

1/

10/10

Good afternoon  
from London

W. Lawrence

I am grateful to I. E. Dzyaloshinski for numerous useful discussions.

## REFERENCES

J. KONDO, *Prog. Theor. Phys.* 32, 37 (1964).  
 A. A. ABRIKOSOV and L. P. GORKOV, *JETP* 43, 2230 (1962).  
 A. A. ABRIKOSOV, L. P. GORKOV and I. E. DZYALOSHINSKI, *Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice Hall (1963).  
 G. M. ELIASBERG, *JETP* 42, 1638 (1962).  
 V. V. SUDAKOV, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 111, 338 (1956).

О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛЕ НА МАГНИТНЫХ ПРИМЕСНЫХ АТОМАХ И ОСУБЕННОСТЯХ ПОВЕДЕНИЯ СОПРОТЯВЛЕНИЯ

А. А. АБРИКОСОВ

(Получили: 17 февраля 1965)

АННОТАЦИЯ

С помощью методов квантовой теории поля для спинового взаимодействия легко вычисление электрического сопротивления металла с парамагнитными примесями в предположении  $J/e_F \ll 1$ , но при произвольной величине  $(J/e_F) \ln(e_F/T)$ , где  $J$  — амплитуда обменного рассеяния,  $e_F$  — энергия ферми. Первый член этого ряда был ранее найден Кондо [1]. Показано, что обменное взаимодействие дает незаписные вклады в сопротивление. При ферромагнитном взаимодействии спин электронов и примеси ( $J > 0$ ) обменная часть сопротивления уменьшается с температурой и исчезает при  $T = 0$ . В обратном случае ( $J < 0$ ) сопротивление при понижении температуры сначала растет. После перехода к максимуму (при  $T = T_{max}$ ), где обменное сопротивление, отнесенное к одному атому примеси, сравнивается по порядку величины с обменным, обменное сопротивление и в этом случае уменьшается до нуля при  $T = 0$ . Такое поведение связано с резонансным характером амплитуды рассеяния при  $J < 0$ . В расчете предполагается, что спин примесей полностью неупорядочены, т.е. температура выше температуры Кюри примесного ферромагнетизма. Поскольку последняя пропорциональна концентрату, а  $T_{max}$  от нее не зависит, то полученные результаты справедливы при достаточно малых концентратах.

Появление минимума в электрическом сопротивлении некоторых металлов, как функции температуры уже давно привлекало к себе внимание. Исследования этого явления показали, что по всей вероятности оно связано с наличием в металле (земельном) примесных атомов с незаполненными внутренними оболочками. Однако, до недавнего времени не существовало удовлетворительного объяснения взаимодействия электронов с такими атомами и причин возникновения минимума. Такое объяснение дала работа Кондо [1], в которой была вычислена поправка следующего приближения (по сравнению с обменным) к вероятности рассеяния электронов примесями, связанного с обменным взаимодействием  $J$ . При этом оказалось, что в вероятности рассеяния поправляется порядка  $(J/e_F) \ln(e_F/T)$ , где  $e_F$  — энергия электрона, отсюда следует поправка  $(J/e_F) \ln(e_F/T)$ , что и приводит к росту сопротивления с понижением температуры при отрицательном знаке  $J$  (антиферромагнитное взаимодействие электронов с примесями).

Расчет Кондо сдвигов, при двух ограничениях. Во-первых по-  
яска должна быть невелика. Во-вторых спины атомов примеси должны  
быть некоррелированы друг с другом. Иначе говоря, температура дол-  
жна быть выше точки Кюри ферромагнетизма (или антиферро-  
магнетизма). Как известно (см. например [2]), температура Кюри про-  
порциональна концентрации дефектов. В то же время относительная  
сдвиг в противоположных, противоположная  $(J/e_r) \ln(e_r/T)$  не зави-  
сит от концентрации. Следовательно возможна область малых concentra-  
ций дефектов, при которой  $(J/e_r) \ln(e_r/T)$  становится порядка или  
даже единицы еще до наступления упорядочения спинов. В этом слу-  
чае теория возмущений уже неприменима, и необходимо суммировать  
по рдт. Это значителение и проделано в настоящей работе.

1. Спиновая техника

Основная трудность расчета связана с некомулативностью проекции  
оператора спина примеси. Отметим, что согласно [1] именно это и  
является в квантовой механике причиной. Это означает, что гамильтониан  
имеет вид

$$H_{int} = - (J/\lambda) \sum_n \psi_n^\dagger \sigma_n^z \psi_n \sigma_n^z \quad (1)$$

моделем считаем 6-функциональным) существование некоммутирующей  
системы спинов электрона с внешним магнитным полем. С другой  
стороны оператор  $S^z$  нельзя рассматривать и как обычный оператор  
[3]. Дело в том, что каждое среднее типа

$$\langle T(S^z(t_1) S^z(t_2) \dots S^z(t_n)) \rangle$$

здесь  $S^z$  относится к одному атому, ( $z$  — индекс проекции),  
и  $\langle \dots \rangle = Sp(\dots)/(2S+1)$ , отсюда не может быть представлено как сум-  
мирование по типам

$$\langle T(S^z(t_1) S^z(t_2) \dots S^z(t_n)) \rangle \dots + \dots$$

виду этого для расчета эффектов, в которых существует некомулата-  
тивность проекции  $S^z$  нужна особая техника.

