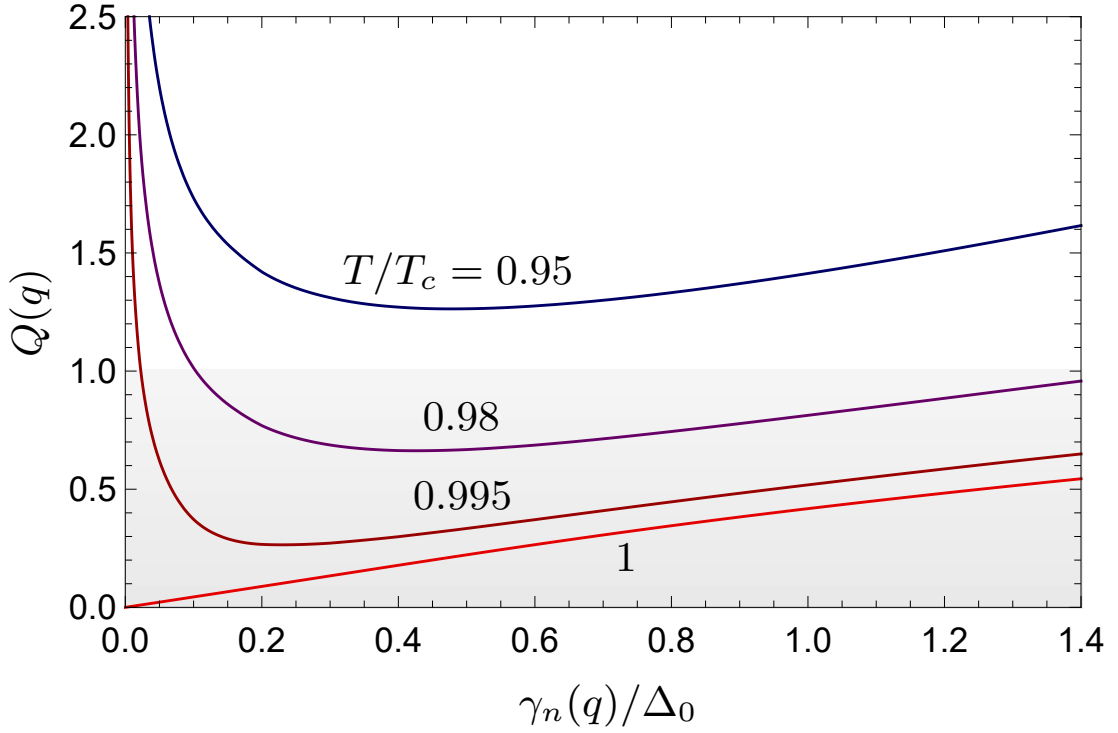


Рис. 3.6: Добротность плазмона $Q(q) = \text{Re } \omega(q) / [2 |\text{Im } \omega(q)|]$ как функция $\gamma_n(q)/T_c$ для температур, представленных на рис. 3.5.

Наблюдаемые характеристики и ограничения теории

Экспериментально плазмон может проявляться как резонанс в комплексном импедансе, микроволновом или терагерцовом отклике, а также как распространяющийся электрический импульс в длинной пленке или нанопроводе. Положение резонанса определяется $\text{Re } \omega(q)$, ширина — $2 |\text{Im } \omega(q)|$. Наиболее прямым признаком описанного в работе механизма было бы немонотонное изменение ширины линии с импульсом: после области сильного уширения резонанс должен вновь сужаться. Другим характерным признаком является конечная частота, к которой ветвь подходит при исчезающем затухании в точке окончания.

При сопоставлении с конкретным образцом необходимо учитывать электростатическое окружение. Металлический экран, подложка и конечная ширина проводника меняют $V_0(q)$ и тем самым соотношение между экспериментальным импульсом и универсальной переменной $\gamma_n(q)$. Кроме того, в реальных сильно неупорядоченных пленках возможны пространственные флуктуации щели и кулоновские поправки к одночастичной плотности состояний. Настоящая теория описывает однородный БКШ-сверхпроводник в диффузионном режиме и не включает критические флуктуации параметра порядка, локализационные эффекты и гранулярность.

