
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

**НЕЛИНЕЙНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ В НЕПРЕРЫВНОМ
ПРЕДЕЛЕ МОДЕЛИ ЧАЛКЕРА-КОДДИНГТОНА ДЛЯ
СПИНОВОГО КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА**

(магистерская диссертация)

Студент:

Катков Денис Сергеевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Бурмистров Игорь Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2026

Аннотация

Спиновый квантовый эффект Холла является родственником целочисленного квантового эффекта Холла, характеризующегося целочисленно четно квантованной спиновой холловской проводимостью. В данной работе формулируется и исследуется модель набора одномерных линков с N каналов на каждом и со случайным туннелированием между каналами и линками. Рассматриваемая модель сохраняет фундаментальные симметрии спинового квантового эффекта Холла. Продемонстрировано, что в общем случае триплетный сектор теории не отцепляется от синглетного сектора. В пределе больших N систематически выводится эффективная длинноволновая низкоэнергетическая теория поля, представляющая собой нелинейную сигма-модель. Анализ показывает, что, хотя триплетные моды обычно массивны и не влияют на нелинейную сигма-модель при больших N , существуют определенные условия, при которых эти моды становятся «мягкими», тем самым увеличивая длину ультрафиолетовой обрезки модели. Кроме того, при вычислении затравочных продольной и холловской спиновых проводимостей обнаруживается, что стандартное приближение седловой точки не работает в режимах со значительной туннельной асимметрией между четными и нечетными линками.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю И. С. Бурмистрову за постановку задачи, постоянное внимание к работе, многочисленные обсуждения и помощь на всех этапах исследования.

Автор также благодарит М. В. Парфенова за плодотворное сотрудничество, существенный вклад в развитие работы, полезные обсуждения и помощь при проверке вычислений.

Автор признателен Я. Фоминову, И. Грузбергу и П. Островскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 24-12-00357. Автор также выражает благодарность Фонду развития теоретической физики и математики «БАЗИС» за личную поддержку.

Содержание

1 Введение	6
1.1 Целочисленный квантовый эффект Холла	6
1.2 Спиновый квантовый эффект Холла	8
1.3 Цели работы	9
2 Микроскопическая модель	10
2.1 Действие модели	10
2.2 Свойства беспорядка	12
2.3 Симметрии действия	14
3 Получение и анализ действия, усредненного по беспорядку	15
3.1 Усреднение по беспорядку	15
3.2 Баллистическая ренормализационная группа	16
4 Вывод нелинейной сигма-модели	19
4.1 Преобразование Хаббарда-Стратоновича	19
4.2 Седло теории	20
4.2.1 Седловая точка	20
4.2.2 Массивные моды	21
4.3 Случай сильного диагонального беспорядка	22
4.4 Произвольная матрица туннелирования	26
5 Исследование триплетных мод	31
5.1 Поправки к $NL\sigma M$ от триплетных мод	31
5.2 Возможное смягчение триплетных мод	33
6 Заключение	35
Список литературы	38
7 Приложения	44
7.1 Детали вычисления для баллистической РГ	44
7.2 О нулевых собственных значениях матриц туннелирования	45

7.2.1	Случай тридиагональной матрицы беспорядка	45
7.2.2	Случай матриц туннелирования общего вида	47
7.3	Вид поправок от якобиана для матричного поля 4×4 класса C	48

1 Введение

Локализация Андерсона в системе невзаимодействующих фермионов в случайном потенциале известна уже более полувека [1] и до сих пор привлекает внимание исследователей. Из работ [2, 3] известно, что существует десять принципиально различных симметричных классов неупорядоченных гамильтонианов для топологических изоляторов и сверхпроводников без взаимодействия, называемых классами симметрии Альтланда-Цирнбауэра (см. обзор [4]). Для каждой размерности пространства в пяти из десяти классов реализуется нетривиальная топология, которая может порождать определенные физические явления [5]. Локализационные эффекты в различных симметричных классах могут исследоваться с помощью соответствующей эффективной низкоэнергетической длинноволновой полевой теории - нелинейной сигма-модели ($N\sigma M$), которая может иметь топологический член в действии (см. обзор [6]). Топологический член возникает в тех классах симметрии и размерностях, где допускается нетривиальная топология, и играет ключевую роль в описании эффектов, отсутствующих в стандартной картине андерсоновской локализации. Однако в двух пространственных измерениях, $d = 2$, топологический андерсоновский переход (переход между топологически различными фазами) обычно описывается сильно-связанным режимом $N\sigma M$, что затрудняет его контролируемое аналитическое исследование.

1.1 Целочисленный квантовый эффект Холла

Вероятно, наиболее известным примером таких явлений является целочисленный квантовый эффект Холла (iqHe), экспериментально обнаруженный в 1980 году [7]. С точки зрения классификации по симметриям гамильтониана эта задача соответствует двумерной системе симметричного класса A.

Критическая теория перехода между плато, то есть различными топологическими фазами с различными целочисленными значениями холловской проводимости, до сих пор остается предметом дискуссий в научном сообществе [8–13]. Интересно, что недавно была обнаружена зависимость критического индекса локализационной длины от геометрического беспорядка [14–18]. Это относится не только к iqHe, но также и к аналогичному явлению другого симметричного класса - спиновому квантовому эффекту Холла, о котором идет речь в следующем разделе [19].

С другой стороны, для задачи $iqHe$ в режиме слабой связи (металлическом пределе) построена $NL\sigma M$ с топологическим членом [20], непертурбативный анализ которой позволяет понять структуру фазовой диаграммы [21] и объяснить механизм квантования холловской проводимости [22–24], что дает целостную картину физики $iqHe$ в металлическом пределе, подтверждаемую экспериментальными наблюдениями [25–29].

При исследовании перехода в $iqHe$ ключевой является модель Чалкера-Коддингтона [30], представляющая собой решетку хиральных каналов, в узлах которой разрешены туннелирования с амплитудами $t_{\pm}$ (см. Рис. 1). Данная модель удобна для численного исследования [31] и может быть сведена к $NL\sigma M$ [32].

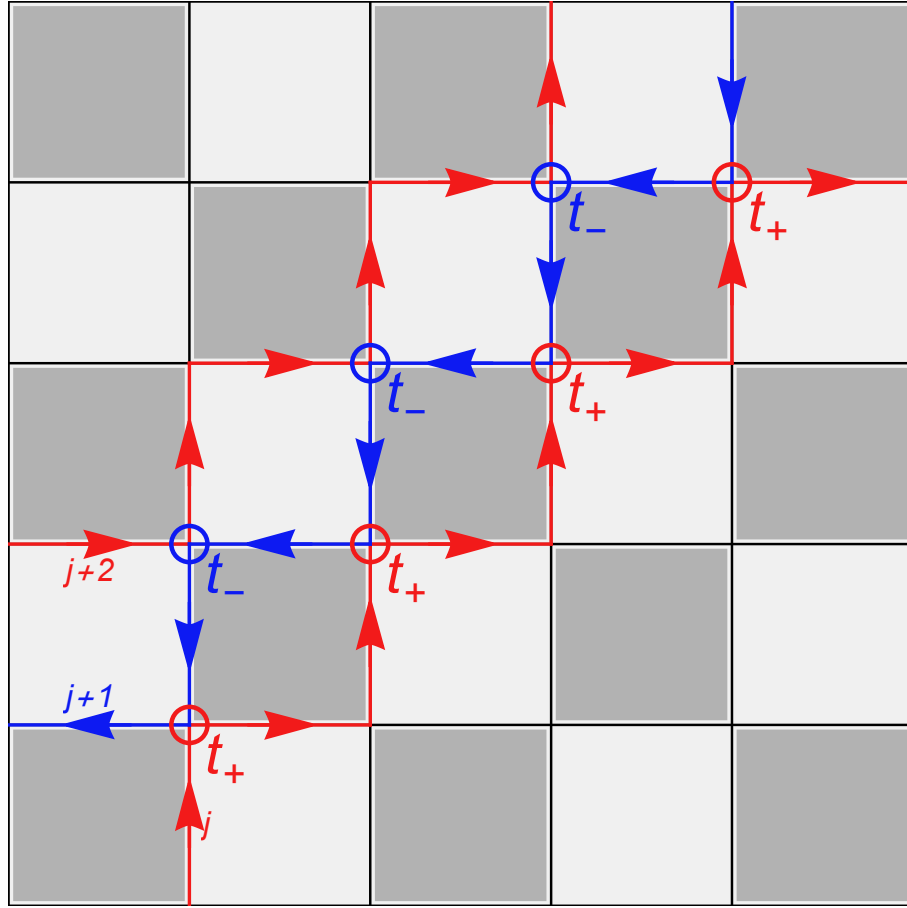


Рис. 1: Схематическое изображение модели Чалкера-Коддингтона. На ребрах решетки существуют одномерные хиральные каналы, чередующие направление движения слева направо и сверху вниз (различные направления отмечены красным и синим цветами). В вершинах решетки возможно туннелирование между каналами с чередующимися амплитудами $t_{\pm}$.

1.2 Спиновый квантовый эффект Холла

Предметом исследования данной работы является близкий родственник iqHe , спиновый квантовый эффект Холла (sqHe). Физически sqHe соответствует квантованию спиновой холловской проводимости, связывающей спиновый ток с градиентом магнитного поля. Эта задача принадлежит к симметричному классу $\mathcal{C}$, описывающему сверхпроводники с симметрией Боголюбова-де Жена и нарушенной симметрией обращения времени [33, 34].

С теоретическим пониманием sqHe ситуация в некотором смысле противоположна iqHe . Режим сильной связи в sqHe также возможно изучать с помощью модели Чалкера-Коддингтона, формулируемой аналогично, однако в классе $\mathcal{C}$ по киральным линкам текут сверхпроводящие киральные состояния. Для модели Чалкера-Коддингтона в классе $\mathcal{C}$ оказывается возможным свести задачу к классической задаче перколяции, что позволяет получать аналитические результаты о режиме сильной связи. В частности, для перехода между различными топологическими фазами, соответствующими разным плато проводимости, известны критический индекс $\nu = 4/3$ локализационной длины $\xi \sim |E - E_c|^{-\nu} \sim ||t_+| - |t_-||^{-\nu}$ и продольная проводимость в критической точке $g_* = \sqrt{3}/2$ (в единицах кванта проводимости $G_0^s = \hbar/(8\pi)$) [35, 36]. Эти результаты подтверждаются численными расчетами [37, 38].

Из известных результатов следует отсутствие локальной конформной симметрии в точке перехода sqHe , что затрудняет поиск критической теории для этого перехода [39, 40]. Поэтому для sqHe , как и для iqHe , актуален непертурбативный анализ соответствующей $\text{NL}\sigma\text{M}$ в режиме слабой связи. Однако, продвижения в таком анализе начали появляться только недавно [41, 42]. Кроме того, недавно для модели Чалкера-Коддингтона класса $\mathcal{C}$ был осуществлен вывод суперсимметричной $\text{NL}\sigma\text{M}$ класса $\mathcal{C}$ [43]. Здесь следует заметить, что в стандартной формулировке модели Чалкера-Коддингтона амплитуды $t_{\pm}$ фиксированы; случайность обычно вводится иначе, например через фазы или геометрию сети. Для класса симметрии A (iqHe) была предложена модель со случайными туннельными элементами между линками [44]. Такую модель можно мыслить как непрерывный аналог модели Чалкера-Коддингтона. Для этой модели осуществлен вывод $\text{NL}\sigma\text{M}$, однако, поскольку система находится в режиме сильной связи, для полученной теории нет седлового параметра. В классе $\mathcal{C}$ аналогичного вывода $\text{NL}\sigma\text{M}$ из модели со случайными амплитудами туннелирования до сих пор не существовало.

1.3 Цели работы

Подытоживая предыдущие подразделы, для $iq\text{He}$ существует хорошо развитая теория в режиме слабой связи, формулируемая через $NL\sigma M$, но в режиме сильной связи до сих пор много неясного. С другой стороны, для $sq\text{He}$ благодаря отображению модели Чалкера-Коддингтона на перколяцию получено много результатов в режиме сильной связи, однако режим слабой связи мало изучен. Данная работа посвящена явлению $sq\text{He}$ в режиме слабой связи (в металлическом пределе).

В данной работе модель для $sq\text{He}$, предложенная в работе [45], обобщается на случай произвольного числа каналов N на каждом линке при сохранении наиболее общего вида случайных туннельных элементов, допустимого симметриями класса C . В пределе $N \gg 1$ из исходной микроскопической модели выводится эффективная низкоэнергетическая длинноволновая теория, $NL\sigma M$. Большое число каналов N играет роль параметра металличности и одновременно контролирует седловое приближение. Особое внимание уделяется техническим тонкостям вывода, связанным с ролью возникающего при выводе триплетного сектора и пределом применимости седлового приближения.

2 Микроскопическая модель

Для исследования sqHe рассмотрим двумерную систему, гамильтониан которой принадлежит симметричному классу C. Предлагаемая модель представляет собой набор одномерных хиральных фермионных линков, нумеруемых индексом $j = 1, \dots, M$ с чередующимися по знаку на четных и нечетных линках скоростями $v_j = (-1)^j v$. Это чередование скоростей может быть интерпретировано как хиральное движение в перпендикулярном магнитном поле. Кроме того, на каждом линке имеется N каналов фермионов со спином $1/2$. Эти каналы различаются индексом $f = 1, \dots, N$ ¹.

Между различными линками разрешается туннелирование со случайными амплитудами. Схематическое изображение модели приведено на рис. 2. В дальнейшем для усреднения по беспорядку используется метод реплик, поэтому вводятся N_r реплик, нумеруемых индексом $\alpha = 1, \dots, N_r$.

2.1 Действие модели

Действие для такой модели во мнимом времени при температуре $T = 1/\beta$ можно записать следующим образом:

$$\mathcal{S} = \int_0^\beta d\tau \int dy \left[\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \bar{\psi}_\sigma (i\hat{V}\partial_y - \partial_\tau - \hat{\Sigma}_0) \psi_\sigma - \bar{\psi}_\uparrow \hat{\Sigma}_+ \bar{\psi}_\downarrow^T - \psi_\downarrow^T \hat{\Sigma}_- \psi_\uparrow - \bar{\psi}_\uparrow \hat{\Sigma}_3^{(Z)} \psi_\uparrow + \bar{\psi}_\downarrow \hat{\Sigma}_3^{(Z)} \psi_\downarrow \right]. \quad (1)$$

Здесь для краткости введены векторные гассмановы поля $\bar{\psi}_\sigma = \{\bar{\psi}_{\sigma,\alpha,j,f}(y)\}$ и $\psi_\sigma = \{\psi_{\sigma,\alpha,j,f}(y)\}^T$, соответствующие операторам создания и уничтожения фермионов соответственно. Здесь $\hat{V} = 1_{N_r} \otimes \hat{v} \otimes 1_N$ представляет собой матрицу скорости, в которой $\hat{v}_{jj'} = v_j \delta_{jj'}$. Зеemannовское поле входит через матрицу, зависящую от координаты y , действующую в пространствах линков, реплик и каналов:

$$\hat{\Sigma}_3^{(Z)}(y) = 1_{N_r} \otimes \hat{b}(y) \otimes 1_N. \quad (2)$$

¹Во избежание путаницы далее под линком понимается набор каналов, распространяющихся вдоль оси y и имеющих одно и то же направление движения (см. Рис. 2). Под каналом понимается один из хиральных фермионных каналов со спином $1/2$ внутри данного линка. Всего внутри каждого линка имеется N таких каналов.