Ряд вавриантах такой техники для спина  $S = \frac{1}{2}$  было построено не-  
давно (см. например И.Е. Дзюбинский и автором настоящей статьи  
недавно опубликовано). Мы здесь воспользуемся одним из этих вариантов,  
который нам удалось обобщить на случай произвольного спина.  
Введем оператор фиктивного фермионного поля  $c_{n\alpha}$  и  $c_{n\beta}$  соот-  
ветствующие оператору спина  $S_n$  согласно формуле

$$c_{n\alpha} \bar{c}_{n\beta} = S_n \quad (2)$$

где  $S_n$  — матрица спина. Каждый индекс  $\alpha$  и  $\beta$  пробегает  $2S+1$   
значений:  $\alpha, \beta, \dots, S$ . Операторы  $S^z$ , введенные согласно (2), облада-  
ют стандартными коммутационными соотношениями при обычных коммута-  
ционных соотношениях операторов  $c_{n\alpha}$

$$\{c_{n\alpha}, c_{n\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{c_{n\alpha}, c_{m\beta}\} = 0 \quad (3)$$

Однако они обладают одним существенным недостатком. Дело в том, пред-  
полагая что оператор  $c_{n\alpha}$  вводит фиктивные состояния. Действительно, пред-  
положим, что спин  $S$  имеет проекцию  $M$  на избранную ось. Этому  
соответствует состояние  $\Phi_M$ , для которого  $S^z \Phi_M = M \Phi_M$ ,  $S^z \Phi_M = 0$ ,  
т.е. есть лишь одна «частица» соответствующая оператору  $c_{n\alpha}$  и нет  
«частицы», соответствующей оператору  $c_{n\beta}$ . Однако совершенно по-  
нятно, что введен оператор  $c_{n\beta}$  мы ввели в рассмотрение нефизические  
состояния, в которых либо вообще все числа заполнения равны нулю,  
либо больше одного из них равно единице. Эти состояния необходимо  
исключить.

В случае спина  $S = \frac{1}{2}$  это происходит автоматически следующим  
образом. Все физические величины содержат только средние от про-  
веденный операторов  $S^z$ . Другие комбинации  $c_{n\alpha}$  в них не входят.  
Поэтому оператор  $S^z$  для  $S = \frac{1}{2}$  удовлетворяет тем свойствам, что дает  
нуль, действуя на нефизические состояния (0,0) или (1,1). Таким  
образом, можно брать штур по всем состояниям. Правда, при этом надо  
учесть условие нормировки. Поскольку при полном усреднении штур  
летит на  $2^n$ , а при физическом только на  $2^n$ , где  $n$  — число раз-  
личных атомов, фигурирующих в рассматриваемом среднем, то результат  
надо умножить на  $2^n$ .

Эта процедура легко обобщается на случай  $S > \frac{1}{2}$ . Операторы (2)  
в этом случае дают нуль при действии на состоянии (0,0,...,0), но от-  
личны от нуля результат при действии на состоянии, где несколько  
чисел заполнения равно единице. Ввиду этого мы будем считать, что  
на каждую «частицу» приходится энергия  $\lambda \gg T$ . При этом главный  
вклад дадут состояния, в которых  $\lambda$  имеет минимум (т.е. 1). Эта  
процедура тоже требует правильной нормировки для того, чтобы среднее  
было  $(2S+1)^{-1} Sp(S^z \dots)$  (для одного атома) вместо правильного зна-  
чения. Надо умножить значение, вычисленное по наивысшему значе-  
нию  $(2S+1)$  и потом положить  $\lambda \rightarrow \infty$ . В общем случае надо умножить  
результат на  $[\epsilon^n T / (2S+1)]^n$ , где  $n$  — число участвующих атомов  
примеси.

Вот эта нормировка приводит фактически к существенному неудобству:  
при использовании изложенной техники. Дело в том, что в приближе-  
нности обычной техники теории поля, средние от операторов, отно-  
сящихся к одному атому, и от операторов для разных атомов, входят  
не на равных правах. Это очень существенно для задачи, связанной с  
уточнением энергии спина. Однако в рассматриваемом случае каждый атом  
примеси фактически рассеивает электроны независимо (это будет про-  
демонстрировано ниже), и поэтому можно рассматривать лишь один атом.  
Полта нормировка не вносит никаких трудностей.

Мы воспользуемся температурной теорией поля. «Свобод-  
ные» тригонометрические функции для операторов  $c_{n\alpha}$  (для одного атома) имеют  
в атом случае вид:

$$\langle c_{n\alpha}(t-t') \rangle = - \langle T(c_{n\alpha}(t) c_{n\alpha}^\dagger(t')) \rangle \quad (4)$$

$$\langle c_{n\beta}(t) \rangle = T \sum_{\omega} \langle c_{n\beta}(\omega) \rangle e^{-i\omega t}$$

$$\langle c_{n\beta}(\omega) \rangle = \delta_{\beta\beta'} / (i\omega - \lambda), \quad \omega = (2n+1)\pi T$$

(среднее относится здесь ко всем состояниям). Функции  $\varphi$  на диаграммах мы будем обозначать пунктирной линией.