Тем не менее найденные качественные свойства устойчивы внутри области применимости модели. Они следуют из причинности, калибровочной структуры фазово-зарядового сектора и аналитических свойств проводимости. В частности, существование длинноволнового уравнения (2.38) не зависит от конкретной формы двумерного ку-

лоновского потенциала, а низкотемпературное экспоненциальное подавление затухания является прямым следствием энергетической щели. Геометрия определяет отображение $q \mapsto \gamma_n(q)$, но не меняет универсальную зависимость комплексной частоты от γ_n .

С практической точки зрения результаты показывают, что сильный беспорядок не обязательно ограничивает распространение высокочастотного сигнала в сверхпроводящей структуре. В большей части температурного интервала ниже T_c плазмон остается добротным, а область существенного затухания сосредоточена близко к переходу. Более того, даже в этой области при достаточно большом импульсе мода восстанавливается. Это обстоятельство важно при проектировании протяженных сверхпроводящих линий и детекторов, в которых временная форма сигнала определяется дисперсией и затуханием плазмонного импульса.

Глава 4

Обсуждение результатов

Коллективные возбуждения сверхпроводника определяются откликом квазичастиц на нестационарные бозонные поля: электрический потенциал, фазу и амплитуду параметра порядка. Полный поляризационный оператор имеет размерность 3×3 . В отсутствие постоянного сверхтока амплитудная мода Шмида–Хиггса отделяется, а фазово-зарядовый блок 2×2 описывает плазмон и моду Карлсона–Голдмана.

Хотя микроскопический отклик имеет сложную матричную структуру, в длинноволновой плазмонной задаче вся необходимая информация сводится к оптической проводимости $\sigma(\omega, T)$. Основная техническая трудность состоит не в форме спектрального уравнения, а в корректном аналитическом продолжении проводимости в нижнюю полуплоскость. Деформация контура вокруг взаимопроникающих разрезов приводит к трем главным результатам:

1. при T_c плазмонная дисперсия испытывает скачок: сразу ниже перехода возникает конечная $\text{Re } \omega$, а затухание становится меньше нормального;
2. при каждой температуре $T < T_c$ существует точка окончания $q_c(T)$, в которой затухание исчезает и за которой физическая плазмонная ветвь отсутствует;
3. вблизи T_c плазмон, затухающий при промежуточных импульсах, восстанавливается как распространяющаяся мода при больших q .

При $T = 0$ решение существует только до оптического порога $2\Delta(0)$. При низких температурах затухание экспоненциально мало, поскольку определяется концентрацией термических квазичастиц. По мере приближения к T_c затухание заметно возрастает лишь в узком интервале порядка $0.04T_c$. В остальной части сверхпроводящей фазы плазмон остается хорошо определенным возбуждением.

Результаты применимы к тонким сильно неупорядоченным пленкам и нанопроводам, включая материалы, используемые в сверхпроводящих нанопроводниковых одnofотонных детекторах [20–22] и устройствах на квантовых фазовых проскоках [28, 29]. Низкотемпературные плазмонные импульсы могут использоваться для локализации места поглощения фотона по времени задержки [23, 24]. Найденная температурная и импульсная зависимость затухания задает ограничения на дальность распространения и временное разрешение таких схем.

Заключение

В работе построено единое микроскопическое описание плазмонного спектра грязного сверхпроводника во всем диапазоне температур ниже T_c . Из Келдышевской нелинейной сигма-модели получен фазово-зарядовый поляризационный оператор и выведено общее спектральное уравнение. В длинноволновом пределе оно сведено к уравнению, связывающему комплексную плазмонную частоту с проводимостью Маттиса–Бардина.

Выполнено аналитическое продолжение проводимости в нижнюю полуплоскость комплексной частоты путем деформации контура интегрирования по энергии. Показано, что взаимное расположение запаздывающих и опережающих разрезов принципиально изменяет спектр по сравнению с результатами, основанными только на вещественной частоте или низкочастотных асимптотиках.

При $T = 0$ плазмон не затухает, а его ветвь заканчивается при $\gamma_n[q_c(0)] = 2\Delta(0)$ и $\omega_c(0) = 2\Delta(0)$. При $T \ll T_c$ получено экспоненциально малое затухание на термических квазичастицах, выраженное формулой (3.7). Непосредственно ниже T_c получено точное уравнение скачка (3.10) и его асимптотики для малых и больших γ_n/T_c .