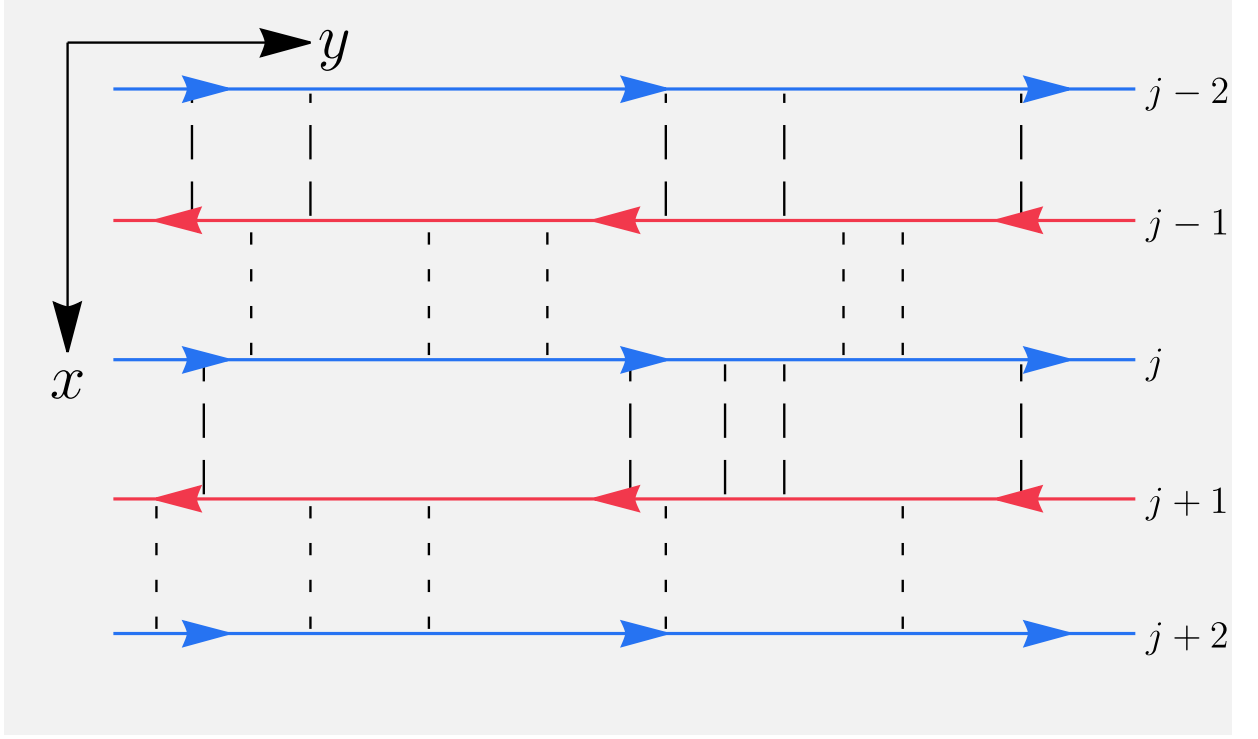


Рис. 2: Схема исследуемой в работе модели. Красными и синими линиями изображены одномерные хиральные линки с разными знаками скорости. Пунктирные линии иллюстрируют случайное туннелирование между линками; при этом четные и нечетные амплитуды туннелирования имеют различные дисперсии.

Здесь $\hat{b}_{jj'}(y) = \mu_B B_j(y) \delta_{jj'}$ описывает пространственно-зависимое магнитное поле $B_j(y)$. Различным типам беспорядка соответствуют матрицы

$$\hat{\Sigma}_0(y) = 1_{N_r} \otimes (\hat{\eta}^{(3)}(y) + i\hat{\eta}^{(0)}(y)), \quad \hat{\Sigma}_{\pm}(y) = 1_{N_r} \otimes (\hat{\eta}^{(1)}(y) \mp i\hat{\eta}^{(2)}(y)). \quad (3)$$

Из условия эрмитовости гамильтониана следует, что матрицы $\eta^{(1,2,3)}$ действительны и симметричны, тогда как $\eta^{(0)}$ действительна и антисимметрична:

$$\begin{aligned} \eta^{(c)}(y) &= \eta^{(c)T}(y) = \eta^{(c)\dagger}(y), \quad c = 1, 2, 3; \\ \eta^{(0)}(y) &= -\eta^{(0)T}(y) = -\eta^{(0)\dagger}(y). \end{aligned} \quad (4)$$

В действии присутствуют аномальные члены типа $\bar{\psi}\bar{\psi}$ или $\psi\psi$, не сохраняющие число частиц. Стандартный способ работы с таким действием состоит в удвоении переменных, то есть во введении пространства Намбу. Кроме того, от представления действия во мнимом времени можно перейти к фермионным мацубаровским частотам $\varepsilon_n = \pi T(2n + 1)$, что добавляет дополнительный индекс ε_n к фермионным операторам.

Оказывается удобным использовать следующий поворот фермионных полей:

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ L_0 \bar{\psi}_{\downarrow}^T \\ -i\psi_{\downarrow} \\ iL_0 \bar{\psi}_{\uparrow}^T \end{pmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_{\uparrow}, \psi_{\downarrow}^T L_0, i\bar{\psi}_{\downarrow}, -i\psi_{\uparrow}^T L_0 \right), \quad (5)$$

где L_0 меняет местами положительные и отрицательные мацубаровские частоты

$$L_0 = \ell_0 \otimes 1_{N_r} \otimes 1_M \otimes 1_{\mathbf{N}}, \quad (\ell_0)_{\varepsilon_n, \varepsilon_m} = \delta_{\varepsilon_n, -\varepsilon_m}. \quad (6)$$

После удвоения переменных возникают два набора матриц Паули: σ_c действуют в спиновом пространстве, а s_c - в пространстве Намбу. Для записи (5) матрицы с $c = 1$ принимают следующий вид:

$$\sigma_0 \otimes s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \otimes s_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В терминах $\bar{\Xi}, \Xi$ действие переписывается через гамильтониан:

$$\mathcal{S} = \int dy \bar{\Xi} \mathcal{H} \Xi, \quad \mathcal{H} = i\check{V}\partial_y + i\check{\varepsilon} - i\check{\Upsilon}_0 - \sum_{c=1}^3 \check{\Upsilon}_c - \check{\Upsilon}^{(Z)}, \quad (8)$$

где члены $\check{\Upsilon}_c = 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes \hat{\eta}^{(c)} \otimes s_0 \otimes \sigma_c$ действуют в пространствах линков, каналов и спина и кодируют беспорядок, $\check{\Upsilon}^{(Z)} = 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes \hat{b} \otimes s_3 \otimes \sigma_0$ действует в пространствах линков и Намбу и содержит зеемановское поле, а $\check{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} \otimes 1_{N_r} \otimes 1_M \otimes 1_{\mathbf{N}} \otimes s_0 \otimes \sigma_0$ действует в мацубаровском пространстве и дает энергии $\hat{\varepsilon}_{\varepsilon_n, \varepsilon_m} = \varepsilon_n \delta_{\varepsilon_n, \varepsilon_m}$.

Следует пояснить, что, хотя $\check{\Upsilon}^{(Z)}$ пропорциональна σ_0 , соответствующий зеемановский член в действии (8) по-прежнему корректно воспроизводит структуру спин-зависимого члена в (1). Дело в том, что преобразование (5) содержит поворот как в спиновом пространстве, так и в пространстве Намбу. При таком изменении базиса исходная спиновая матрица σ_3 переходит в матрицу Намбу s_3 .

2.2 Свойства беспорядка

В данной микроскопической модели беспорядок вводится через туннельные члены со случайными амплитудами: как внутри одного линка, так и между соседними линками, с пе-

ремешиванием канального индекса f . В таком случае, с учетом требования эрмитовости гамильтониана беспорядок можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{jf,j'f'}^{(c)} &= t_j^{(c)} \nu_{ff'}^{(c)} \delta_{j',j+1} + t_{j'}^{(c)} \nu_{f'f}^{(c)} \delta_{j,j'+1} + \mu_j^{(c)} \phi_{ff'}^{(c)} \delta_{jj'}, \\ \hat{\eta}_{jf,j'f'}^{(0)} &= t_j^{(0)} \nu_{ff'}^{(0)} \delta_{j',j+1} - t_{j'}^{(0)} \nu_{f'f}^{(0)} \delta_{j,j'+1}.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь $c = 1, 2, 3$, а $t_j^{(0)}(y)$, $t_j^{(c)}(y)$, и $\mu_j^{(c)}(y)$ - независимые действительные случайные поля, заданные на линках и имеющие гауссово распределение с нулевым средним. Их дисперсии обозначаются как:

$$\begin{aligned}\langle t_j^{(0)}(y) t_{j'}^{(0)}(y') \rangle &= \delta_{jj'} \Delta_j \delta(y - y'), \\ \langle t_j^{(c)}(y) t_{j'}^{(c')} (y') \rangle &= \delta_{cc'} \delta_{jj'} \gamma_j \delta(y - y'), \\ \langle \mu_j^{(c)}(y) \mu_{j'}^{(c')} (y') \rangle &= \delta_{cc'} \delta_{jj'} m_j \delta(y - y').\end{aligned}\quad (10)$$

Также предполагается $\Delta_j, \gamma_j, m_j > 0$. Независимость коррелятора $\langle t_j^{(c)}(y) t_{j'}^{(c')} (y') \rangle$ от индекса $c = 1, 2, 3$ отражает инвариантность задачи относительно спиновых поворотов $SU(2)$. Действительные матрицы в пространстве типов фермионов $\nu^{(a)}$ и $\phi^{(a)}$ также имеют гауссовое распределение с нулевым средним. Кроме того, для сохранения эрмитовости гамильтониана необходимо предположить симметричность $\phi^{(c)}$, то есть $\phi^{(c)} = \phi^{(c)T}$. В таком случае дисперсии можно записать как:

$$\begin{aligned}\langle \phi_{ff'}^{(c)} \phi_{f_1 f'_1}^{(c')} \rangle &= \frac{1}{2} \delta_{cc'} (\delta_{ff_1} \delta_{f' f'_1} + \delta_{f' f_1} \delta_{ff'_1}), \\ \langle \nu_{ff'}^{(c)} \nu_{f_1 f'_1}^{(c')} \rangle &= \delta_{cc'} \delta_{ff_1} \delta_{f' f'_1}, \\ \langle \nu_{ff'}^{(0)} \nu_{f_1 f'_1}^{(0)} \rangle &= \delta_{ff_1} \delta_{f' f'_1}.\end{aligned}\quad (11)$$

Таким образом, наиболее общая модель класса C, рассмотренная в работе [45], обобщается здесь на случай произвольного числа каналов N .

В таком случае туннельный член в гамильтониане, рассматриваемый как матрица 2×2 в спиновом пространстве принимает вид

$$\mathcal{T}_j = i t_j^{(0)} \sigma_0 + \sum_{c=1}^3 t_j^{(c)} \sigma_c, \quad (12)$$

и имеет собственные значения

$$t_j^{(\pm)} = i t_j^{(0)} \pm \sqrt{t_j^{(1)2} + t_j^{(2)2} + t_j^{(3)2}}. \quad (13)$$

Симметрия относительно поворота спина отражается в равенстве $|t_j^{(+)}| = |t_j^{(-)}|$. Из соотношений (10) нетрудно получить средние значения квадрата амплитуды и квадрата синуса фазы собственных чисел:

$$\langle |t_j^{(\pm)}|^2 \rangle = \lambda_j = \Delta_j + 3\gamma_j, \quad \langle \sin^2(\arg t_j^{(\pm)}) \rangle = \frac{\Delta_j}{(\sqrt{\Delta_j} + \sqrt{\gamma_j})^2}. \quad (14)$$

Заметим, что при $\Delta_j = \gamma_j$, вторая формула дает $\langle \sin^2(\arg t_{\pm}) \rangle = 1/4$. Это соответствует равномерному распределению направления единичного вектора на гиперсфере в пространстве $t_j^{(0)}, t_j^{(1)}, t_j^{(2)}, t_j^{(3)}$.

2.3 Симметрии действия

Важно обсудить, какими симметриями обладает действие исследуемой модели. Во-первых, как отмечалось выше, гамильтониан (1) содержит аномальные члены, не сохраняющие число частиц. Поэтому зарядовая симметрия $U(1)$ в данной модели нарушена. Кроме того, после поворота (5) можно увидеть, что новые полевые операторы не являются независимыми:

$$\bar{\Xi} = \Xi^T \hat{C}. \quad (15)$$

Их связь осуществляется через матрицу зарядового сопряжения

$$\hat{C} = L_0 \otimes (is_2) \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \otimes \sigma_2 \\ -L_0 \otimes \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\hat{C}^2 = -1, \quad \hat{C}^T = \hat{C}. \quad (17)$$

Такая связь между полями является проявлением симметрии Боголюбова-де-Жена (БдЖ). Соответственно, для гамильтониана выполняется соотношение $\mathcal{H}^T = \hat{C}\mathcal{H}\hat{C}$.

В отсутствие зеемановского поля, $\check{\Upsilon}^{(Z)} = 0$, действие (8) становится тривиальным в пространстве Намбу, поскольку не содержит нетривиальных матриц $s_{1,2,3}$. Таким образом, действие без зеемановского поля инвариантно относительно глобальных поворотов $SU(2)$ в пространстве Намбу.

3 Получение и анализ действия, усредненного по беспорядку

3.1 Усреднение по беспорядку

Представим действие в виде суммы чистой части и части, содержащей беспорядок:

$$\mathcal{S} = \int dy \bar{\Xi} \left(i \check{V} \partial_y + i \check{\varepsilon} - \check{\Upsilon}^{(Z)} \right) \Xi + \mathcal{S}_{\text{dis}}, \quad (18)$$

при

$$\mathcal{S}_{\text{dis}} = - \int dy \sum_j \left[\bar{\Xi}_j \Phi_j \Xi_j + 2 \bar{\Xi}_j \mathcal{N}_j \Xi_{j+1} \right]. \quad (19)$$

Здесь беспорядок записан через матрицы, описывающие туннелирование внутри линка и между соседними линками:

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \sum_{c=1}^3 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes \phi^{(c)} \otimes s_0 \otimes (\mu_j^{(c)} \sigma_c), \\ \mathcal{N}_j &= i t_j^{(0)} 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes \nu^{(0)} \otimes s_0 \otimes \sigma_0 + \sum_{c=1}^3 t_j^{(c)} 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes \nu^{(c)} \otimes s_0 \otimes \sigma_c. \end{aligned} \quad (20)$$

Усреднение по амплитудам туннелирования выполняется стандартным образом для гауссовых случайных величин с нулевым средним: $\langle e^\xi \rangle = e^{\langle \xi^2 \rangle / 2}$. Удобно ввести матрицы, действующие в пространствах мацубаровских частот, реплик и Намбу:

$$[D_j^{(c)}]_{\varepsilon_n, \alpha, s; \varepsilon_m, \beta, s'} = \text{tr}_{\mathbf{N} \times 2} \sigma_c \Xi_{\varepsilon_n, \alpha, j, s} \bar{\Xi}_{\varepsilon_m, \beta, j, s'}, \quad c = 0, 1, 2, 3. \quad (21)$$

Матрицы $D_j^{(c)}$ не имеют свободных индексов спина и канала, поскольку по этим пространствам в определении (21) берется след. Матрицы $D_j^{(c)}$ наследуют от фермионных полей симметричные ограничения, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} D_j^{(0)} &= -C D_j^{(0)T} C, \quad D_j^{(c)} = C D_j^{(c)T} C, \quad c = 1, 2, 3 \\ C &= \ell_0 \otimes 1_{N_r} \otimes s_2, \quad C^2 = 1, \quad C^T = -C. \end{aligned} \quad (22)$$

После усреднения по беспорядку матрицы $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ можно свернуть с помощью следствий из тождеств Фирца:

$$\begin{aligned} \text{tr}_\sigma \sigma A \sigma B &= 2 \text{tr}_\sigma A \text{tr}_\sigma B - \text{tr}_\sigma AB \\ \text{tr}_\sigma \sigma A \text{tr}_\sigma \sigma B &= 2 \text{tr}_\sigma AB - \text{tr}_\sigma A \text{tr}_\sigma B, \end{aligned} \quad (23)$$

где tr_σ означает след только по спиновому пространству. Тогда в терминах матриц $D_j^{(c)}$ усредненное действие записывается в компактном виде

$$\mathcal{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{S}_{\text{dis}}^2 \rangle = -\frac{1}{2} \int dy \sum_{j,j'} \sum_{c=0}^3 \beta_{jj'}^{(c)} \text{tr} D_j^{(c)} D_{j'}^{(c)}, \quad (24)$$

где матрицы $\beta_{jj'}^{(c)}$ в пространстве линков являются тридиагональными, содержат параметры беспорядка и в дальнейшем именуются матрицами туннелирования

$$\begin{aligned} \beta_{jj'}^{(0)} &= \frac{3}{2} m_j \delta_{jj'} + \lambda_j \delta_{j',j+1} + \lambda_{j'} \delta_{j,j'+1}, \\ \beta_{jj'}^{(c)} &= \frac{1}{2} m_j \delta_{jj'} + (\gamma_j - \Delta_j) \delta_{j',j+1} + (\gamma_{j'} - \Delta_{j'}) \delta_{j,j'+1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Следует отметить, что после усреднения по беспорядку в действии можно увидеть дополнительную симметрию, реализуемую глобальными поворотами $\text{SU}(2)$ в спиновом пространстве. Более того, в специальном случае $\Delta_j = \gamma_j$ эта симметрия усиливается до локальной по линкам $\Xi_j \rightarrow u_j \Xi_j$ и $\bar{\Xi}_j \rightarrow \bar{\Xi}_j u_j^\dagger$. Именно такой частный случай рассматривается в работах [45, 46]. Кроме того, при $N = 1$ и $\Delta_j = \gamma_j$ триплетные матрицы $D_j^{(c)}$, с $c = 1, 2, 3$ отцепляются от действия (24). В данной работе во всех последующих разделах рассматривается наиболее общий случай и, следовательно, наличие этой дополнительной локальной симметрии не предполагается автоматически.