Рис. 1

Вниманием для примера простейшие диаграммы собственной энергии электрона. Помимо иллюстраций, это вычисление позволяет предугадать наиболее важные моменты полного расчета. Рассмотрим сначала случай одного примесного атома в точке  $\vec{r}$ . Тамiltonиан взаимодействия является формулой (1). Диаграмма первого неисчезающего приближения приведена на рис. 1. Ей соответствует выражение

$$\sum_{\alpha\alpha'}^{(1)} \left( \vec{p}, \vec{p}', \omega \right) = -\frac{e\lambda/T}{2S+1} \left( \frac{J}{N} \right)^2 \text{Sp} \left( S_i S_k \right) \left( \sigma_i \sigma_k \right)_{\alpha\alpha'} e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{r}} \times$$

$$\times \int d\vec{p}'' (2\pi)^3 \sum_{\omega_1 \omega_2} \frac{1}{i(\omega + \omega_1 - \omega_2) - \xi(\vec{p}'')} \times \frac{1}{i\omega_1 - \lambda} \times \frac{1}{i\omega_2 - \lambda}$$

где  $\xi$  — энергия электрона, отсчитанная от энергии Ферми. Взяв сумму по  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , получаем вместо  $\sum_{\omega_1 \omega_2}$  выражение

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{i\omega - \xi(\vec{p}'')} \left( \tanh \frac{\xi}{2T} + \tanh \frac{\lambda}{2T} \right) \left( \coth \frac{\lambda + \xi}{2T} - \tanh \frac{\lambda}{2T} \right)$$

Пологая  $\lambda \gg T$ , получаем отсюда просто  $-e^{-\lambda/T} [i\omega - \xi(\vec{p}'')]^{-1}$ . Уравнение по положению атома примеси  $\vec{r}$ , и проинтегрировав по всем атомам примеси, взяв интеграл по  $\vec{r}$  и отбрасывая действительную часть  $\Sigma$ , давая лишь малую поправку к химическому потенциалу, получаем:

$$\sum_{\alpha\alpha'}^{(0)} \left( \vec{p}, \vec{p}', \omega \right) = \delta_{\alpha\alpha'} \delta \left( \vec{p} - \vec{p}' \right) \left( 2\pi \right)^3 \sum_{\omega} \left( \omega \right)$$

$$\sum_{\omega} \left( \omega \right) = - (i/2T_0) \text{sign } \omega$$

$$\frac{1}{T_0} = \left( \frac{J}{N} \right)^2 S(S+1) N^2 \frac{\rho_{0M}}{\pi}$$

(5)

где  $M$  — число атомов примеси в единице объема.

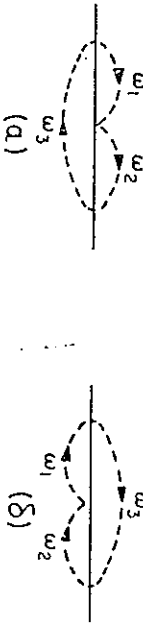


Рис. 2

Ордин членов следующих приближений могут быть члены, зависящие только от одного атома примеси и члены, зависящие от большого числа таких атомов. Рассмотрим прежде всего следующие поправку, зависящую от одного атома примеси. Ей соответствуют две диаграммы (рис. 2а и б). Имеем для диаграммы 2а (после упрощения по положению и суммирования по всем атомам)

$$\sum_{\alpha\alpha'}^{(2a)} \left( \vec{p}, \omega \right) = -\frac{e\lambda/T}{2S+1} \left( \frac{J}{N} \right)^3 \text{Sp} \left( S_i S_k S_l \right) \left( \sigma_i \sigma_k \sigma_l \right)_{\alpha\alpha'} \times$$

$$\times T^3 \sum_{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}''}{(2\pi)^3} \frac{1}{i(\omega + \omega_3 - \omega_1) - \xi(\vec{p}')} \times \frac{1}{i(\omega + \omega_3 - \omega_2) - \xi(\vec{p}'')} \times$$

$$\times \frac{1}{i\omega_1 - \lambda} \times \frac{1}{i\omega_2 - \lambda} \times \frac{1}{i\omega_3 - \lambda}$$

В этом выражении хорошо видны признаки написания формул по диаграммам. (а) Каждый пунктирной линии сопоставляется своя частота. Электронные частоты определяются из законов сохранения. (б) Идутся диаграммы на каждой внутренней линии независимы и по нему происходит интегрирование. (в) Берется  $\alpha\alpha'$  компонента от произведения электронных операторов спина в порядке их расположения на электронной линии. (г) Все пунктирные линии, относящиеся к одному атому, вместе составляют замкнутую петлю. Берется штур от операторов спина примеси в порядке их расположения на петле. Взяв сумму по  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3$  и считая  $\lambda \gg T$ , получаем

$$e^{-\lambda/T} \left[ \frac{1}{e^{-\xi(\vec{p}'')/T} + 1} \times \frac{1}{\xi(\vec{p}') - \xi(\vec{p}'')} \times \frac{1}{i\omega - \xi(\vec{p}')} + \frac{1}{e^{-\xi(\vec{p}')/T} + 1} \times \frac{1}{\xi(\vec{p}'') - \xi(\vec{p}')} \times \frac{1}{i\omega - \xi(\vec{p}'')} \right]$$

Это два совершенно симметричных выражения. Нетрудно увидеть, что первое слагаемое дает логарифмический интеграл по положительным  $\xi(\beta)$  в области  $L$ ,  $\xi(\beta') \ll \xi(\beta'') \ll \epsilon_F$ . В принципе интеграл по  $\beta'$  распространяется на большую область. Фактически он ограничен лишь пределом, обратным радиусу взаимодействия; последний может быть гораздо меньше  $1/\rho_0$  для  $\beta'$  или  $\beta''$ -оболочек. Однако, как будет показано в разделе 3, эта непригодность ликвидирована перенормировкой при переходе от борновской амплитуды  $J$  к истинной  $J_1$ . Что касается оставшегося интеграла, то он опять берется по  $\xi(\beta'') \sim \omega$ . Таким образом в диаграмме 2а один из интегралов по  $\xi(\beta')$  может быть логарифмическим, и при этом другой обязательно нелогарифмический. Поочередку логарифмическим может быть любой из интегралов, то возникает два одинаковых члена.