Для произвольных температур установлено существование точки окончания спектра $q_c(T)$, в которой затухание исчезает. Частота окончания монотонно меняется от $2\Delta(0)$ до $1.382\Delta(0)$. Вблизи перехода обнаружено восстановление распространяющегося плазмона при больших импульсах. Сильное затухание возможно только в узком интервале примерно 4% ниже T_c .

Наконец, из того же общего поляризационного оператора выведена дисперсия нейтральной моды Карлсона–Голдмана. Тем самым плазмон и CG-мода описаны как два различных решения единой микроскопической теории фазово-зарядовых колебаний грязного сверхпроводника.

Литература

- [1] V. G. Vaks, V. M. Galitskii, and A. I. Larkin, Collective excitations in a superconductor, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **41**, 1655 (1961) [Sov. Phys. JETP **14**, 1177 (1962)].
- [2] A. Schmid, The approach to equilibrium in a pure superconductor: The relaxation of the Cooper pair density, Physik der kondensierten Materie, **8**, 129 (1968).
- [3] R. V. Carlson and A. M. Goldman, Propagating order-parameter collective modes in superconducting films, Phys. Rev. Lett. **34**, 11 (1975).
- [4] A. Schmid and G. Schön, Collective Oscillations in a Dirty Superconductor, Phys. Rev. Lett. **34**, 941 (1975).
- [5] I. O. Kulik, O. Entin-Wohlman, R. Orbach, Pair susceptibility and mode propagation in superconductors: a microscopic approach, J. Low Temp. Phys. **43**, 591 (1981).
- [6] C. J. Pethick and H. Smith, *Nonequilibrium Superconductivity, Phonons and Kapitza Boundaries*, ed. by K. E. Gray (Plenum, New York, 1981).
- [7] J. E. Mooij and G. Schön, Propagating plasma mode in thin superconducting filaments, Phys. Rev. Lett. **55**, 114 (1985).
- [8] A. Moor, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, Amplitude Higgs mode and admittance in superconductors with a moving condensate, Phys. Rev. Lett. **118**, 047001 (2017).
- [9] Z. Sun, M. M. Fogler, D. N. Basov, and A. J. Millis, Collective modes and terahertz near-field response of superconductors, Phys. Rev. R **2**, 023413 (2020).
- [10] R. Shimano and N. Tsuji, Higgs mode in superconductors, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **11**, 103 (2020).
- [11] E. S. Andriyakhina, P. A. Nosov, S. Raghu, and I. S. Burmistrov, Quantum fluctuations and multifractally enhanced superconductivity in disordered thin films, J. Low Temp. Phys. **217**, 187 (2024).
- [12] P. A. Nosov, E. S. Andriyakhina and I. S. Burmistrov, Spatially resolved dynamics of the amplitude Schmid-Higgs mode in disordered superconductors, Phys. Rev. B **111**, 144512 (2025).
- [13] M. Dzero and A. Kamenev, Schmid-Higgs mode in the presence of pair-breaking interactions, Phys. Rev. B **111**, 174502 (2025).
- [14] R. Matsunaga and R. Shimano, Nonequilibrium BCS state dynamics induced by intense terahertz pulses in a superconducting NbN film, Phys. Rev. Lett. **109**, 187002 (2012).