3.2 Баллистическая ренормализационная группа

В данном разделе рассматривается ренормализация полученного усреднением по беспорядку действия (18) и (24), при пренебрежении зеемановским полем. Как будет показано ниже, поток баллистической ренормализационной группы генерирует связи между ближайшими линками. Поэтому на масштабах длины ультрафиолетовой обрезки, матрица туннелирования $\beta_{jj'}^{(c)}$ в общем случае уже не является тридиагональной.

По стандартному алгоритму для ренормализационной группы, фермионные поля разделяются на быструю и медленную компоненты в пространстве импульсов на масштабе импульсов q_Λ . Поправка к матрице туннелирования $\beta_{jj'}^{(c)}$ возникает из второго порядка по эффективному взаимодействию (24). Для ее вычисления в произведении двух четверных фермионных членов четыре из восьми фермионных полей считаются быстрыми и усред-

няются:

$$\frac{1}{2}\langle \mathcal{S}_{\text{av}}^2 \rangle_0 = \frac{1}{2} \int dy dy' \sum_{jj'j_1j'_1} \sum_{c,c'} \beta_{jj'}^{(c)} \beta_{j_1j'_1}^{(c')} \sum_{z_k} [D_j^{(c)}(y)]_{z_1;z_2} [D_{j'_1}^{(c')}(y')]_{z_3;z_4} \left\langle [D_{j'}^{(c)}(y)]_{z_2;z_1} [D_{j_1}^{(c')}(y')]_{z_4;z_3} \right\rangle_0. \quad (26)$$

Здесь составной индекс z_k включает переменные $\{\varepsilon_n, \alpha, s\}$. Из всех возможных спариваний быстрых фермионных полей следует оставить только те, которые дают вклад, пропорциональный числу каналов N в одном линке. Остальные спаривания дают поправки порядка $O(N^0)$, которыми можно пренебречь в пределе $N \gg 1$. Усреднение $\langle \dots \rangle_0$ осуществляется с действием $\mathcal{S}_0 = \int dy \bar{\Xi} (i\tilde{V}\partial_y + i\tilde{\varepsilon}) \Xi$, соответствующим (18) в отсутствие беспорядка и зеemannовского поля. Усреднение дает (технические детали см. в 7.1):

$$\frac{1}{2}\langle \mathcal{S}_{\text{av}}^2 \rangle_{\text{fast}} \simeq \frac{N}{2\pi v^2} \int_{q_\Lambda}^{\infty} \frac{dq}{q^2} \int dy \sum_{c=0}^3 \sum_{jj'} (\beta^{(c)} \beta^{(c)})_{jj'} \text{tr} D_j^{(c)}(y) D_{j'}^{(c)}(y). \quad (27)$$

Введя безразмерную матрицу туннелирования, зависящую от импульсной обрезки, $\bar{\beta}^{(c)} = N\beta^{(c)}/(\pi v^2 q_\Lambda)$, можно записать уравнение ренормализационной группы для параметров беспорядка

$$-\frac{d\bar{\beta}^{(c)}}{d \ln q_\Lambda} = \bar{\beta}^{(c)} - (\bar{\beta}^{(c)})^2. \quad (28)$$

Решение такого матричного дифференциального уравнения удобно записать в терминах обратных матриц:

$$(\bar{\beta}^{(c)}(q_\Lambda))^{-1} = \mathbb{I} + [(\bar{\beta}^{(c)}(q_{\Lambda,0}))^{-1} - \mathbb{I}] \frac{q_\Lambda}{q_{\Lambda,0}}, \quad (29)$$

где $\mathbb{I}$ - единичная матрица.

Видно, что синглетный ($c = 0$) и триплетный ($c = 1, 2, 3$) секторы не смешиваются под действием потока ренормализационной группы, по крайней мере в однопетлевом приближении. Точка $\bar{\beta}^{(c)} = 0$ является неустойчивой фиксированной точкой уравнения (28) при $q_\Lambda \rightarrow 0$. Кроме того, даже если исходная матрица туннелирования $\beta^{(c)}$ тридиагональна, то есть допускает перескоки только между ближайшими соседями, как в (25), поток ренормализационной группы генерирует ненулевые элементы, соответствующие перескокам между неближайшими соседями. Наконец, можно заметить, что уравнение (28) формально имеет стабильную фиксированную точку $\bar{\beta}^{(c)} = \mathbb{I}$. Тем не менее эта точка недостижима: уже на конечном масштабе импульса отдельные собственные значения или элементы матрицы $\bar{\beta}^{(c)}$ могут расходиться, что делает уравнения баллистической ренормализационной группы

неприменимыми. Следовательно, в рамках данного приближения можно лишь заключить, что $\bar{\beta}^{(c)}$ течет в область сильной связи, недоступную однопетлевому анализу.

Описанные выше результаты мотивируют вывод длинноволновой низкоэнергетической теории - NL σ M для произвольных матриц туннелирования $\beta_{jj'}^{(c)}$, несмотря на то что затравочные матрицы туннелирования (25), получаемые из предложенной микроскопической модели, являются тридиагональными.

4 Вывод нелинейной сигма-модели

Стандартный вывод нелинейной сигма-модели (NL σ M) в задачах такого типа начинается с усреднения по беспорядку. Возникающие после этого четверичные по фермионным полям члены линейризуются с помощью преобразования Хаббарда—Стратоновича. После этого фермионные поля можно проинтегрировать точно, поскольку действие становится квадратичным по ним. В результате в действии остается только поле Хаббарда-Стратоновича, которое обычно является матричным и обладает дополнительными симметриейными ограничениями, унаследованными от исходного гамильтониана. Наконец, осуществляется седловое длинноволновое приближение. В данном разделе вышеописанный алгоритм последовательно применяется к предложенной микроскопической модели.

4.1 Преобразование Хаббарда-Стратоновича

В предыдущем разделе после усреднения по беспорядку было получено действие, содержащее четверичные по фермионным полям члены, или, что то же самое, квадратичные члены по матрицам $D_j^{(c)}$. Эти члены можно линейризовать с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича, введя матричные поля $\tilde{Q}_j^{(c)}$, $c = 0, 1, 2, 3$, сопряженные с $D_j^{(c)}$. По построению матричные поля $\tilde{Q}_j^{(c)}$ действуют в тех же пространствах, что и $D_j^{(c)}$, и удовлетворяют тем же симметриейным ограничениям (22):

$$\tilde{Q}_j^{(0)} = -C\tilde{Q}_j^{(0)T}C, \quad \tilde{Q}_j^{(c)} = C\tilde{Q}_j^{(c)T}C, \quad c = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Важно отметить, что синглетные $\tilde{Q}_j^{(0)}$ и триплетные $\tilde{Q}_j^{(1,2,3)}$ матричные поля имеют разные симметриейные соотношения.

После преобразования Хаббарда-Стратоновича действие оказывается квадратичным по исходным фермионным полям Ξ и $\bar{\Xi}$, что позволяет по ним проинтегрировать точно. Интегрирование по фермионным полям дает вклад $\text{Tr} \ln$, и действие, теперь выражаемое только через поля Хаббарда-Стратоновича, принимает вид:

$$\mathcal{S} = \frac{N}{2} \sum_j \text{Tr} \ln \left[(i\tilde{v}_j \partial_y + i\tilde{\varepsilon} - \tilde{b}_j) \sigma_0 + i \sum_{j'} \sum_{c=0}^3 \beta_{jj'}^{(c)} \tilde{Q}_{j'}^{(c)} \sigma_c \right] - \frac{1}{2} \int dy \sum_{jj'} \sum_{c=0}^3 \beta_{jj'}^{(c)} \text{tr} \tilde{Q}_j^{(c)} \tilde{Q}_{j'}^{(c)}. \quad (31)$$

Здесь введены следующие матрицы, действующие в пространствах мацубаровских частот,

реплик и Намбу:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_j &= v_j 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes s_0, \\ \tilde{\varepsilon} &= \hat{\varepsilon} \otimes 1_{N_r} \otimes s_0, \\ \tilde{b}_j &= \mu_B B_j 1_{2N_m} \otimes 1_{N_r} \otimes s_3.\end{aligned}\tag{32}$$

Как обсуждалось выше, действие (24) инвариантно относительно глобальных $SU(2)$ поворотов в спиновом пространстве. В специальном случае $\Delta_j = \gamma_j$ эта симметрия усиливается до локальной по линкам. Та же структура видна и в действии, переписанном через поля $\tilde{Q}_j^{(c)}$. В случае $\Delta_j = \gamma_j$ триплетные матрицы туннелирования становятся диагональными $\beta_{jj'}^{(1,2,3)} = (m_j/2)\delta_{jj'}$. В этом случае с помощью тождеств Фирца в спиновом пространстве действие (31) можно переписать только через единую матрицу $\hat{Q}_j = \sum_{c=0}^3 \tilde{Q}_j^{(c)} \sigma_c$, то есть только через $\text{tr}_\sigma \hat{Q}_j$, $\text{tr}_\sigma \hat{Q}_j^2$, и $(\text{tr}_\sigma \hat{Q}_j)^2$, где tr_σ по-прежнему означает след только в спиновом пространстве. Таким образом, в случае $\Delta_j = \gamma_j$ действие (31) становится инвариантным относительно локальных $SU(2)$ поворотов в спиновом пространстве.

4.2 Седло теории

Поскольку логарифмическая часть действия (31) пропорциональна числу каналов в линке N , в пределе «толстых проводов», $N \gg 1$ это действие можно исследовать в седловом приближении. Малый параметр такого приближения равен $1/N$.

4.2.1 Седловая точка

Вариация действия (31) по матричному полю $\tilde{Q}_j^{(c)}$ при нулевой энергии, $\tilde{\varepsilon} = 0$, и в отсутствие зеемановского поля, $\tilde{b}_j = 0$, дает седловые уравнения

$$\sum_{j'} \beta_{jj'}^{(c)} \tilde{Q}_{j'}^{(c)}(y) = i \frac{N}{2} \sum_{j'} \beta_{jj'}^{(c)} \text{tr}_\sigma \sigma_c G_{j'}(y, y),\tag{33}$$

где функции Грина G_j определяются как операторы, обратные к операторам под знаком $\text{Tr} \ln$:

$$G_j^{-1} = i\tilde{v}_j \sigma_0 \partial_y + i \sum_{j'} \sum_{c=0}^3 \beta_{jj'}^{(c)} \tilde{Q}_{j'}^{(c)} \sigma_c.\tag{34}$$

Нетрудно найти решение седловых уравнений стандартного для $NL\sigma M$ типа:

$$\tilde{Q}_j^{(c)} = \frac{N}{2v} \Lambda \delta_{c0}, \quad \Lambda = \hat{\eta} \otimes 1_{N_r} \otimes s_0,\tag{35}$$

где $\hat{\eta}_{\varepsilon_n, \varepsilon_m} = \text{sign } \varepsilon_n \delta_{\varepsilon_n, \varepsilon_m}$. Поскольку на найденном седле триплетные поля $\tilde{Q}_j^{(1,2,3)}$ равны нулю, соответствующая седловая функция Грина диагональна в спиновом пространстве:

$$\underline{G}_j^{-1} = \left(i\tilde{v}_j \partial_y + \frac{i}{2\tau_j} \Lambda \right) \sigma_0, \quad \frac{1}{\tau_j} = \frac{N}{v} \sum_{j'} \beta_{jj'}^{(0)}. \quad (36)$$

Найденное седло не является единственным. Действительно, решение (35) можно свободно поворачивать в пространстве мацубаровских частот, реплик и в пространстве Намбу с помощью матриц t , не зависящих от номера линка j и пространственной координаты y . Таким образом, существует целое седловое многообразие решений (33), элементы которого выражаются как

$$\tilde{Q}_j^{(c)} = \frac{N}{2v} t^{-1} \Lambda t \delta_{c0}, \quad Ct^{-1} = t^T C. \quad (37)$$

Поскольку матрица $\tilde{Q}_j^{(c)}$ является сопряженной к $D_j^{(c)}$ в смысле преобразования Хаббарда-Стратоновича, для сходимости теории на нее естественным образом накладывается условие эрмитовости, то есть предполагается $\tilde{Q}_j^{(0)} = \tilde{Q}_j^{(0)\dagger}$. Кроме того, на матрицу $\tilde{Q}_j^{(c)}$ по-прежнему действуют симметричные соотношения (30). Вместе эти ограничения дают седловое многообразие, соответствующее стандартному целевому многообразию NL σ M для симметричного класса C,

$$\tilde{Q}_j^{(0)} \in \text{Sp}(4N_r N_m) / \text{U}(2N_r N_m). \quad (38)$$

4.2.2 Массивные моды

На седловом многообразии (37) триплетный сектор, то есть матричные поля $\tilde{Q}_j^{(1,2,3)}$ отсутствуют. Разложив след логарифма в действии (31) до второго порядка по триплетным матричным полям и пренебрегая пространственными производными, получается следующее квадратичное действие:

$$\mathcal{S}_t^{(2)} \simeq -\frac{1}{8} \int dy \sum_{c=1}^3 \sum_{jj'} \beta_{jj'}^{(c)} \text{tr} \{ \tilde{Q}_j^{(c)}, \Lambda \} \{ \tilde{Q}_{j'}^{(c)}, \Lambda \} + \frac{1}{8} \int dy \sum_{c=1}^3 \sum_{jj'} \tilde{\beta}_{jj'}^{(c)} \text{tr} [\tilde{Q}_j^{(c)}, \Lambda] [\tilde{Q}_{j'}^{(c)}, \Lambda], \quad (39)$$

где эффективная матрица туннелирования для антикоммутирующей с Λ части матричного поля

$$\tilde{\beta}_{jj'}^{(c)} = \beta_{jj'}^{(c)} - \frac{N}{v} \sum_{j''} \beta_{jj''}^{(c)} \tau_{j''} \beta_{j''j'}^{(c)}. \quad (40)$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения происходит из разложения следа логарифма. Это выражение аналогично баллистической ренормализации (27) на масштабах

импульса, соответствующих обратной средней длине рассеяния $q_\Lambda \sim 1/(v\tau_j)$. При условии, что матрицы туннелирования $\beta^{(c)}$ и $\tilde{\beta}^{(c)}$ не имеют нулевых собственных значений, триплетные матричные поля $\tilde{Q}_j^{(c)}$ ($c = 1, 2, 3$) массивны. Поэтому они не влияют на длинноволновую низкоэнергетическую физику и могут быть опущены при дальнейшем выводе NL σ M. Их влияние на итоговую NL σ M, а также особенности, возникающие при наличии нулевых собственных значений матрицы $\tilde{\beta}^{(c)}$, обсуждаются в разделе 5.