В целом получаем с логарифмической точностью

$$\sum_{2T_0}^{(2a)} = \frac{1}{2T_0} \text{sign} \frac{2J \rho_0 \ln \frac{\epsilon_F}{\omega}}{N 2\pi^2}$$

Таким же образом можно получить, что  $G_{\alpha\beta}$ , соответствующая диаграмме (2б) равно  $2T_0$ . В сумме полученных результатов можно интерпретировать как изменение величин  $1/T_0$

$$\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0} \left( 1 - \frac{4J \rho_0 \ln \frac{\epsilon_F}{\omega}}{N 2\pi^2} \right) = \frac{1}{T_0} \left( 1 - \frac{3zJ}{\epsilon_F} \ln \frac{\epsilon_F}{\omega} \right) \quad (6)$$

(2 - число электронов на 1 атом). В этом фактически и заключается результат, полученный нами [1] другим способом.

Анализировав полученные выше вычисления нетрудно увидеть, что их можно считать следующим образом. В каждом из рис. 2а и 2б мы можем провести два поперечных разреза через одну электронную и две спиновые линии. Проведем один такой разрез. В двух случаях и одном интеграле, соответствующем такому разрезу существуют значения переменных  $\omega$ . Остаточная сумма и интеграл приводятся к логарифмическому интегралу, в котором существуют значения переменных в интервале  $|\omega| \ll |\omega_1|, |\omega_2| \ll \epsilon_F$ . В каждой диаграмме надо провести все возможные разрезы по трем линиям. Можно произвести анализ диаграмм следующим образом. Если сохранять члены с логарифмическим слагаемым логарифма при данной степени  $J$  (это члены  $J^2 \ln^2 \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ), то мы обязательно приходим к выводу, что это диаграммы, в которых интеграл по разрезу берется при  $|\xi|, |\omega| \sim |\omega|$ , а во всех остальных диаграммах возникает логарифм и соответствующие значения переменных  $|\xi|, |\omega| \gg |\omega|$ . Это положение очень наглядно раскрывается электронного взаимодействия в ферми-жидкости, проведенные Г.И. Шлишбергом [4], и мы воспользуемся поэтому его методом.

Однако, прежде чем это сделать, рассмотрим диаграммы следующих порядков, в которых участвует не один, а два атома примеси. Низшие диаграммы такого рода изображены на рис. 3а и 3б. Если применить упрощение по поперечным срезам, то нетрудно увидеть, что вклад диаграммы 3а по отношению к диаграмме 1 составляет  $1/T_0 \epsilon_F$ , т.е. очень мал.

Это же относится ко всем другим диаграммам с пересечением линий от разных атомов. Что же касается диаграмм с внутренними вставками типа 3б, то здесь можно рассмотреть следующий образцом. Согласно предыдущему, роль внутренней вставки (см. (5)) сводится к замене  $G = (i\omega - \xi)^{-1}$  на  $G' = (i\omega + \frac{1}{2} \text{sign} \xi - \xi)^{-1}$ . Проведем в диаграмме 3г



Рис. 3

замену  $G' = G + (G' - G)$  и в члене с  $G' - G$  будем интегрировать сначала по  $\xi$ . При этом получается ноль. Значит остается только интеграл с  $G$ . Это относится ко всем диаграммам с внутренними вставками. Итак, достаточно рассмотреть лишь диаграммы для одного атома примеси.

2. Собственно-энергетическая часть

Как уже сказано, мы применим метод работ [4]. Вдобавок на интегральных нас диаграмм мы можем провести разрез по трем линиям. Сумма и интегралы по этим переменным надо вычислять точно, так как здесь существуют малые значения аргументов. Что касается остальных частей диаграммы, то в них существуют большие значения переменных, и, с логарифмической точностью, мы можем заменить все суммы по час-отам интегралами. Таким образом, нам предстоит вычислить подиру



Рис. 4

сумму диаграмм, изображенных на рис. 4, где заштрихованные квадраты обозначают сумму «четырехугольник», вычисленную с логарифмической точностью. Мы ее обозначим

$$[\text{об. } \alpha' \beta'(\omega, \beta, \omega_1; \omega + \omega_1 - \omega_2, \beta, \omega_2)]$$

Диаграммы на рис. 4 соответствуют выражение

Расчетная диаграмма высших порядков (рис. 6) нетрудно выяснить, что максимальная степень логарифма в каждом данном порядке обладает только диаграммы, подпадающие под категорию упрощенно двум линиям, одной электронной и одной спиновой, такому, что в результате получается элементная вершина. Например, упрощая рис 6с можно получить сначала диаграмму типа 6а, затем 6b и затем, простоя вершину. Этим свойством обладает так называемые «паркетные» диаграммы 6а, b; 6a, b, c, и не обладает, например 6d.