- [15] R. Matsunaga, Y. I. Hamada, K. Makise, Y. Uzawa, H. Terai, Z. Wang, and R. Shimano, Higgs amplitude mode in the BCS superconductors $\text{Nb}_{1-x}\text{Ti}_x\text{N}$ induced by terahertz pulse excitation, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 057002 (2013).
- [16] D. Sherman, U. S. Pracht, B. Gorshunov, S. Poran, J. Jesudasan, M. Chand, P. Raychaudhuri, M. Swanson, N. Trivedi, A. Auerbach, M. Scheffler, A. Frydman, and M. Dressel, The Higgs mode in disordered superconductors close to a quantum phase transition, *Nat. Phys.* **11**, 188 (2015).
- [17] Yu. N. Ovchinnikov, Properties of thin superconducting films in high frequency fields, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59**, 128 (1970) [*Sov. Phys. JETP* **32**, 72 (1971)].
- [18] Yu. N. Ovchinnikov and A. R. Isaakyan, Electromagnetic field absorption in superconducting films, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **74**, 178 (1978) [*Sov. Phys. JETP* **41**, 91 (1978)].
- [19] M. Silaev, Nonlinear electromagnetic response and Higgs-mode excitation in BCS superconductors with impurities, *Phys. Rev. B* **99**, 224511 (2019).
- [20] G. N. Gol'tsman, O. Okunev, G. Chulkova, A. Lipatov, A. Semenov, K. Smirnov, B. Voronov, A. Dzardanov, C. Williams, and R. Sobolewski, Picosecond superconducting single-photon optical detector, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 705 (2001).
- [21] C. M. Natarajan, M. G. Tanner, and R. H. Hadfield, Superconducting nanowire single-photon detectors: physics and applications, *Supercond. Sci. Technol.* **25**, 063001 (2012).
- [22] I. E. Zadeh, J. Chang, J. W. N. Los, S. Gyger, A. W. Elshaari, S. Steinhauer, S. N. Dorenbos, V. Zwiller. Superconducting nanowire single-photon detectors: A perspective on evolution, state-of-the-art, future developments, and applications, *Appl. Phys. Lett.* **118**, 190502 (2021).
- [23] D. F. Santavicca, J. K. Adams, L. E. Grant, A. N. McCaughan, and K. K. Berggren, Microwave dynamics of high aspect ratio superconducting nanowires studied using self-resonance, *J. Appl. Phys.* **119**, 234302 (2016).
- [24] V. Andreev, A. Semenov, N. Manova, V. Seleznev, S. Svyatodukh, A. Divochiy, P. Morozov, and G. Goltsman, Dark counts in SNSPD studied with spatial resolution, *IEEE T. Appl. Supercon.* **34**, 2200305 (2024).
- [25] S. J. Allen, Jr., D. C. Tsui, and R. A. Logan, Observation of the two-dimensional plasmon in silicon inversion layers, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 980 (1977).
- [26] T. N. Theis, Plasmons in inversion layers, *Surf. Sci.* **98**, 515 (1980).
- [27] I. V. Kukushkin, J. H. Smet, S. A. Mikhailov, D. V. Kulakovskii, K. von Klitzing, and W. Wegscheider, Observation of Retardation Effects in the Spectrum of Two-Dimensional Plasmons, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 156801 (2003).

- [28] J. E. Mooij and Y. V. Nazarov, Superconducting nanowires as quantum phase-slip junctions, *Nat. Phys.* **2**, 169 (2006).
- [29] R. S. Shaikhaidarov, K. H. Kim, J. W. Dunstan, I. V. Antonov, S. Linzen, M. Ziegler, D. S. Golubev, V. N. Antonov, E. V. Il'ichev, and O. V. Astafiev, Quantized current steps due to the a.c. coherent quantum phase-slip effect, *Nature* **608**, 45 (2022).
- [30] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin, and M. A. Skvortsov, Keldysh action for disordered superconductors, *Phys. Rev. B* **61**, 12361 (2000).
- [31] D. C. Mattis and J. Bardeen, Theory of the anomalous skin effect in normal and superconducting metals, *Phys. Rev.* **111**, 412 (1958).
- [32] Ya. V. Fominov, M. Houzet, and L. I. Glazman, Surface impedance of superconductors with weak magnetic impurities, *Phys. Rev. B* **84**, 224517 (2011).
- [33] A. V. Polkin and M. A. Skvortsov, Optical conductivity of a dirty current-carrying superconductor, *Phys. Rev. B* **113**, 174516 (2026).
- [34] D. Phan and A. V. Chubukov, Following the Higgs mode across the BCS-BEC crossover in two dimensions, *Phys. Rev. B* **107**, 134519 (2023).
- [35] K. S. Tikhonov, M. A. Skvortsov, and T. M. Klapwijk, Superconductivity in the presence of microwaves: Full phase diagram, *Phys. Rev. B* **97**, 184516 (2018).
- [36] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (2nd ed., Dover Publications, New York, 2004).