Для синглетного сектора аналогичное разложение по отклонению $\tilde{Q}_j^{(0)}$ от его седлового значения дает выражения, полностью аналогичные (39) с той лишь разницей, что вместо $\tilde{Q}_j^{(c)}$ необходимо подставить отклонение от седловой точки $\delta\tilde{Q}_j^{(0)} = \tilde{Q}_j^{(0)} - \underline{\tilde{Q}}_j^{(0)}$. В таком случае первое слагаемое в (39) соответствует модам, коммутирующим с Λ . Такие моды массивны, если $\beta^{(0)}$ не имеет нулевых собственных значений (Соответствующие условия на параметры модели обсуждаются в приложении 7.2). Второе же слагаемое в действии (39) описывает моды, антикоммутирующие с Λ . Нетрудно заметить, что

$$\tilde{\beta}_{jj'}^{(0)} = \beta_{jj'}^{(0)} - \frac{N}{v} \sum_{j''} \beta_{jj''}^{(0)} \left(\frac{N}{v} \sum_{j'} \beta_{j''j'}^{(0)} \right)^{-1} \beta_{j''j'}^{(0)} = \beta_{jj'}^{(0)} - \sum_{j''} \beta_{jj''}^{(0)} \left(\sum_{j'} \beta_{j''j'}^{(0)} \right)^{-1} \beta_{j''j'}^{(0)}, \quad (41)$$

откуда следует $\det \tilde{\beta}^{(0)} = 0$, поскольку вектор $q_j = \{1, \dots, 1\}$ является собственным вектором матрицы $\tilde{\beta}_{jj'}^{(0)}$ с нулевым собственным значением. Это означает, что должны существовать безмассовые моды $\tilde{Q}_j^{(0)}$, антикоммутирующие с Λ . Это естественно, поскольку нетрудно заметить, что такие $\delta\tilde{Q}_j^{(0)}$ как раз соответствуют движению вдоль седлового многообразия (37). Именно эти моды и дают длинноволновую низкоэнергетическую теорию и именно они исследуются далее.

4.3 Случай сильного диагонального беспорядка

Результаты раздела 3.2 мотивируют рассматривать задачу с матрицей туннелирования $\beta^{(c)}$ общего вида. Тем не менее сначала остановимся на простом частном случае. В этом разделе рассматриваются тридиагональные матрицы $\beta^{(c)}$, получаемые после усреднения по беспорядку (25). Предполагается, что дисперсии туннелирования между соседними линиями чередуются: $\gamma_{2j} = \gamma_+$, $\gamma_{2j+1} = \gamma_-$, $\Delta_{2j} = \Delta_+$, и $\Delta_{2j+1} = \Delta_-$, в то время как распределения беспорядка внутри всех линков одинаковые, то есть $m_j = m$. В таком случае из (36) следует, что время свободного пробега не зависит от номера линка: $1/\tau_j = 1/\tau =$

$N(3m + 2\lambda_+ + 2\lambda_-)/(2v)$. Далее предположим, что беспорядок внутри линков значительно сильнее, чем между соседними линками $m \gg \gamma_\pm, \Delta_\pm$. В таком случае, генерируемые потоком ренормализационной группы (27) туннельные элементы между ближайшими линками подавлены малыми параметрами $\gamma_\pm/m, \Delta_\pm/m$, поэтому ими можно пренебречь.

Мягкие моды синглетного матричного поля можно параметризовать как

$$\tilde{Q}_j^{(0)}(y) = \frac{N}{2v} t_j^{-1}(y) \Lambda t_j(y), \quad (42)$$

где $t_j(y)$ обладает теми же симметриями, что и матрица t , параметризующая седловое многообразие (37). В таком случае эффективное действие принимает вид

$$\mathcal{S} = N \sum_j \text{Tr} \ln \left[i\tilde{v}_j \partial_y + i\tilde{\varepsilon} - \tilde{b}_j + \frac{iN}{2v} \sum_{j'} \beta_{jj'}^{(0)} t_{j'}^{-1} \Lambda t_{j'} \right] - \frac{N^2}{8v^2} \int dy \sum_{jj'} \beta_{jj'}^{(0)} \text{tr} t_j^{-1} \Lambda t_j t_{j'}^{-1} \Lambda t_{j'}. \quad (43)$$

Из этого действия исключены все массивные моды, обсужденные ранее. Для получения низкоэнергетической длинноволновой теории предполагается, что t_j изменяется вдоль линка медленно (по координате y), и слабо отличается на соседних линках на одной координате y , то есть медленно меняется по координате x . В таком случае поле можно разложить по пространственным градиентам до второго порядка:

$$t_{j\pm 1}^{-1} \Lambda t_{j\pm 1} \simeq t_j^{-1} \left\{ \Lambda \pm a [L_j^{(x)}, \Lambda] + \frac{a^2}{2} [\partial_x L_j^{(x)}, \Lambda] + \frac{a^2}{2} [L_j^{(x)}, [L_j^{(x)}, \Lambda]] \right\} t_j. \quad (44)$$

Здесь и далее используется обозначение $L_j^{(x,y)} = t_j \partial_{x,y} t_j^{-1}$, а параметр a означает пространственное расстояние по оси x между соседними линками. Подстановка (44) в (43) и разложение следа логарифма до второго порядка по градиентам дают

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \simeq & - \sum_j \int dy \left\{ \sum_{r=x,y} \pi_r^{(0)} \text{tr} [L_j^{(r)}, \Lambda]^2 - \frac{N}{2} (-1)^j \text{tr} \Lambda L_j^{(y)} + \frac{N^2 a \tau (\lambda_+ - \lambda_-)}{2v} \text{tr} \Lambda [L_j^{(x)}, L_j^{(y)}] \right. \\ & \left. - \frac{N}{2v} \text{tr} (\tilde{\varepsilon} + i\tilde{b}_j) t_j^{-1} \Lambda t_j - \frac{N\tau}{8v} \text{tr} [t_j \tilde{b}_j t_j^{-1}, \Lambda]^2 + \frac{iN\tau}{4v} v_j \text{tr} [t_j \tilde{b}_j t_j^{-1}, \Lambda] [L_j^{(y)}, \Lambda] \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где коэффициенты в первом члене

$$\begin{aligned} \pi_x^{(0)} &= \frac{N^2 a^2 (\lambda_+ + \lambda_-)}{16v^2} \left[1 - \frac{2N\tau (\lambda_+ - \lambda_-)^2}{v (\lambda_+ + \lambda_-)} \right], \\ \pi_y^{(0)} &= \frac{Nv\tau}{8}. \end{aligned} \quad (46)$$

Чтобы свести действие (45) к стандартному виду двумерной $NL\sigma M$ симметричного класса C , необходимо выразить все слагаемые в терминах матричного поля $Q_j = t_j^{-1} \Lambda t_j$. Кроме

того, следует перейти к непрерывному пределу по координате x , $a \rightarrow 0$. Этот предел нужно брать так, чтобы восстановить изотропность в реальном пространстве, то есть симметрию между направлениями x и y .

Чтобы переписать действие (45) в терминах матричного поля $Q_j = t_j^{-1} \Lambda t_j$ удобно воспользоваться следующими соотношениями, которые несложно получить из свойств следа:

$$\text{tr} \left[L_j^{(x)}, \Lambda \right]^2 = \text{tr} (\partial_x Q_j)^2, \quad \text{tr} \left[L_j^{(y)}, \Lambda \right]^2 = \text{tr} (\partial_y Q_j)^2, \quad \text{tr} \Lambda [L_j^{(x)}, L_j^{(y)}] = -\frac{1}{2} \text{tr} Q_j \partial_x Q_j \partial_y Q_j. \quad (47)$$

Далее, переход к непрерывному пределу $a \rightarrow 0$ осуществляется переходом в действии от суммирования по номеру линка j к интегрированию по координате x , то есть $a \sum_j \rightarrow \int dx$. Чтобы восстановить изотропность, нужно перемасштабировать координаты как $x \rightarrow x\zeta\sqrt{\pi_x}$ и $y \rightarrow y\zeta\sqrt{\pi_y}$. Здесь коэффициент ζ сокращается в градиентных членах, поскольку такие члены содержат одинаковое число интегрирований и дифференцирований по пространственным координатам и, как следствие, не меняются при изотропном растяжении реального пространства. Параметр ζ фиксируется тем условием, что член, содержащий мацубаровские энергии должен иметь стандартный коэффициент, пропорциональный плотности состояний.

Отдельного рассмотрения требует переход к непрерывному пределу для члена топологической природы $(-1)^j \text{tr} \Lambda L_j^{(y)}$, который может быть представлен как интеграл по кривой. Контур интегрирования проходит вдоль линков, в направлении, совпадающем с направлением движения хиральных фермионов (см. Рис. 2):

$$\int dy \sum_j (-1)^j \text{tr} \Lambda L_j^{(y)} = \oint ds \text{tr} \Lambda t \partial_s t^{-1}. \quad (48)$$

Далее, можно воспользоваться формулой Стокса и перейти к объемному интегралу. Ориентация контура такова, что объемный интеграл идет только по каждой второй полоске между соседними линками. Поэтому продолжение области интегрирования на всю площадь дает дополнительный коэффициент $1/2$. С учетом (47),

$$\oint ds \text{tr} \Lambda t \partial_s t^{-1} = -\frac{1}{2} \int dxdy \text{tr} \Lambda [L_j^{(x)}, L_j^{(y)}] = \frac{1}{8} \int dxdy \epsilon_{\mu\nu} \text{tr} Q \partial_\mu Q \partial_\nu Q. \quad (49)$$

Здесь $\epsilon_{\mu\nu}$ означает двумерный антисимметричный тензор, то есть его ненулевые элементы $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$.

Наконец, преобразования, полностью аналогичные (47) и (49), можно осуществить и для членов с зеемановским полем b_j^2 . В результате, окончательный вид действия NLσM записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\frac{\bar{g}}{16} \int d^2\mathbf{r} \operatorname{tr}(\nabla Q)^2 + \frac{\bar{g}_H}{16} \int d^2\mathbf{r} \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} Q \partial_\mu Q \partial_\nu Q \\ & + \pi\bar{\nu} \int d^2\mathbf{r} \operatorname{tr} \left(\hat{\varepsilon} Q + i\mu_B \bar{\mathbf{B}} s_3 Q + \frac{\tau\mu_B^2}{4} \bar{\mathbf{B}}^2 [s_3, Q]^2 \right) \\ & - \frac{iN\tau\mu_B}{4} \int d^2\mathbf{r} \bar{\mathbf{B}} \epsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr} s_3 \partial_\mu Q \partial_\nu Q - \frac{i\mu_B \sqrt{\pi\tau\bar{\nu}g}}{2v} \int d^2\mathbf{r} \bar{\mathbf{B}} \operatorname{tr} s_3 Q \partial_y Q. \end{aligned} \quad (50)$$

Матричное поле Q должно удовлетворять условиям эрмитовости, симметрии, происходящей из БдЖ симметрии исходной модели, и условия седла соответственно:

$$\begin{aligned} Q^\dagger &= Q, \quad Q = -CQ^T C, \quad Q^2 = 1, \\ Q &\in \operatorname{Sp}(4N_r N_m) / \operatorname{U}(2N_r N_m). \end{aligned} \quad (51)$$

Напомним, что матрица симметрии C здесь определена в выражении (22). Затравочная продольная спиновая проводимость в единицах кванта проводимости $G_0^s = \hbar/(8\pi)$ в рассматриваемом в этом разделе пределе $m \gg \gamma_\pm, \Delta_\pm$ выражается как

$$\bar{g} = N \left[\frac{2N\tau}{v} (\lambda_+ + \lambda_-) \left(1 - \frac{2N\tau}{v} \frac{(\lambda_+ - \lambda_-)^2}{(\lambda_+ + \lambda_-)} \right) \right]^{1/2} \simeq 2N \left(\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{3m} \right)^{1/2}. \quad (52)$$

Затравочная спиновая поперечная (холловская) проводимость выражается как

$$\bar{g}_H = N \left[1 + \frac{2N\tau}{v} (\lambda_+ - \lambda_-) \right] \simeq N \left[1 + \frac{4(\lambda_+ - \lambda_-)}{3m} \right]. \quad (53)$$

Также, в (50) введена затравочная плотность состояний $\bar{\nu} = N/(\pi^2 a v) \equiv N\zeta^2 \sqrt{\pi_x \pi_y} / (2va\pi)$. Здесь равенство по эквивалентности ($\equiv$) фиксирует параметр перемасштабирования пространственных координат ζ как $\zeta^2 = 2/(\pi \sqrt{\pi_x \pi_y})$.

Здесь следует обратить внимание на то, что при $\lambda_+ = \lambda_-$ затравочная холловская спиновая проводимость оказывается равной целому числу $\bar{g}_H = N$. Поэтому, при нечетном числе типов фермионов N , NLσM для симметричного случая $\lambda_+ = \lambda_-$ соответствует нестабильной критической линии, разделяющей топологические фазы квантования спиновой холловской проводимости по четным целым числам. При этом, затравочная величина продольной спиновой проводимости $\bar{g}$ при отклонении от линии $\lambda_+ = \lambda_-$ меняется слабо по параметру малости $\lambda_\pm \ll m$.

²Предпоследний член в действии (50), пропорциональный $\operatorname{tr} s_3 \partial_\mu Q \partial_\nu Q$, получается переписыванием последнего члена (45) в интеграл по объему с помощью формулы Стокса, аналогично (49)

Вдобавок, члены в действии (50), происходящие от зеемановского магнитного поля выражены через величины $\overline{B}(y)$, $\overline{B}^2(y)$, и $\overline{Bv}(y)$, представляющие собой пространственно усредненное зеемановское магнитное поле, его квадрат и его произведение со скоростью фермионов. Иначе говоря, они определяются как

$$\overline{B^m}(y) = \frac{1}{M} \sum_j B_j^m(y), \quad \overline{Bv}(y) = \frac{1}{M} \sum_j B_j(y) v_j. \quad (54)$$

Все четыре члена, включающие в себя зеемановское магнитное поле в ур. (50), явным образом нарушают SU(2) симметрию действия NL σ M. В случае зеемановского поля, меняющего знак на четных/нечетных линках $B_j(y) = (-1)^j B$, среднее оказывается равным нулю, $\overline{B} = 0$, и соответствующий член в действии выпадает. Однако, в таком случае член в (50), пропорциональный $\overline{B}^2$, по-прежнему нарушает SU(2) симметрии. Кроме того, последний член в действии (50) нарушает также симметрию инверсии пространства, если зеемановское магнитное поле синхронизовано со скоростями хиральных фермионов v_j , то есть, $\overline{Bv} \neq 0$. Такая ситуация реализуется, например, в случае $B_j(y) = (-1)^j B$.