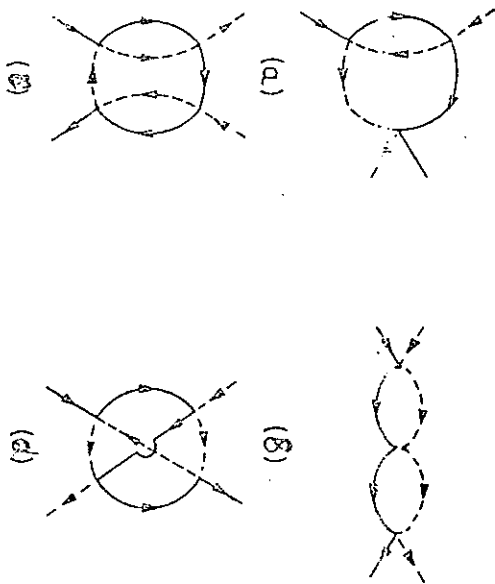


Рис. 6

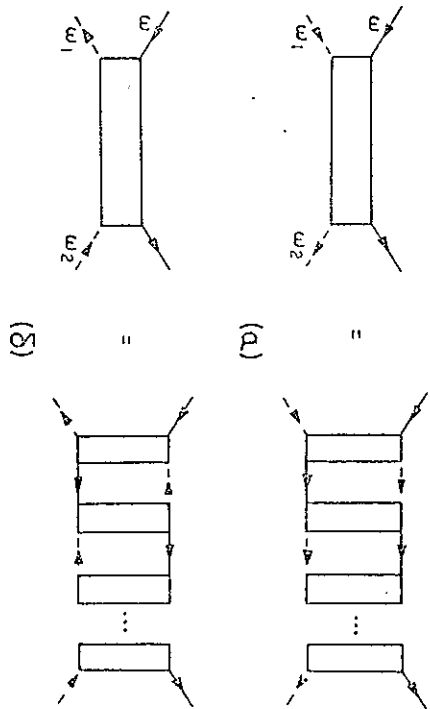


Рис. 7

Мы просуммируем «паркет» по методу В.В. Сулякова [5]. Отметим, что имеются два различных элемента «паркета», изображенные на рис. 6а и 6b. Мы можем внести в рассмотрение две разных суммы диаграмм, изображенные на рис. 7а и b.

Обозначим диаграмму, разрезаемую по двум параллельным линиям (рис. 7а), через  $A_1$  и диаграмму, разрезаемую по двум антипараллельным линиям, через  $A_2$  (рис. 7b). Очевидно, что  $\Gamma = \Gamma_0 + A_1 + A_2$ , где  $\Gamma_0$  — «затравочное» взаимодействие во внутренних  $\omega_1, \omega_2$ . Заметим, что в логарифмическом интегрировании во внутренних  $\omega_1, \omega_2$  на рис. 7а и b участвуют значения аргументов, большие, чем их внешние концы, т.е. чем соответствующие пары из двух параллельных или двух антипараллельных линий.

Рассмотрим теперь для определенности диаграмму 7а для  $A_1$ . Очевидно, что самым низким пределом логарифмических интегралов в этой диаграмме является  $\omega$  (если внешние  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ). Выделим ту же внутреннюю пунктирную линию, у которой  $\omega_1$  минимально. Слева и справа от этого элемента могут стоять любые элементы  $\Gamma$ , т.е. иначе говоря, в сумме и слева, и справа стоит полная  $\Gamma$ . Роль  $\omega$  для этих  $\Gamma$  играет величина  $\omega_1$ . Таким образом, можно написать уравнение (с логарифмической точностью):

$$A_1 \alpha \beta, \alpha' \beta' (\omega) = \frac{P_{0m}}{2\pi^2} \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \Gamma_{\alpha \beta, \alpha' \beta'}(\omega_1) \Gamma_{\alpha'' \beta'', \alpha' \beta'}(\omega_1) \quad (11a)$$

Аналогичным образом

$$A_2 \alpha \beta, \alpha' \beta' (\omega) = -\frac{P_{0m}}{2\pi^2} \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \Gamma_{\alpha \beta, \alpha' \beta'}(\omega_1) \Gamma_{\alpha'' \beta'', \alpha' \beta'}(\omega_1) \quad (11b)$$

Складывая выражения, получаем

$$\Gamma_{\alpha \beta, \alpha' \beta'}(\omega) = \frac{P_{0m}}{N} (\sigma \bar{\sigma}) + \frac{P_{0m}}{2\pi^2} \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \left[ \Gamma_{\alpha \beta, \alpha' \beta'}(\omega_1) \Gamma_{\alpha'' \beta'', \alpha' \beta'}(\omega_1) - \Gamma_{\alpha \beta', \alpha' \beta}(\omega_1) \Gamma_{\alpha'' \beta'', \alpha' \beta'}(\omega_1) \right] \quad (12)$$

Введем переменную  $\ln \frac{\omega}{\omega_1} = x$  и будем искать решение в виде  $\Gamma = \Gamma(\sigma) + (\sigma \bar{\sigma}) \Gamma(\sigma)$ . При этом получаем:

$$\Gamma(\sigma(x)) = \frac{P_{0m}}{N} \int_{-\pi^2}^x dy \left[ \Gamma(\sigma(y)) \right]^2$$

$$\Gamma(0) = 0 \quad (13)$$

Решая интегральное уравнение, получаем:

$$\Gamma = \frac{(J/N) \frac{1}{2} S}{1 + \frac{J}{N} \frac{P_{0M}}{\pi^2} \ln \frac{\epsilon F}{|\omega|}} \quad (14)$$

Подставляя в (9), получаем

$$\Sigma = \frac{1}{2\tau} \frac{1}{\text{sign } \omega} \left[ 1 + \frac{3Jz}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{|\omega|} \right]^{-1} \quad (15)$$

В выражениях (14) и (15) имеется одна особенность. Если  $J < 0$ , то при таком значении  $|\omega|$  эти выражения имеют полюс. Наличие такого полюса свидетельствует о том, что в рассевании имеется резонанс. Этот резонанс ширины резонанса должен привести к тому, что в знаменателе формулы (14) и в логарифмическому члену приводится минимое значение  $\frac{1}{N} \frac{P_{0M}}{\pi^2}$ . Это видно уже из формулы (10).

Для нахождения таких членов наше приближение неприменимо. Поэтому мы будем пользоваться выражениями (14), (15) только от полюса, в окрестности которого оценивать лишь порядки величин, основываясь на том, что к  $\ln \frac{\epsilon F}{|\omega|}$  в знаменателе прибавляется слагаемое, которое константное  $\frac{1}{N}$ .

3. Обиное взаимодействие. Переход к амплитуде рассеяния

До сих пор мы рассматривали взаимодействие обменного взаимодействия. В то же время во взаимодействии электрона с атомом примеси обязательно присутствует обычный обменный член, значительно большей величины. Естественно, возникает вопрос о возможности интерференционных эффектов.

Обиное взаимодействие, отличное от обменного, может рассматриваться, как внешнее поле и обозначается крестом на электронной линии.

Прежде всего отметим, что по тем же причинам, что и раньше, составлено рассматривать взаимодействие только с одним атомом. Теперь представляется, что в диатрале  $\Sigma$  у нас на электронной линии находится некоторое количество крестов (рис. 8). Считаю для простоты взаимно-декогерентными, получаем

$$-\frac{1}{2\pi} \left( \frac{J}{N} \right)^2 \left[ S(S+1) - \sigma^2 S^2 \right] \left( \frac{P_{0M}}{2\pi^2} \right)^2 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \frac{1}{\omega_1 + i\delta} \frac{1}{\omega_2 - \omega_1 - \xi_1 + i\delta} \frac{1}{\omega_3 + i\delta} \sin \xi_1$$

где через  $\Phi$  обозначена вся вставка от первого креста до последнего. Интегрируя, можно убедиться, что логарифмическое выражение в этом случае не получается. Учитывая, что сумма всех возможных  $\xi$  имеет порядок  $\frac{\epsilon F}{N}$ , находим, что диаграмма со вставкой в  $1/\ln \frac{\epsilon F}{|\omega|}$  раз меньше диаграммы без вставки.



Рис. 8

Однако крест можно вставить и в ту электронную линию, которая не участвует в логарифмическом интеграле. После всего вставка креста в самую первую диаграмму  $\Sigma$ . При этом можно убедиться, что диаграмма со вставкой имеет порядок  $\frac{1}{N}$ . Отсюда следует, что обменное взаимодействие дает отдельное слагаемое в  $\Sigma$  и никак не интерферирует с обменной частью. Обычная часть была рассмотрена в целом ряде работ (см. например [3], § 39.2). Она имеет вид, где

$$-\frac{1}{2\sigma_{0M}} \text{sign } \omega, \text{ где } \frac{1}{\sigma_{0M}} = \frac{\pi P_{0M}}{N} |a|^2$$

( $a$  — амплитуда рассеяния, соответствующая необходимому взаимодействию).

Теперь рассмотрим второй существенный вопрос. Во всем предыдущем расчете интегралы по  $\xi$  брались в пределах  $-\epsilon F < \xi < \epsilon F$ . В действительности эти интегралы со стороны положительных  $\xi$  ограничены только условием  $|\xi| < \frac{1}{N}$ , где  $\frac{1}{N}$  — радиус взаимодействия, который может быть гораздо меньше  $1/P_0$ . Ввиду этого, надо произвести перенормировку взаимодействия.

Вместо борновской амплитуды рассеяния мы введем истинную обменную амплитуду рассеяния электрона на атоме. Если  $\hat{f}$  есть борновская амплитуда, а  $\hat{f}_1$  — истинная, то аналогично § 25.4 имеем:

$$\hat{f} = \hat{f}_1 - \hat{f}_1 \frac{P_{0M}}{2\pi^2} \int \frac{d\xi_1}{\xi - \xi_1 + i\delta} \quad (16)$$

Роль  $\hat{f}$  до сих пор играет у нас величина  $-\frac{1}{N} \sigma_{0M}$ . Но мы теперь будем считать  $\hat{f} = -\frac{1}{N} \sigma_{0M} + \hat{f}_0$  где  $\hat{f}_0$  не зависит от  $\sigma_{0M}$ , и тогда берем  $\hat{f}_0$  так, чтобы уравнение (16) удовлетворялось при  $\hat{f}_1 = -\frac{1}{N} \sigma_{0M}$