4.4 Произвольная матрица туннелирования

В данном разделе рассматривается наиболее общий в рамках предполагаемой двухподрешеточной трансляционной структуры класс матриц туннелирования, для которого допускается асимметрия между четными и нечетными линками и перескоки не только между ближайшими, но и между более удаленными линками. В таком случае, матрица туннелирования $\beta_{jj'}^{(0)}$ зависит от расстояния между линками $|j - j'|$ и от четности j -го линка. Чтобы выразить это явно, можно записать номер линка j как $j = 2n + s$, где n нумерует линки на двух подрешетках, на которых $s = 0, 1$ для четной и нечетной подрешеток соответственно. Тогда, для линков $j = 2n + s$ и $j' = 2n' + s'$, соответствующий им элемент матрицы туннелирования можно выразить $\beta_{jj'}^{(0)} \equiv \beta_{ss'}^{(0)}(n - n')$. Симметрия матрицы туннелирования накладывает условие, $\beta_{jj'}^{(0)} = \beta_{j'j}^{(0)}$, то есть $\beta_{ss'}^{(0)}(n - n') = \beta_{s's}^{(0)}(n' - n)$. Чтобы время свободного пробега τ не зависело от подрешетки s , необходимо дополнительно потребовать $\beta_{00}^{(0)}(n) = \beta_{11}^{(0)}(n)$ при всех n . В дальнейшем удобно ввести следующую функцию

$\underline{\beta}(k)$, играющую роль формального фурье-образа³ матрицы туннелирования:

$$\underline{\beta}(k) = \sum_{j'} \beta_{2j,2j+j'}^{(0)} e^{ikj'} = \sum_n \beta_{00}^{(0)}(-n) e^{ik(2n)} + \sum_n \beta_{01}^{(0)}(-n) e^{ik(2n+1)}. \quad (55)$$

Для построения NL σ M удобно ввести матричное поле $\tilde{Q}_j = \sum_{j'} \beta_{jj'}^{(0)} \tilde{Q}_{j'}^{(0)}$. Тогда действие (31) можно записать как

$$\mathcal{S} = N \sum_j \text{Tr} \ln \left[i\tilde{v}_j \partial_y + i\tilde{\varepsilon} - \tilde{b}_j + i\tilde{Q}_j \right] - \frac{1}{2} \int dy \sum_{jj'} [\beta^{(0)}]_{jj'}^{-1} \text{tr} \tilde{Q}_j \tilde{Q}_{j'}. \quad (56)$$

Здесь предполагается, что матрица $\beta_{jj'}^{(0)}$ обратима, то есть не имеет нулевых собственных значений, или функция $\underline{\beta}(k)$ не имеет нулей. Седловое уравнение и его решение для нового матричного поля $\tilde{Q}_j$ выражаются как

$$\tilde{Q}_j = \frac{1}{2\tau} t^{-1} \Lambda t, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{N}{v} \sum_{j'} \beta_{jj'}^{(0)} = \frac{N}{v} \underline{\beta}(0), \quad (57)$$

где, аналогично (37), матрица t не зависит от координаты y . Для произвольного целочисленного сдвига линка r осуществляется разложение по направлению x в предположении того, что поле медленно меняется между линками на масштабах r :

$$t_{j+r}^{-1} \Lambda t_{j+r} \simeq t_j^{-1} \left[\Lambda + ra[L_j^x, \Lambda] + \frac{(ra)^2}{2} ([\partial_x L_j^x, \Lambda] + [L_j^x, [L_j^x, \Lambda]]) + \dots \right] t_j. \quad (58)$$

Подстановка этого градиентного разложения в определение нового матричного поля $\tilde{Q}_j$, дает

$$\tilde{Q}_j = \sum_{s=0,1} \sum_n \beta_{j,j+2n+s}^{(0)} \tilde{Q}_{j+2n+s}^{(0)} \simeq \frac{N}{2v} t_j^{-1} \left[A_0 \Lambda + a(-1)^j A_1 [L_j^x, \Lambda] + a^2 \frac{A_2}{2} ([\partial_x L_j^x, \Lambda] + [L_j^x, [L_j^x, \Lambda]]) \right] t_j. \quad (59)$$

Здесь для краткости записи введены коэффициенты ($m = 0, 1, 2$):

$$A_m = \sum_n \left[(2n)^m \beta_{00}^{(0)}(-n) + (2n+1)^m \beta_{01}^{(0)}(-n) \right]. \quad (60)$$

Эти параметры удобно выражаются через функцию $\underline{\beta}(k)$:

$$A_0 = \underline{\beta}(0), \quad A_1 = -i\underline{\beta}'(0), \quad A_2 = -\underline{\beta}''(0). \quad (61)$$

³Следует заметить, что из-за асимметрии между подрешетками s , это, строго говоря, нельзя назвать преобразованием Фурье, поскольку изначальная матрица зависит не только от $|j - j'|$. Впрочем, определенная таким образом функция позволяет компактно записывать получаемые в этом разделе результаты.

Важно, что для того, чтобы градиентное разложение по степеням ra в (58) было контролируемым, то есть каждый следующий член ряда был параметрически меньше предыдущего, градиенты должны быть достаточно малы. Предполагается, что матрица $\beta_{ss'}^{(0)}(n)$ экспоненциально убывает на масштабах n_0 . В таком случае матричное поле t должно меняться на масштабах, больших an_0 .

Разложение действия (56) до второго порядка по градиентам дает

$$\mathcal{S} \simeq - \sum_j \int dy \left\{ \pi_y \text{tr} \left[L_j^{(y)}, \Lambda \right]^2 + \pi_x \text{tr} \left[L_j^{(x)}, \Lambda \right]^2 + \pi_H \text{tr} \Lambda [L_j^{(x)}, L_j^{(y)}] - \frac{N}{2v} \text{tr} \left(\tilde{\varepsilon} + i\tilde{b}_j \right) t_j^{-1} \Lambda t_j \right. \\ \left. - \frac{N\tau}{8v} \text{tr} \left[t_j \tilde{b}_j t_j^{-1}, \Lambda \right]^2 - (-1)^j \frac{N}{2} \text{tr} \Lambda L_j^{(y)} + \frac{iN\tau}{4v} v_j \text{tr} \left[t_j \tilde{b}_j t_j^{-1}, \Lambda \right] [L_j^{(y)}, \Lambda] \right\}, \quad (62)$$

где введены коэффициенты

$$\pi_x = - \frac{a^2 \underline{\beta}''(0)}{16\tau^2 \underline{\beta}^2(0)} \left(1 - \frac{2[\underline{\beta}'(0)]^2}{\underline{\beta}''(0)\underline{\beta}(0)} \right), \quad \pi_y = \frac{Nv\tau}{8}, \quad \pi_H = i \frac{N^2 \tau a}{v} \underline{\beta}'(0). \quad (63)$$

Далее те же преобразования, что и в разделе 4.3, приводят действие к стандартному виду NLσМ (50) с временем свободного пробега τ , определенным в (57). Коэффициенты NLσМ, интерпретируемые как затравочные холловская и продольная проводимости, выражаются как

$$\bar{g} = N \left[\frac{2|\underline{\beta}''(0)|}{\underline{\beta}(0)} \left(1 - \frac{2[\underline{\beta}'(0)]^2}{\underline{\beta}''(0)\underline{\beta}(0)} \right) \right]^{1/2}, \quad \bar{g}_H = N \left(1 + \frac{2i\underline{\beta}'(0)}{\underline{\beta}(0)} \right) \quad (64)$$

В частном случае, рассмотренном в разделе 4.3, когда матрица туннелирования содержит только перескоки между ближайшими линками,

$$\underline{\beta}(k) = (3m/2) + \lambda_+ e^{-ik} + \lambda_- e^{ik}. \quad (65)$$

Нетрудно убедиться, что в таком случае (64) воспроизводит результаты (52) и (53). Таким образом, обсужденный ранее предел действительно является частным случаем общего ответа (64).

Удобно ввести параметры $\epsilon = -2i\underline{\beta}'(0)/\underline{\beta}(0)$ и $\phi = 2|\underline{\beta}''(0)|/\underline{\beta}(0)$. Тогда, выражения для проводимостей (64) могут быть переписаны в компактном виде

$$\bar{g} = N\sqrt{\phi - \epsilon^2}, \quad \bar{g}_H = N(1 - \epsilon). \quad (66)$$

Функция $\underline{\beta}(k)$, точнее ее значение, первая и вторая производные при $k = 0$, определяет параметры ϕ и ϵ , а значит и стартовую точку двухпараметрического потока ренормализационной группы соответствующей NLσМ в пространстве продольной и поперечной проводимостей g и g_H (см. Рис. 3). Параметр ϵ отвечает за отклонение затравочной спиновой

холловской проводимости $\bar{g}_H$ от целочисленного значения N . Параметр ϕ управляет затравочным значением продольной спиновой проводимости $\bar{g}$. Если действительная часть функции $\underline{\beta}(k)$ положительная, то есть $\text{Re } \underline{\beta}(k) > 0$ для всех k , можно доказать следующее соотношение между параметрами ϕ и ϵ (см. приложение 7.2.2):

$$\phi > \epsilon^2. \quad (67)$$

Это неравенство гарантирует, что продольная спиновая проводимость хорошо определена, если $\text{Re } \underline{\beta}(k) > 0$ для всех k . Отдельно стоит отметить, что потребованное ранее условие отсутствия нулевых собственных значений матрицы $\beta^{(0)}$, записываемое как $|\underline{\beta}(k)| > 0$ при всех k , не гарантирует $\phi > \epsilon^2$ (см. приложение 7.2.2). Для матрицы туннелирования (65), содержащей только перескоки между ближайшими линками, режим $\phi < \epsilon^2$ реализуется при условии $3m/(2(\lambda_+ + \lambda_-)) < 2(\lambda_+ - \lambda_-)^2/(\lambda_+ + \lambda_-)^2 - 1$. Реализация такого сценария требует сильной анизотропии туннелирования для четных и нечетных линков, а именно $\frac{|\lambda_+ - \lambda_-|}{\lambda_+ + \lambda_-} > 1/\sqrt{2}$. Случай $\phi < \epsilon^2$ требует отдельного анализа. Нетрудно видеть, что в таком случае π_x из (63) оказывается отрицательным, то есть второй член в действии (62) меняет знак. Это означает, что седловое многообразие (37) не дает минимум действия, что может указывать на полную перестройку основного состояния системы и совершенно иные физические свойства в таком режиме. Исследование этого случая выходит за пределы данной работы.

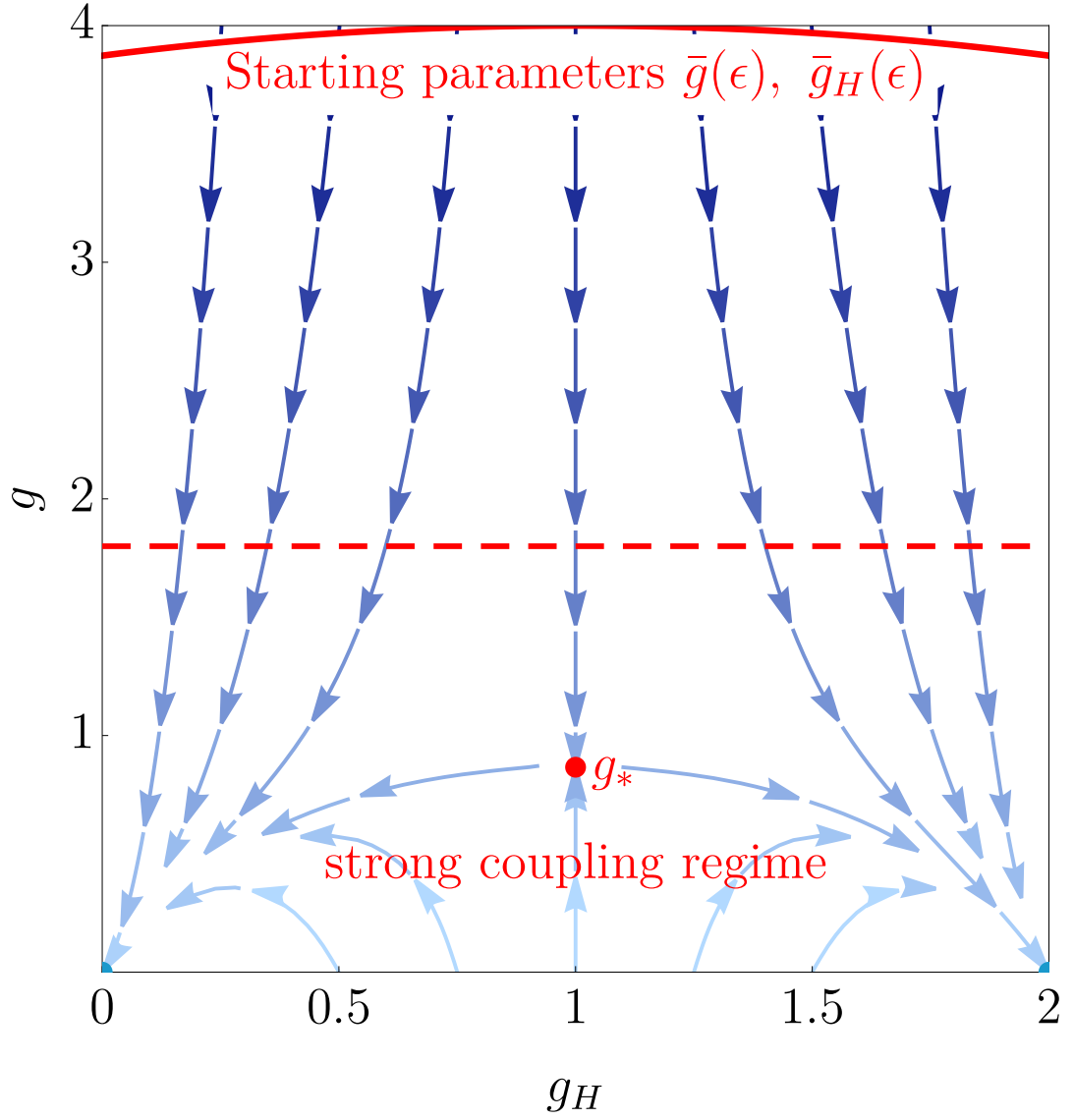


Рис. 3: Схема потока ренормализационной группы $NL\sigma M$ класса C (взято из работы [41]). Стрелки указывают направление потока в инфракрасный (длинноволновый) предел. Красная кривая сверху показывает изменение затравочных (стартовых) параметров $\bar{g}$ и $\bar{g}_H$ в зависимости от ϵ при фиксированном $\phi = 1$ и $N = 4$.

5 Исследование триплетных мод

В предыдущих разделах триплетные матричные поля $\tilde{Q}_j^{(1,2,3)}$ в действии (31) игнорировались, поскольку они равны нулю на седловом многообразии (37). В этом разделе подробно изучается влияние этих мод на действие $\text{NL}\sigma\text{M}$. В разделе 5.1 рассматривается ситуация, когда все триплетные моды массивны на уровне квадратичного действия (39). Затем в разделе 5.2 рассматривается случай, когда на уровне квадратичного действия (39) часть триплетных мод может оказаться безмассовыми.

5.1 Поправки к $\text{NL}\sigma\text{M}$ от триплетных мод

Условие массивности триплетных мод на уровне гауссового действия (39) означает, что все матрицы $\beta_{jj'}^{(c)}$ и $\tilde{\beta}_{jj'}^{(c)}$ при $c = 1, 2, 3$ обратимы, то есть не имеют нулевых собственных значений. В таком случае пропагатор триплетных мод $\tilde{Q}_j^{(c)}$ можно записать как

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q}_{j,q_1q_2}^{(c)}(y) \tilde{Q}_{j',p_1p_2}^{(c')}(y') \rangle &= 2\delta_{cc'}\delta(y-y') \frac{\delta_{q_1p_2}\delta_{q_2p_1} + C_{q_1p_1}C_{p_2q_2}}{2} \\ &\times \left[[(\beta^{(c)})^{-1}]_{jj'} \frac{1 + \Lambda_{q_1q_1}\Lambda_{q_2q_2}}{2} + [(\tilde{\beta}^{(c)})^{-1}]_{jj'} \frac{1 - \Lambda_{q_1q_1}\Lambda_{q_2q_2}}{2} \right], \end{aligned} \quad (68)$$

где индексы q, p нумеруют мацубаровские частоты, реплики и компоненты в пространстве Намбу. Из такого коррелятора следует соотношение

$$\begin{aligned} \langle \text{tr}_s s_s [\tilde{Q}_j^{(c)}(y)]_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\alpha\beta} \text{tr}_s s_{s'} [\tilde{Q}_{j'}^{(c')}(y')]_{\varepsilon_4\varepsilon_3}^{\mu\nu} \rangle_0 &= 2\delta(y-y')\delta_{ss'} \left[\delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\mu}\delta_{\varepsilon_1\varepsilon_3}\delta_{\varepsilon_2\varepsilon_4} - \mathbf{v}_s \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}\delta_{\varepsilon_1,-\varepsilon_4}\delta_{\varepsilon_2,-\varepsilon_3} \right] \\ &\times \delta^{cc'} \left[(\theta(\varepsilon_1)\theta(\varepsilon_2) + \theta(-\varepsilon_1)\theta(-\varepsilon_2)) [(\beta^{(c)})^{-1}]_{jj'} + (\theta(\varepsilon_1)\theta(-\varepsilon_2) + \theta(-\varepsilon_1)\theta(\varepsilon_2)) [(\tilde{\beta}^{(c)})^{-1}]_{jj'} \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь tr_s обозначает след по пространству Намбу. Также введен параметр $\mathbf{v}_s = -\text{tr} s_s s_2 s_s^T s_2 / 2$. Наконец, $\theta(\varepsilon)$ означает тета-функцию Хевисайда. Из (69) можно получить необходимое правило усреднения:

$$\begin{aligned} \int dy' \langle \text{tr} A(y', y) \tilde{Q}_j^{(c)}(y) B(y, y') \tilde{Q}_{j'}^{(c')}(y') \rangle_0 &= (\check{\beta}_+^{(c)})_{jj'}^{-1} \left[\text{tr} A(y, y) \text{tr} B(y, y) - \text{tr} A(y, y) C B^T(y, y) C \right] \\ &+ (\check{\beta}_-^{(c)})_{jj'}^{-1} \left[\text{tr} \Lambda A(y, y) \text{tr} \Lambda B(y, y) + \text{tr} \Lambda A(y, y) \Lambda C B^T(y, y) C \right], \end{aligned} \quad (70)$$