то означает, что в «загрязненной» взаимодельствие мы включили часть обычного взаимодействия. Диаграммная техника от этого не страдает, так как оператор  $\int_0^{\infty} d\tau d\tau'$  тоже дает нуль, действуя на состоянии с нулевыми числами заполнения, а другие неправильные состояния исключаются прикладной нами процедурой. Это обстоятельство, вообще говоря, дает возможность рассматривать обычное взаимодействие вместе с обменным. Однако, поскольку обычная часть, кроме перенормировки, не дает никакого вклада в логарифмические интегралы (вклад обычного взаимодействия в интегралы (10) (а) и (b) взаимно сокращается), то мы рассмотрим его отдельно. Это имеет и то преимущество, что обычное взаимодействие  $U$ , как правило сильнее обменного и поэтому совместное рассмотрение приведем би к совершенно ненужному ограничению  $(J/N) \ln \frac{e^{\epsilon}}{T} \gg U$ . Включаемая часть  $J_0$ , как мы сейчас увидим, имеет порядок  $\frac{J_0}{N} \frac{e^{\epsilon}}{T}$  и не приводит к новым ограничениям.

$$f = \frac{J_1}{N} \sigma \tilde{S} - \left(\frac{J_1}{N}\right)^2 \frac{\rho_0 \pi}{2\pi^2} \left[ S(S+1) - \sigma \tilde{S} \right] \int \frac{d\xi_1}{\xi - \xi_1 + i\delta} \quad (17)$$

При нахождении членов второго порядка (формула (10)) мы произведем перенормировку операторных слагаемых. Заменяем в (10)  $J$  на  $J_1$ , а членов того же члена первого порядка для верхних  $\Gamma$  переходим к  $J_0$  и поменяем (17). Если не производить интегрирования по  $\xi_1$ , то в  $J_0$  выраже подведем:

$$\left(\frac{J_1}{N}\right)^2 \left[ S(S+1) - \sigma \tilde{S} \right] \frac{\rho_0 \pi}{2\pi^2} \int d\xi_1 \left[ \frac{\theta(\xi_1)}{\xi_1 - \omega - i\delta} - \frac{1}{\xi_1 - \xi + i\delta} \right] \quad (10a')$$

В дальнейшем мы укажем, что для нахождения проводимости будет нужен случай  $\xi \ll \epsilon_F$ . При этом получаем с логарифмической точностью

$$-\left(\frac{J_1}{N}\right)^2 \left[ S(S+1) - \sigma \tilde{S} \right] \frac{\rho_0 \pi}{2\pi^2} \int d\xi_1 \frac{\theta(-\xi_1)}{\xi_1 - \omega} = \left(\frac{J_1}{N}\right)^2 \frac{\rho_0 \pi}{2\pi^2} \left[ S(S+1) - \sigma \tilde{S} \right] \ln \frac{\epsilon_F}{|\omega|}$$

Поскольку теперь интегрирование идет по отрицательным  $\xi_1$  ( $|\xi_1| < \xi_0$ ), то вопрос о пределе интегрирования не возникает.

Так обстоит дело в низшем приближении. Покажем, что такая же перенормировка может быть произведена и в высших приближениях. Дело в том, что сделать переход от  $n$ -го порядка к  $n+1$ -му. Этот переход может быть осуществлен путем поочередной замены каждой простой вершины на сумму двух верхних частей, изображенных на рис. 5а и 5б. Если в  $n$ -ом порядке во всех верхних стояли  $J_1/N$ , то в новом диаграммах  $n+1$ -го порядка при этой замене тоже везде станут  $J_1/N$ .

Но кроме этого надо усовершенствовать саму диаграмму  $n$ -го порядка, подставляя поочередно, вместо всех  $J_1/N$  выражение (17). Иными словами при таком переходе от  $n$ -го к  $n+1$ -му приближению интегралы типа (10a) заменяются на (10a'). Если к тому же учесть, что во всех логарифмических интегралах  $\omega \sim \xi$ , то практически дело сводится к тому, что во всех верхних становится  $J_1/N$  и все интегралы

берутся по области  $\xi < 0$ , т.е. можно брать  $\epsilon_F$  в качестве предела интегралов по  $\xi$ .

#### 4. Сопротивление

Как известно (см. например [3], § 39.3) связь между током и векторным потенциалом, зависящим от частоты, при отсутствии прослоенной дисперсии имеет следующий вид

$$j_i(\omega) = Q_{ik}(\omega) A_k(\omega) \quad (18)$$

Причем для случая изотропного рассеяния  $Q(\omega)$  представляется собой аналитическое продолжение на действительную ось  $\omega$  выражения:

$$\frac{N e^2}{m c} \delta_{ik} + \frac{2e^2}{(2\pi)^3 m^2 c} T \sum_{\omega'} \int d\vec{p} p_i p_k \delta(\vec{p}, \omega') \delta(\vec{p}, \omega' - \omega) \quad (19)$$

где  $Q$  — тензоратурные гриновские функции. Перейдем от суммирования по  $\omega'$  к интегрированию по действительной частоте (см. [3], § 21.2) после чего (считая в (19)  $\omega > 0$ ) аналитическое продолжим это выражение на действительные  $\omega$ . Получаем при этом:

$$\frac{N e^2}{m c} \delta_{ik} + \frac{e^2}{\pi (2\pi)^3 m^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d\vec{p} p_i p_k \ln \left( \frac{\omega'}{2\pi} \right) \times \\ \times \left[ G_A(\vec{p}, \omega' - \omega) + G_R(\vec{p}, \omega' + \omega) \right] \tanh \frac{\omega'}{2T} \quad (20)$$