где $(\check{\beta}_\pm^{(c)})^{-1} = [(\beta^{(c)})^{-1} \pm (\tilde{\beta}^{(c)})^{-1}] / 2$, а матрицы C определена в (22). Соотношение (70) позволяет вычислить вклады в действие, возникающие при разложении $\text{Tr} \ln$ в (31) до второго порядка по триплетным полям $\tilde{Q}_{j'}^{(c)}$. При выполнении этого разложения необходимо следить за правильным расположением матриц t_j с различными индексами. Важной

проверкой результата является сохранение инвариантности действия (31) относительно глобальных поворотов синглетного поля $Q_j^{(0)}$ должна сохраниться. Общий алгоритм следующий: сначала под знаком $\text{Tr} \ln$ выполняется поворот t_j приводящий синглетное поле $\tilde{Q}_j^{(0)}$ к седловому значению, пропорциональному Λ . Это позволяет получить функцию Грина стандартного вида. Затем соответствующий поворот выполняется для триплетных мод: $\tilde{Q}_{j'}^{(c)} \rightarrow t_{j'}^{-1} \tilde{Q}_{j'}^{(c)} t_{j'}$. После этого след логарифма разлагается до второго порядка по параметру $t_j t_{j'}^{-1} \tilde{Q}_{j'}^{(c)} t_{j'} t_j^{-1}$. В результате получается:

$$\begin{aligned} & \frac{N}{2} \int dy dy' \sum_{jj_1j_2,c} \beta_{jj_1}^{(c)} \beta_{jj_2}^{(c)} \text{tr} \langle t_j(y) t_{j_1}^{-1}(y) \tilde{Q}_{j_1}^{(c)}(y) t_{j_1}(y) t_j^{-1}(y) \times \hat{G}_j(y, y') \\ & \times t_j(y') t_{j_2}^{-1}(y') \tilde{Q}_{j_2}^{(c)}(y') t_{j_2}(y') t_j^{-1}(y') \times \hat{G}_j(y', y) \rangle_0, \end{aligned} \quad (71)$$

где используется полный обратный оператор функции Грина в присутствии синглетных мод:

$$\begin{aligned} \hat{G}_j^{-1} &= \underline{G}_j^{-1} + i v_j L_j^{(y)} + i \frac{N}{2v} \sum_{j'} \beta_{jj'}^{(0)} t_j t_{j'}^{-1} [\Lambda, t_{j'}] t_j^{-1} \\ &\simeq \underline{G}_j^{-1} + i v_j L_j^{(y)} + i (-1)^j a \frac{N A_1}{2v} [L_j^{(x)}, \Lambda] + i a^2 \frac{N A_2}{4v} \left([\partial_x L_j^{(x)}, \Lambda] + [L_j^{(x)}, [L_j^{(x)}, \Lambda]] \right). \end{aligned} \quad (72)$$

Используя найденное ранее правило усреднения по триплетным модам (70), выражение (71) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} & -\frac{N}{2} \int dy \sum_{j,j_1,j_2,c} \beta_{jj_1}^{(c)} \beta_{jj_2}^{(c)} \left\{ (\check{\beta}_+^{(c)})_{j_1j_2}^{-1} \left[\left(\text{tr} t_{j_1}(y) t_j^{-1}(y) \hat{G}_j(y, y) t_j(y) t_{j_2}^{-1}(y) \right)^2 \right. \right. \\ & + \text{tr} \left(t_{j_1}(y) t_j^{-1}(y) \hat{G}_j(y, y) t_j(y) t_{j_2}^{-1}(y) \right)^2 \left. \right] + (\check{\beta}_-^{(c)})_{j_1j_2}^{-1} \left[\left(\text{tr} \Lambda t_{j_1}(y) t_j^{-1}(y) \hat{G}_j(y, y) t_j(y) t_{j_2}^{-1}(y) \right)^2 \right. \\ & \left. \left. - \text{tr} \left(\Lambda t_{j_1}(y) t_j^{-1}(y) \hat{G}_j(y, y) t_j(y) t_{j_2}^{-1}(y) \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (73)$$

Для сведения ответа к такой форме использованы симметричные соотношения $t_j^T C = C t_j^{-1}$ и $C \hat{G}_j^T(y, y) C = -\hat{G}_j(y, y)$. Выражение (73) дает дополнительные вклады в действие $N L \sigma M$ в виде поправок к градиентным членам в действии (62). Эти поправки выглядят следующим образом:

$$\delta \pi_y = \frac{N}{8} \sum_{c=1}^3 \tau_j^2 \beta_{jj}^{(c)}, \quad \delta \pi_H = \frac{N^2 A_1 a}{2v^2} \sum_{c=1}^3 \tau_j^2 \beta_{jj}^{(c)}, \quad (74)$$

и

$$\delta \pi_x = \frac{N a^2}{16v^2} \sum_{c=1}^3 \sum_{j_1, j_2} (2j - j_1 - j_2)^2 \beta_{jj_1}^{(c)} (\check{\beta}_-^{(c)})_{j_1j_2}^{-1} \beta_{jj_2}^{(c)} - \frac{N^3 A_1^2 a^2}{8v^4} \sum_{c=1}^3 \tau_j^2 \beta_{jj}^{(c)}. \quad (75)$$

Первое слагаемое в $\delta\pi_x$ в выражении (75) происходит из разложения $t_{j1}t_j^{-1}$ по градиентам в выражении (73). Все остальные вклады в (74) и (75) возникают из разложения полной функции Грина $\hat{G}_j(y, y)$. Следует отметить, что поправки к NL σ M (74) и (75) подавлены по сравнению с вкладами (63) малым седловым параметром $1/N$. Таким образом, влияние триплетных мод $\tilde{Q}_j^{(c)}$, с $c = 1, 2, 3$, на низкоэнергетическую длинноволновую теорию (NL σ M) аналогично по порядку поправкам от массивных мод синглетного сектора, то есть отклонениям от седла теории. Для массивных синглетных мод можно повторить вывод поправок, проведенный в данном разделе. Результат оказывается идентичным с точностью до замены $\tilde{\beta}^{-1}$ на ноль. Кроме того, существуют дополнительные вклады от якобиана [2]. Они также оказываются массивными (см. приложение 7.3). Поскольку синглетные массивные моды аналогичны массивным модам в NL σ M симметричного класса A [47], в данной работе они не рассматриваются.

Следует отметить, что поправки (74) и (75) сохраняются даже при $\gamma_j = \Delta_j$. В этой ситуации они возникают из-за диагональных элементов матрицы $\beta^{(c)}$ в (25). Это означает, что при $N > 1$ невозможно полностью отделить триплетный сектор, $c = 1, 2, 3$, от теории для синглетных мод, даже в случае $\Delta_j = \gamma_j$.

5.2 Возможное смягчение триплетных мод

В разделе 5.1 при выводе поправок к NL σ M использовалось выражение (69) и предполагалось, что матрицы $\beta_{jj'}^{(c)}$ и $\tilde{\beta}_{jj'}^{(c)}$ обратимы, то есть не имеют нулевых собственных значений. Это условие принципиально важно для матрицы $\beta_{jj'}^{(c)}$, поскольку в противном случае на уровне действия фермионных операторов (24) возникают дополнительные истинные нулевые моды, и для осуществления преобразования Хаббарда-Стратоновича понадобится их явно учитывать, модифицируя дальнейшие выкладки. Таким образом, в данной работе предполагается, что матрицы $\beta_{jj'}^{(c)}$ обратимы. В отличие от $\beta_{jj'}^{(c)}$, матрицы $\tilde{\beta}_{jj'}^{(c)}$ не входят явно в преобразование Хаббарда-Стратоновича и поэтому в принципе могут иметь нулевые собственные значения. В данном разделе рассматривается этот случай.

Как видно из выражения (39), матрицы $\tilde{\beta}_{jj'}^{(c)}$ определяют массы в действии на квадратичном уровне для компонент матриц $\tilde{Q}_j^{(c)}$, антикоммутирующих с Λ . Антикоммутирующие с Λ моды можно выделить явно, как $\tilde{Q}_{j,-}^{(c)} = \Lambda[\Lambda, \tilde{Q}_j^{(c)}]/2$. Поскольку $\tilde{\beta}^{(c)}$ является вещественной симметричной матрицей, ее можно диагонализировать ортогональным преобразованием

R , так что $\tilde{\beta}_{jj'}^{(c)} = \sum_r R_{rj} \tilde{\beta}_r^{(c)} R_{rj'}$. Наличие нулевого собственного значения означает, что для некоторых c_0 и r_0 выполняется $\tilde{\beta}_{r_0}^{(c_0)} \equiv 0$. Соответствующая мода, безмассовая на гауссовом уровне, имеет вид $Z_{r_0}^{(c_0)} = \sum_j R_{r_0 j} \tilde{Q}_{j,-}^{(c_0)}$. Для того, чтобы убедиться, что мода $Z_{r_0}^{(c_0)}$ в таком случае является только смягченной (лёгкой), а не точно нулевой, следует разложить действие (31) до четвертого порядка по $\tilde{Q}_j^{(c)}$, где $c = 1, 2, 3$. Соответствующее разложение имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t^{(4)} = & -\frac{N}{16v} \sum_{j,j_k} \tau_j^3 \sum_{c_k=1}^3 \beta_{jj_1}^{(c_1)} \beta_{jj_2}^{(c_2)} \beta_{jj_3}^{(c_3)} \beta_{jj_4}^{(c_4)} \left(\delta_{c_1 c_2} \delta_{c_3 c_4} - \delta_{c_1 c_3} \delta_{c_2 c_4} + \delta_{c_1 c_4} \delta_{c_2 c_3} \right) \\ & \times \int dy \operatorname{tr} \left[\tilde{Q}_{j_1}^{(c_1)} \tilde{Q}_{j_2}^{(c_2)} \tilde{Q}_{j_3}^{(c_3)} \tilde{Q}_{j_4}^{(c_4)} - 4\Lambda \tilde{Q}_{j_1}^{(c_1)} \Lambda \tilde{Q}_{j_2}^{(c_2)} \tilde{Q}_{j_3}^{(c_3)} \tilde{Q}_{j_4}^{(c_4)} \right. \\ & \left. - 2\Lambda \tilde{Q}_{j_1}^{(c_1)} \tilde{Q}_{j_2}^{(c_2)} \Lambda \tilde{Q}_{j_3}^{(c_3)} \tilde{Q}_{j_4}^{(c_4)} + 5\Lambda \tilde{Q}_{j_1}^{(c_1)} \Lambda \tilde{Q}_{j_2}^{(c_2)} \Lambda \tilde{Q}_{j_3}^{(c_3)} \Lambda \tilde{Q}_{j_4}^{(c_4)} \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

В (76) опущены члены с производными по координате y . Проекция выражения (76) на мягкую моду $Z_{r_0}^{(c_0)}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_t^{(4)} \rightarrow -\frac{N}{2v} \sum_j \tau_j^3 \left(\sum_{j'} \beta_{jj'}^{(c_0)} R_{j'r_0} \right)^4 \int dy \operatorname{tr} (Z_{r_0}^{(c_0)})^4. \quad (77)$$

Из условия отсутствия нулевых собственных значений у матрицы $\beta_{jj'}^{(c)}$ следует, что коэффициент при члене четвертой степени для мягкой моды $Z_{r_0}^{(c_0)}$ не может обратиться в нуль. Таким образом, $Z_{r_0}^{(c_0)}$ не является истинной нулевой модой теории. Тем не менее, отсутствие массы моды $Z_{r_0}^{(c_0)}$ в квадратичном разложении действия означает, что характерная корреляционная функция $\langle \tilde{Q}_{j,-}^{(c_0)} \tilde{Q}_{j',-}^{(c_0)} \rangle$ оказывается параметрически большей, на фактор порядка $N\sqrt{mL_y/v}$, по сравнению с корреляторами тяжелых мод, которые контролируются гауссовым действием. Здесь L_y означает размер системы по координате y . Такое увеличение коррелятора может привести к тому, что поправки к коэффициентам $NL\sigma M$, аналогичные (74)–(75), не будут малы по параметру седла $1/N$. Подробный анализ данного специального случая выходит за пределы данной работы.

6 Заключение

В рамках работы рассмотрено обобщение на случай N каналов на одном линке модели, предложенной в работе [45]. Продемонстрировано, что в пределе $N \gg 1$ соответствующая низкоэнергетическая длинноволновая теория имеет вид $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$ в режиме слабой связи.

При выводе $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$ рассмотрено влияние зеемановского поля, действующего на фермионы на каждом линке, которое может меняться в пространстве. Как и следует ожидать из симметричных соображений, зеемановское поле приводит к появлению в действии $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$ (50) членов, нарушающих $SU(2)$ симметрию. Эти члены являются релевантными [48] и ответственны за кроссовер между симметричными классами C и A [42].

Обнаружено существование дополнительного триплетного сектора теории, который в общем случае не отцепляется от синглетного сектора, порождающего $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$. Моды триплетного сектора массивны и потому не модифицируют структуру $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$, чего и следовало ожидать, поскольку она диктуется симметричными соображениями. Тем не менее триплетный сектор приводит к двум важным следствиям:

- Во-первых, триплетные моды дают поправки к значению затравочной продольной проводимости $\bar{g}$. Обычно в режиме слабой связи эти поправки подавлены малым параметром $1/N$, и поэтому могут быть опущены вместе с обычными массивными модами $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$, возникающими в синглетном секторе.
- Во-вторых, при определенных соотношениях между туннельными элементами некоторые триплетные моды становятся безмассовыми на уровне гауссова действия, хотя остаются массивными за счет членов четвертого порядка по полю. Такое смягчение триплетных мод меняет масштаб ультрафиолетовой обрезки $N\mathcal{L}\sigma\mathcal{M}$ и поправки от триплетных мод к продольной проводимости $\bar{g}$ могут не быть малы как $1/N$ и поэтому требовать учета. Таких значений параметров следует избегать при численном анализе, поскольку в таком случае размер системы, требуемый для наблюдения универсальных эффектов становится параметрически больше по сравнению с обычной ситуацией.

Хотя рассмотренная модель похожа на модель со случайным туннелированием для $iq\text{He}$, рассматриваемую в [44], между ними есть существенные отличия. В случае класса

А обе затравочные проводимости управляются одним параметром, тогда как в рассматриваемой модели класса С продольная и холловская проводимости определяются двумя независимыми параметрами ϕ, ϵ . По этой причине рассматриваемая в работе модель может оказаться удобной для численного исследования фазовой диаграммы потока ренормализационной группы для sqHe (см. Рис. 3), поскольку затравочные значения продольной и холловской проводимостей можно менять непрерывно и независимо.

Особый интерес вызывает тот факт, что отсутствие нулевых собственных значений матрицы $\beta^{(0)}$, кодирующей туннелирование между линками не гарантирует выполнение неравенства $\phi > \epsilon^2$ в (66). Реализация соотношения $\phi < \epsilon^2$ означает, что седловое многообразие (37) перестает быть минимумом действия. Это, по-видимому, указывает на неустойчивость выбранного седла и возможную перестройку основного состояния системы. Поскольку выполнение соотношения $\phi < \epsilon^2$ требует сильной анизотропии туннелирования между четными и нечетными линками, новое состояние может оказаться чем-то вроде димеризованного состояния, когда система эффективно распадается на пары линков, слабо взаимодействующие с остальной системой. Подробный анализ случая $\phi < \epsilon^2$ может стать интересным направлением для дальнейших исследований.

К сожалению, sqHe до сих пор не удалось экспериментально наблюдать. Было предложено искать этот эффект в топологическом сверхпроводящем состоянии $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ [45]. Недавние эксперименты с бислоями $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ дают косвенные указания на возможность спонтанного нарушения симметрии обращения времени при повороте кристаллических решеток монослоев относительно друг друга на 45° [49]. Это согласуется с теорией, предсказывающей реализацию сверхпроводящего порядка $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ в таких системах [50]. Кроме того, такие структуры демонстрируют сверхпроводящий диодный эффект [49], для которого требуется нарушение симметрии обращения времени и пространства [51]. В модели, исследуемой в данной работе, в отсутствие зеемановского поля усреднение по беспорядку восстанавливает симметрию относительно пространственной инверсии. Однако, при наличии зеемановского поля действие (50) содержит член, явно нарушающий симметрию обращения пространства.

Отдельно следует остановиться на различии между моделью, исследуемой в данной работе и моделью Чалкера-Коддингтона $\text{SU}(2)$, то есть класса С. В первой амплитуды туннелирования между линками случайны, в то время как во второй - постоянны. В обе-

их моделях асимметрия амплитуд туннелирования определяет параметр ϵ , определяющий затравочную величину холловской проводимости. Кроме того, в модели из данной работы есть также параметр ϕ , влияющий на продольную затравочную проводимость, в то время как в модели Чалкера-Коддингтона $\phi = 1$. Было бы интересно понять, какую интерпретацию имеет случай $\phi \neq 1$ в контексте вывода NL σ M из модели Чалкера-Коддингтона.

Во введении обращалось внимание на недавние результаты, которые могут указывать на то, что модель Чалкера-Коддингтона может оказаться слишком упрощенной для корректного описания критического поведения iqHe. А именно, численные исследования указывают на возможность изменения критического индекса корреляционной длины ν при наличии геометрического беспорядка [14–18]. Изменение критических индексов на случайных решетках также было продемонстрировано для sqHe [19]. Ввиду этого, было бы интересно расширить исследуемую модель так, чтобы она учитывала эффекты геометрического беспорядка. Возможным шагом в этом направлении могло бы стать введение конечной корреляционной длины амплитуд туннелирования вдоль оси y в выражении (10).

Список литературы

- [1] P. W. Anderson. “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”. В: *Phys. Rev.* 109 (1958), с. 1492. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>.
- [2] A. Altland и M. R. Zirnbauer. “Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures”. В: *Phys. Rev. B* 55 (1997), с. 1142. DOI: [10.1103/PhysRevB.55.1142](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.1142).
- [3] P. Heinzner, A. Huckleberry и M. R. Zirnbauer. “Symmetry Classes of Disordered Fermions”. В: *Commun. Math. Phys.* 257 (2005), с. 725. DOI: [10.1007/s00220-005-1330-9](https://doi.org/10.1007/s00220-005-1330-9).
- [4] C.-K. Chiu и др. “Classification of topological quantum matter with symmetries”. В: *Rev. Mod. Phys.* 88 (2016), с. 035005. DOI: [10.1103/RevModPhys.88.035005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.035005).
- [5] A. Yu. Kitaev. “Periodic table for topological insulators and superconductors”. В: *AIP Conf. Proc.* 1134 (2009), с. 22. DOI: [10.1063/1.3149495](https://doi.org/10.1063/1.3149495).
- [6] Ferdinand Evers и Alexander D. Mirlin. “Anderson transitions”. В: *Rev. Mod. Phys.* 80 (4 окт. 2008), с. 1355—1417. DOI: [10.1103/RevModPhys.80.1355](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1355). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1355>.
- [7] K. von Klitzing, G. Dorda и M. Pepper. “New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance”. В: *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980), с. 494. DOI: [10.1103/PhysRevLett.45.494](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.494).
- [8] M. R. Zirnbauer. *Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/9905054>.
- [9] M. J. Bhaseen и др. “Towards a field theory of the plateau transitions in the integer quantum Hall effect”. В: *Nucl. Phys. B* 580 (2000), с. 688. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(00\)00276-5](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00276-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321300002765>.
- [10] A. M. Tsvelik. *Wave Functions Statistics at Quantum Hall Critical Point*. <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0112008>.

- [11] A. M. Tsvelik. “Evidence for the $\text{PSL}(2|2)$ Wess-Zumino-Novikov-Witten model as a model for the plateau transition in the quantum Hall effect: Evaluation of numerical simulations”. B: *Phys. Rev. B* 75 (2007), c. 184201. DOI: [10.1103/PhysRevB.75.184201](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.184201). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.184201>.
- [12] R. Bondesan, D. Wieczorek и M.R. Zirnbauer. “Gaussian free fields at the integer quantum Hall plateau transition”. B: *Nucl. Phys. B* 918 (2017), c. 52. ISSN: 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.02.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321317300676>.
- [13] M. R. Zirnbauer. “The integer quantum Hall plateau transition is a current algebra after all”. B: *Nucl. Phys. B* 941 (2019), c. 458. ISSN: 0550-3213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2019.02.017>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321319300458>.
- [14] I. A. Gruzberg и др. “Geometrically disordered network models, quenched quantum gravity, and critical behavior at quantum Hall plateau transitions”. B: *Phys. Rev. B* 95 (2017), c. 125414. DOI: [10.1103/PhysRevB.95.125414](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.125414).
- [15] A. Klümper, W. Nuding и A. Sedrakyan. “Random network models with variable disorder of geometry”. B: *Phys. Rev. B* 100 (2019), 140201(R). DOI: [10.1103/PhysRevB.100.140201](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.140201).
- [16] R. Conti и др. “Geometry of random potentials: Induction of two-dimensional gravity in quantum Hall plateau transitions”. B: *Phys. Rev. B* 103 (2021), c. L041302. DOI: [10.1103/PhysRevB.103.L041302](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.L041302).
- [17] E. J. Dresselhaus, B. Sbierski и I. A. Gruzberg. “Scaling Collapse of Longitudinal Conductance near the Integer Quantum Hall Transition”. B: *Phys. Rev. Lett.* 129 (2022), c. 026801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.129.026801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.026801).
- [18] H. Topchyán и др. “The integer quantum Hall transition: an S-matrix approach to random networks”. B: *Phys. Rev. B* L081112 (2024). DOI: [10.1103/PhysRevB.110.L081112](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.L081112).
- [19] E. Macías, I. Gruzberg и E. Bettelheim. *Spin quantum Hall transition on random networks: exact critical exponents via quantum gravity*. <https://arxiv.org/abs/2601.22639>.

- [20] H. Levine, S. B. Libby и A. M. M. Pruisken. “Electron Delocalization by a Magnetic Field in Two Dimensions”. B: *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983), c. 1915. DOI: [10.1103/PhysRevLett.51.1915](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.51.1915).
- [21] D.E. Khmel’nitskii. “Quantization of Hall conductivity”. B: *JETP Lett.* 38 (1983), c. 552. URL: http://jetpletters.ru/ps/0/article_22668.shtml.
- [22] A. M. M. Pruisken. “Quasiparticles in the theory of the integral quantum Hall effect (I)”. B: *Nucl. Phys. B* 285 (1987), c. 719—759. DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90363-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90363-4).
- [23] A. M. M. Pruisken. “Quasiparticles in the theory of the integral quantum Hall effect (II). Renormalization of the Hall conductance or instanton angle theta”. B: *Nucl. Phys. B* 290 (1987), c. 61. DOI: [10.1016/0550-3213\(87\)90178-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(87)90178-7).
- [24] A. M. M. Pruisken и I. S. Burmistrov. “ θ renormalization, electron–electron interactions and super universality in the quantum Hall regime”. B: *Ann. Phys. (N.Y.)* 322 (2007), c. 1265. ISSN: 0003-4916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2006.11.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491606002570>.
- [25] H. P. Wei и др. “Experiments on Delocalization and Universality in the Integral Quantum Hall Effect”. B: *Phys. Rev. Lett.* 61 (11 сент. 1988), c. 1294—1296. DOI: [10.1103/PhysRevLett.61.1294](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1294). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.1294>.
- [26] S. Koch и др. “Size-dependent analysis of the metal-insulator transition in the integral quantum Hall effect”. B: *Phys. Rev. Lett.* 67 (7 авг. 1991), c. 883—886. DOI: [10.1103/PhysRevLett.67.883](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.883). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.883>.
- [27] R. T. F. van Schaijk и др. “Probing the Plateau-Insulator Quantum Phase Transition in the Quantum Hall Regime”. B: *Phys. Rev. Lett.* 84 (7 февр. 2000), c. 1567—1570. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.1567](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.1567). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.1567>.
- [28] A.M.M. Pruisken и др. “Universal scaling results for the plateau–insulator transition in the quantum Hall regime”. B: *Solid State Communications* 137.10 (2006), c. 540—544. ISSN: 0038-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2006.01.016>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0038109806000421>.

- [29] Wanli Li и др. “Scaling in Plateau-to-Plateau Transition: A Direct Connection of Quantum Hall Systems with the Anderson Localization Model”. B: *Phys. Rev. Lett.* 102 (21 май 2009), с. 216801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.216801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.216801). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.216801>.
- [30] J. T. Chalker и P. D. Coddington. “Percolation, quantum tunneling and the integer quantum Hall effect”. B: *J. Phys. C: Solid State Phys.* 21 (1988), с. 2665. DOI: [10.1088/0022-3719/21/14/008](https://doi.org/10.1088/0022-3719/21/14/008).
- [31] K. Slevin и T. Ohtsuki. “Finite size scaling of the Chalker-Coddington model”. B: *Int. J. Mod. Phys.: Conf. Series* 11 (2012), с. 60. DOI: [10.1142/S2010194512006162](https://doi.org/10.1142/S2010194512006162).
- [32] M. R. Zirnbauer. “Toward a theory of the integer quantum Hall transition: Continuum limit of the Chalker–Coddington model”. B: *J. Math. Phys.* 38 (1997), с. 2007. DOI: [10.1063/1.531921](https://doi.org/10.1063/1.531921).
- [33] G.E. Volovik. “On edge states in superconductors with time inversion symmetry breaking”. B: *JETP Lett.* 66 (1997), с. 522. DOI: [10.1134/1.567563](https://doi.org/10.1134/1.567563). URL: <https://doi.org/10.1134/1.567563>.
- [34] V. Kagalovsky и др. “Quantum Hall plateau transitions in disordered superconductors”. B: *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), с. 3516. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.3516](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3516). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3516>.
- [35] Ilya A. Gruzberg, Andreas W. W. Ludwig и N. Read. “Exact exponents for the spin quantum Hall transition”. B: *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), с. 4524. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.4524](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.4524). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.4524>.
- [36] J. Cardy. “Linking Numbers for Self-Avoiding Loops and Percolation: Application to the Spin Quantum Hall Transition”. B: *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000), с. 3507. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.3507](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.3507).
- [37] E. J. Beamond, John Cardy и J. T. Chalker. “Quantum and classical localization, the spin quantum Hall effect, and generalizations”. B: *Phys. Rev. B* 65 (2002), с. 214301. DOI: [10.1103/PhysRevB.65.214301](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.214301). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.214301>.

- [38] A. D. Mirlin, F. Evers и A. Mildenberger. “Wavefunction statistics and multifractality at the spin quantum Hall transition”. B: *J. Phys. A: Math. and Gen.* 36 (2003), с. 3255. DOI: [10.1088/0305-4470/36/12/323](https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/12/323). URL: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/36/12/323>.
- [39] Jonas F. Karcher и др. “Generalized multifractality at spin quantum Hall transition”. B: *Ann. Phys. (N.Y.)* 435 (2021). Special issue on Philip W. Anderson, с. 168584. ISSN: 0003-4916. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2021.168584>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491621001901>.
- [40] Jonas F. Karcher, Ilya A. Gruzberg и Alexander D. Mirlin. “Generalized multifractality at the spin quantum Hall transition: Percolation mapping and pure-scaling observables”. B: *Phys. Rev. B* 105 (2022), с. 184205. DOI: [10.1103/PhysRevB.105.184205](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.184205). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.184205>.
- [41] M. V. Parfenov и I. S. Burmistrov. “Instanton analysis for the spin quantum Hall symmetry class: Nonperturbative corrections to physical observables and generalized multifractal spectrum”. B: *Phys. Rev. B* 110 (16 окт. 2024), с. 165431. DOI: [10.1103/PhysRevB.110.165431](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.110.165431). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.110.165431>.
- [42] M. V. Parfenov и I. S. Burmistrov. “Bulk-edge correspondence at the spin-to-integer quantum Hall effect crossover in topological superconductors”. B: *Phys. Rev. B* 112 (2025), с. L161407. DOI: [10.1103/PhysRevB.112.L161407](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.112.L161407).
- [43] A. Davis. *Supersymmetry Method for Network Models of Quantum Hall Transitions and Hybrid Structures, PhD Thesis*. https://etd.ohiolink.edu/acprod/odb_etd/ws/send_file/send?accession=osu1566157715556164&disposition=inline. 2019.
- [44] D.-H. Lee. “Network models of quantum percolation and their field-theory representations”. B: *Phys. Rev. B* 50 (1998), с. 10788. DOI: [10.1103/PhysRevB.50.10788](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.10788).
- [45] T. Senthil, J. B. Marston и Matthew P. A. Fisher. “Spin quantum Hall effect in unconventional superconductors”. B: *Phys. Rev. B* 60 (1999), с. 4245. DOI: [10.1103/PhysRevB.60.4245](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.4245). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.4245>.
- [46] T. Senthil и M. P. A. Fisher. “Quasiparticle localization in superconductors with spin-orbit scattering”. B: *Phys. Rev. B* 61 (2000), с. 9690. DOI: [10.1103/PhysRevB.61.9690](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.9690).

- [47] A. M. M. Pruisken. “On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the θ -vacuum”. B: *Nucl. Phys. B* 235.2 (1984), с. 277—298. DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90101-9](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90101-9).
- [48] Shanthanu Bhardwaj, Ilya A. Gruzberg и Victor Kagalovsky. “Relevant perturbations at the spin quantum Hall transition”. B: *Phys. Rev. B* 91 (3 янв. 2015), с. 035435. DOI: [10.1103/PhysRevB.91.035435](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.035435). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.035435>.
- [49] S. Y. Frank Zhao и др. “Time-reversal symmetry breaking superconductivity between twisted cuprate superconductors”. B: *Science* 382.6677 (2023), с. 1422. DOI: [10.1126/science.abl8371](https://doi.org/10.1126/science.abl8371).
- [50] Pavel A. Volkov и др. “Current- and Field-Induced Topology in Twisted Nodal Superconductors”. B: *Phys. Rev. Lett.* 130 (18 май 2023), с. 186001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.130.186001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.186001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.186001>.
- [51] M. Nadeem, M. S. Fuhrer и X. Wang. “The superconducting diode effect”. B: *Nat. Rev. Phys.* 5 (2023), с. 558. DOI: [10.1038/s42254-023-00632-w](https://doi.org/10.1038/s42254-023-00632-w).

7 Приложения

7.1 Детали вычисления для баллистической РГ

В данном приложении подробно обсуждается вычисление среднего, входящего в выражение (26). Это выражение содержит усреднение по четырем фермионным полям, поэтому возможны несколько различных способов виковского спаривания. В пределе большого параметра металличности N можно оставлять только члены в ведущем порядке по N . Такие члены соответствуют спариваниям фермионных полей из разных матриц D . Таким образом,

$$\left\langle [D_{j'}^{(a)}(y)]_{\varepsilon_m, \beta, s'; \varepsilon_n, \alpha, s} [D_{j_1}^{(b)}(y')]_{\varepsilon_{m_1}, \beta_1, s'_1; \varepsilon_{n_1}, \alpha_1, s_1} \right\rangle_0 = \textcircled{1} + \textcircled{2}. \quad (78)$$

Здесь первое слагаемое соответствует нормальным спариваниям:

$$\textcircled{1} = - \sum_{s, s', s_1, s'_1, f, f_1} \langle \Xi_{\varepsilon_m \beta j' f \sigma' s'}(y) \bar{\Xi}_{\varepsilon_{n_1} \alpha_1 j_1 f_1 \sigma_1 s_1}(y') \rangle_0 \times (s_a)_{ss'} (s_b)_{s_1 s'_1} \times \langle \Xi_{\varepsilon_{m_1} \beta_1 j_1 f_1 \sigma'_1 s'_1}(y') \bar{\Xi}_{\varepsilon_n \alpha j' f \sigma s}(y) \rangle_0. \quad (79)$$

Второе слагаемое соответствует аномальным спариваниям:

$$\textcircled{2} = \sum_{s, s', s_1, s'_1, f, f_1} \langle \Xi_{\varepsilon_m \beta j' f \sigma' s'}(y) \Xi_{\varepsilon_{m_1} \beta_1 j_1 f_1 \sigma'_1 s'_1}(y') \rangle_0 \times (s_a)_{ss'} (s_b)_{s_1 s'_1} \times \langle \bar{\Xi}_{\varepsilon_{n_1} \alpha_1 j_1 f_1 \sigma_1 s_1}(y') \bar{\Xi}_{\varepsilon_n \alpha j' f \sigma s}(y) \rangle_0. \quad (80)$$

Осуществление нормального спаривания дает:

$$\textcircled{1} = \frac{N}{4} \delta_{j_1 j'} \delta_{\varepsilon_{n_1} \varepsilon_m} \delta_{\varepsilon_{m_1} \varepsilon_n} \delta_{\alpha_1 \beta} \delta_{\beta_1 \alpha} \delta_{\sigma' \sigma_1} \delta_{\sigma'_1 \sigma} \text{tr}_s \left[s_a g_{\varepsilon_m, j_1}(y, y') s_b g_{\varepsilon_n, j_1}(y', y) \right]. \quad (81)$$

С учетом симметричного соотношения (15), аномальный вклад выражается как:

$$\textcircled{2} = -\frac{N}{4} \delta_{j_1 j'} \delta_{\varepsilon_{n_1}, -\varepsilon_n} \delta_{\varepsilon_{m_1}, -\varepsilon_m} \delta_{\alpha_1 \alpha} \delta_{\beta_1 \beta} (\sigma_2)_{\sigma' \sigma'_1} (\sigma_2)_{\sigma_1 \sigma} \text{tr}_s \left[s_a g_{\varepsilon_m, j_1}(y, y') s_2 s_b^T s_2 g_{\varepsilon_n, j_1}(y', y) \right]. \quad (82)$$

Здесь $g_{\varepsilon_m, j}(y, y')$ обозначает одномерную однофермионную функцию Грина. В Намбу пространстве она принимает следующий вид:

$$g_{\varepsilon_m, j}(y, y') = \begin{pmatrix} \langle y | (i\varepsilon_m + iv_j \partial_y)^{-1} | y' \rangle & 0 \\ 0 & -\langle y' | (-i\varepsilon_m + iv_j \partial_y)^{-1} | y \rangle \end{pmatrix} = s_0 \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{-iq(y-y')}}{i\varepsilon_m - v_j q}. \quad (83)$$

В сумме два вклада дают результат в ведущем порядке по N :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{2} = & \frac{N}{2} \delta_{j_1 j'} \delta_{ab} \left[\delta_{\varepsilon_{n_1} \varepsilon_m} \delta_{\varepsilon_{m_1} \varepsilon_n} \delta_{\alpha_1 \beta} \delta_{\beta_1 \alpha} \delta_{\sigma' \sigma_1} \delta_{\sigma'_1 \sigma} + (1 - 2\delta_{a0}) \delta_{\varepsilon_{n_1}, -\varepsilon_n} \delta_{\varepsilon_{m_1}, -\varepsilon_m} \delta_{\alpha_1 \alpha} \delta_{\beta_1 \beta} (\sigma_2)_{\sigma' \sigma'_1} (\sigma_2)_{\sigma_1 \sigma} \right] \\ & \times \int \frac{dq dk}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik(y-y')}}{(i\varepsilon_m - v_{j_1} q)(i\varepsilon_n - v_{j_1} (q+k))} \end{aligned} \quad (84)$$

В низкоэнергетическом пределе это выражение сводится к локальным членам, приводящим к ренормализации (27).

7.2 О нулевых собственных значениях матриц туннелирования

При выводе $NL\sigma M$ предполагалось отсутствие нулевых собственных значений у матрицы β^a , поскольку такие значения означали бы наличие дополнительных нулевых мод теории. Это предположение эквивалентно условию $\det \beta^{(a)} \neq 0$. В данном приложении подробно рассматривается данное условие на матрицу в различных случаях.

7.2.1 Случай тридиагональной матрицы беспорядка

В данном подразделе рассматривается тридиагональная матрица $\beta^{(a)}$, определенная в (25). Для синглетного сектора определитель $M \times M$ матрицы $\beta^{(0)}$ выглядит следующим образом:

$$\det \beta_M^{(0)} = d_M = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}m & \lambda_+ & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_+ & \frac{3}{2}m & \lambda_- & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_- & \frac{3}{2}m & \lambda_+ & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_+ & \frac{3}{2}m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (85)$$

Стандартные свойства определителя дают следующее рекуррентное соотношение на определители:

$$d_{n+2} = (9m^2/4 - \lambda_+^2 - \lambda_-^2)d_n - \lambda_+^2 \lambda_-^2 d_{n-2}. \quad (86)$$

Поскольку это линейное рекуррентное соотношение, его решение может быть записано в терминах корней $x_{\pm}$ характеристического уравнения:

$$x^2 - (9m^2/4 - \lambda_+^2 - \lambda_-^2)x + \lambda_+^2 \lambda_-^2 = 0, \quad (87)$$

имеющего два корня:

$$x_{\pm} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{9}{4}m^2 - (\lambda_+ + \lambda_-)^2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}m^2 - (\lambda_+ - \lambda_-)^2} \right)^2. \quad (88)$$

Нечетные и четные определители даются выражением:

$$\begin{aligned} d_{2k-1} &= \frac{d_2 - x_-}{x_+ - x_-} (\lambda_+^2 + x_+) x_+^{k-1} + \frac{x_+ - d_2}{x_+ - x_-} (\lambda_+^2 + x_-) x_-^{k-1}, \\ d_{2k} &= \frac{d_2 - x_-}{x_+ - x_-} x_+^k + \frac{x_+ - d_2}{x_+ - x_-} x_-^k, \end{aligned} \quad (89)$$

с начальными условиями $d_1 = 3m/2$ и $d_2 = \frac{9}{4}m^2 - \lambda_+^2$. В таком случае условия зануления четных и нечетных определителей:

$$\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^{k-1} = \frac{d_2 - x_-}{d_2 - x_+} \cdot \frac{\lambda_+^2 + x_+}{\lambda_+^2 + x_-}, \quad \left(\frac{x_-}{x_+}\right)^k = \frac{d_2 - x_-}{d_2 - x_+}. \quad (90)$$

Относительно этих условий имеет смысл рассмотреть несколько случаев:

- При $3m/2 > \lambda_+ + \lambda_-$, оба корня действительны и положительны, то есть $d_2 > x_+ > x_- > 0$. В таком случае невозможно удовлетворить условиям (90).
- При $3m/2 < |\lambda_+ - \lambda_-|$ оба корня отрицательны, $x_- < x_+ < 0$. В таком случае неравенства (90) могут выполняться для матрицы конечного размера M . Однако, в пределе бесконечной матрицы, $M \rightarrow \infty$, вклад, пропорциональный x_+^k экспоненциально мал, и оставшийся член нечем сократить в ноль.
- При промежуточном режиме, $|\lambda_+ - \lambda_-| < 3m/2 < \lambda_+ + \lambda_-$, корни комплексные и выражаются как $x_{\pm} = |x|e^{\pm i\phi}$. Тогда условие $d_{2k} = 0$ можно переписать как $d_2 \sin(\phi k) = |x| \sin(\phi(k-1))$, и аналогично, для $d_{2k+1} = 0$,

$$d_{2k-1} = \lambda_+^2 \frac{|x|^{k-2}}{\sin \phi} \left[d_2 \sin(\phi(k-1)) - |x| \sin(\phi(k-2)) \right] + \frac{|x|^{k-1}}{\sin \phi} \left[d_2 \sin(\phi k) - |x| \sin(\phi(k-1)) \right] \quad (91)$$

Таким образом, зануление определителей вполне возможно.

Таким образом, чтобы исключить существование нулевых собственных значений тридиагональной матрицы $\beta^{(0)}$, достаточно наложить условие $m > 2(\lambda_+ + \lambda_-)/3 = 2(\gamma_+ + \gamma_-) + 2(\Delta_+ + \Delta_-)/3$. В пределе бесконечного числа линков, $M \rightarrow \infty$, условие может быть смягчено добавлением разрешенной области параметров $m < 2|\lambda_+ - \lambda_-|/3$.

Для триплетного сектора анализ идентичен с точностью до замены $3m/2 \rightarrow m/2$ и $\lambda_{\pm} \rightarrow \gamma_{\pm} - \Delta_{\pm}$. Соответствующее условие положительности корней $m > 2|\gamma_+ - \Delta_+| + 2|\gamma_- - \Delta_-|$. Таким образом, достаточный набор условий на параметры беспорядка для

отсутствия нулевых собственных значений всех матриц $\beta_{jj'}^{(a)}$ с $a = 0, 1, 2, 3$ следующий:

$$\begin{aligned} m &> 2(\gamma_+ + \gamma_-) + \frac{2}{3}(\Delta_+ + \Delta_-), \\ m &> 2|\gamma_+ - \Delta_+| + 2|\gamma_- - \Delta_-|. \end{aligned} \quad (92)$$

Следует заметить, что при этих условиях коэффициенты π_x и π_y в (45) положительны и выполняется неравенство $\phi > \epsilon^2$.

7.2.2 Случай матриц туннелирования общего вида

В данном подразделе рассматривается матрица туннелирования $\beta_{jk}^{(a)}$ общего вида. Для краткости индекс a далее опускается. Соответствующая функция, играющая роль формального фурье-образа матрицы туннелирования, имеет вид:

$$\underline{\beta}(k) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\beta_n^{(+)} e^{-ikn} + \beta_n^{(-)} e^{ikn} \right), \quad (93)$$

с $\beta_n^{(\pm)} > 0$ и $\beta_0 > 0$. Удобно ввести $\beta_n = \beta_n^{(+)} + \beta_n^{(-)}$ и $\delta_n = \frac{\beta_n^{(+)} - \beta_n^{(-)}}{\beta_n^{(+)} + \beta_n^{(-)}}$, так что $|\delta_n| \leq 1$. Полезно рассмотреть случай достаточно сильного диагонального беспорядка:

$$\beta_0 > \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^{(+)} + \beta_n^{(-)}). \quad (94)$$

В таком случае, $\text{Re } \underline{\beta}(k) > 0$ для всех k и квадратичная форма $\beta_{jj'}^{(a)}$ положительно определена. Стоит отметить, что при этом $\phi > \epsilon^2$, или, эквивалентно $\pi_{x,y} > 0$ также выполняется. Убедиться в этом можно, записав $\phi > \epsilon^2$ как

$$\left(\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n > 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \delta_n \beta_n \right)^2. \quad (95)$$

Доказать данное соотношение можно с помощью неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \right)^2, \quad (96)$$

которое является частным случаем неравенства Коши-Шварца $\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \geq (\mathbf{a} \mathbf{b})^2$, при $a_n = \sqrt{\beta_n}$ и $b_n = n \sqrt{\beta_n}$. Тогда,

$$\left(\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n > 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n \geq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \right)^2 \geq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \delta_n \beta_n \right)^2. \quad (97)$$

Отсюда следует, что условие (94) также гарантирует положительность коэффициентов $\text{NL}\sigma\text{M}$.

Следует отметить, что условие (94) не является необходимым. В этом можно убедиться на следующем примере: $\underline{\beta}(k) = \beta_0 + \beta_1 \cos k - i\delta_1\beta_1 \sin k$ при $1/\sqrt{2} < |\delta_1| < 1$. Тогда, за исключением частного случая $\beta_0 = \beta_1$, выполняется $|\underline{\beta}(k)| > 0$ для всех k . Впрочем, при $\beta_0/\beta_1 < 2\delta_1^2 - 1 < 1$, оказывается $\phi < \epsilon^2$, то есть седло $\text{NL}\sigma\text{M}$ не является минимумом действия.

7.3 Вид поправок от якобиана для матричного поля 4×4 класса С

При выводе $\text{NL}\sigma\text{M}$ и анализе массивных мод не учитывался вклад от якобиана перехода к переменным, параметризующим седловое многообразие. Это связано с тем, что для легких мод якобиан не дает поправок, поскольку это вращения, а для массивных мод он лишь увеличивает их массы. Якобианы класса С и некоторых других классов обсуждаются в работе [2]. Тем не менее, для иллюстрации того, какие вклады дает якобиан в данном разделе рассматривается в наиболее явном виде наиболее простой случай.

Далее рассматривается матричное поле в случае одной реплики на одной конкретной мацубаровской частоте. Для матричного поля Q $\text{NL}\sigma\text{M}$ класса С выполняются условия $Q = -CQ^TC$ и $Q^\dagger = Q$, при $C = \tau_1 \otimes s_2$, где проекция на конкретную мацубаровскую частоту дает $\tau_1 = \ell_0$. Матрица Q размерности 4×4 наиболее общего вида, удовлетворяющая условиям класса С:

$$Q = q_0\tau_3s_0 + \vec{q}\vec{s}\tau_0 + \vec{a}\vec{s}\tau_1 + \vec{b}\vec{s}\tau_2, \quad (98)$$

где $\vec{q}, \vec{a}, \vec{b}$ являются трехмерными векторами. С другой стороны, можно явно выделить для $\Lambda = \tau_3 \otimes s_0$

$$Q = e^{-W/2}Pe^{W/2}; \quad [P, \Lambda] = 0; \quad \{W, \Lambda\} = 0; \quad W^\dagger = -W. \quad (99)$$

$$P = p_0\tau_3s_0 + \vec{p}\vec{s}\tau_0; \quad W = i\vec{x}\vec{s}\tau_1 + i\vec{y}\vec{s}\tau_2. \quad (100)$$

Вариация матричного поля записывается как

$$\delta Q = e^{-W/2} \left(\delta P + \frac{1}{2}[P, \delta W] \right) e^{W/2}. \quad (101)$$

Множители $e^{\pm W/2}$ не влияют на локальный якобиан, поскольку соответствуют обратимому линейному преобразованию с единичным вкладом в определитель. В таком случае локальная замена переменных для диагональных переменных тривиальна:

$$\delta q_0 = \delta p_0; \quad \delta \vec{q} = \delta \vec{p} \quad (102)$$

В то же время для остальных переменных прямой подстановкой можно убедиться, что

$$\delta \vec{a} = p_0 \delta \vec{y} - \vec{p} \times \delta \vec{x}; \quad \delta \vec{b} = -p_0 \delta \vec{x} - \vec{p} \times \delta \vec{y}. \quad (103)$$

Таким образом, локальная замена переменных при переходе к переменным, параметризующим вращения матрицы Λ :

$$\begin{pmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta b_1 \\ \delta b_2 \\ \delta b_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \\ \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & -p_2 \\ 0 & p_0 & 0 & -p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_0 & p_2 & -p_1 & 0 \\ 0 & p_3 & -p_2 & -p_0 & 0 & 0 \\ -p_3 & 0 & p_1 & 0 & -p_0 & 0 \\ p_2 & -p_1 & 0 & 0 & 0 & -p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \\ \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Соответствующий якобиан замены переменных

$$J = |\det(P)| = |-p_0^2(p_0^2 - |\vec{p}|^2)| = |p_0|^2 p_0^2 - |\vec{p}|^2|^2. \quad (105)$$

Видно, что в якобиан дают вклад только массивные моды P . На седле теории

$$P = K \cdot \Lambda + \delta P \quad \Rightarrow \quad p_0 = K + \delta p_0, \quad \vec{p} = \delta \vec{p}, \quad (106)$$

где $K = \frac{N}{2v}$. В таком случае якобиан

$$J = |K + \delta p_0|^2 |(K + \delta p_0)^2 - |\delta \vec{p}|^2|^2. \quad (107)$$

Его вклад в действие

$$S_J = -\ln J = -2 \ln |K + \delta p_0| - 2 \ln |(K + \delta p_0)^2 - |\delta \vec{p}|^2|. \quad (108)$$

Разложение по малости отклонений вблизи седла дает:

$$S_J = -\frac{6}{K} \delta p_0 + \frac{3}{K^2} \delta p_0^2 + \frac{2}{K^2} |\delta \vec{p}|^2 + \mathcal{O}(\delta P^3) \quad (109)$$

В полной репличной теории линейный член от якобиана исчезает в репличном пределе. Полученные квадратичные члены положительны, а значит только увеличивают массы массивных мод, то есть никаких эффектов типа смягчения мод не возникает. Аналогичную ситуацию следует ожидать и при произвольном числе реплик.