Ввиду того, что функции  $G$  не зависят от направления  $\vec{p}$  и интегралы по  $\vec{p}$  берутся в окрестности Ферми-поверхности, можно сделать замену

$$\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} p_i p_k = \frac{1}{2} \delta_{ik} \frac{\rho_0 \pi^2 m}{2\pi^2} \int d\xi$$

Интегрирование должно осуществляться сначала по  $\omega$ , а потом по  $\xi$ . Однако мы, как всегда (см. [3]), применим следующий прием. Прибавим и вычтем из подынтегрального выражения, соответствующее ему «всюдуное» выражение, т.е. без взаимодействия с примесями. Тогда в интеграле со «всюдуным» выражением мы будем интегрировать сначала по частоте, а в оставшемся члене с разностью будем интегрировать сначала по  $\xi$ .

В качестве  $G_R$  поставим выражение ( $G_A = G_R^*$ ):

$$\left( \frac{1}{\omega - \xi + \frac{i}{2T(\omega)}} \right)^{-1} \quad (21)$$

$$\frac{1}{T(\omega)} = \frac{1}{T_{ord}} + \frac{1}{T_{ex}(\omega)} \quad (22)$$

причем  $T_{ord}$  — необременное время столкновений, а  $1/T_{ex}(\omega)$  соответствует выражению (15). После всех операций, полагая  $\omega \rightarrow 0$ , получаем

$$j = \frac{ics}{c} \rightarrow$$

$$\sigma = \frac{Nc^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega \tau(\omega)}{2T \cosh \frac{2\omega}{T}}$$

О логарифмической точности получаем: для сопротивления  $\rho = \rho_{ord} + \rho_{ex}$

$$\rho_{ex} = \rho_{0,ex} \left[ 1 + \frac{3/12}{2\epsilon_f} \ln \frac{\epsilon_f}{T} \right]^{-2} \quad (23)$$

$$\rho_{0,ex} = \frac{3\pi m l^2 S(S+1)C}{2N\pi k_B^2 T} \quad (24)$$

(2) — атомная концентрация) Если  $J_1 > 0$ , то  $\rho$  уменьшается с понижением температуры и при  $T \rightarrow 0$  обращается в нуль. В случае  $J_1 < 0$ , выражение (23) обращается в бесконечность при

$$T_{max} = q\epsilon_f \exp \left( -\frac{2\epsilon_f}{3|J_1|Z} \right) \quad (25)$$

( $q \sim 1$ ), согласно рассуждениям § 2 в действительности в окрестности этой точки сопротивление имеет максимум. В дальнейшем  $\rho_{ex} \sim \rho_{0,ex}(\epsilon_f/J_1)^2$

Согласно (24) это выражение порядка обычного остаточного сопротивления, возникающего теми же причинами. Ширина максимума по температуре  $\Delta T \sim T_0$ . При дальнейшем уменьшении температуры  $\rho_{ex} \rightarrow 0$ . Мы не разобрали вопроса о влиянии ферромагнитного упорядочения. Однако, по-видимому, оно лимитирует рассматриваемый эффект. Поскольку температура ферромагнитного перехода  $T_c \sim \epsilon_f^2/\epsilon_f$  (см. [2]), где  $\epsilon_f$  — атомная концентрация примесей, то максимум в принципе может быть получен при любых сочетаниях металлов с  $J_1 < 0$  и при достаточно малой

концентрации примесей. В дальнейшей работе будет рассмотрено влияние примесного ферромагнетизма и внешнего магнитного поля. Выражаю благодарность И.Е. Дзялошинскому за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Kondo, Prog. Theor. Phys., 32, 37 (1964).
2. К.А. Адрикозов, И.П. Горюнов, ЖЭТФ, 43, 2270 (1965).
3. A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, I.E. Dzyaloshinski, "Quantum Field Theory in Statistical Physics", Prentice Hall, 1963.
4. Г.М. Эмишберг, ЖЭТФ, 42, 1658 (1962).
5. В.В. Сулаков, ДАН, 111, 338 (1956).

71-70

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСНОГО ФЕРРОМАГНЕТИЗМА И ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ МЕТАЛЛА С МАГНИТНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

А. А. АБРИКОСОВ

(Получили: 1 апреля 1965)

Расчет, произведенный в [1] распространен на случай примесного ферромагнетизма и внешнего магнитного поля. Показано, что в зависимости от соотношения между  $T_{\text{мак}}$  (см. [1]),  $T$  (температура Кюри) и  $T^*$  возможны различные виды зависимости сопротивления от температуры. Оказывается также, что сопротивление может уменьшаться с магнитным полем.

В предыдущей работе [1] было рассмотрено электрическое сопротивление некалгнитного металла с малой примесью магнитных атомов. При этом оказалось, что часть сопротивления, связанная с обменным взаимодействием электронов с примесными атомами меняется с температурой. Если это взаимодействие имеет антиферромагнитный знак ( $J < 0$ ) то эта часть сопротивления растет при понижении температуры и при некоторой температуре имеет максимум, после чего начинает падать. Температура не зависит от концентрации примеси.

На опыте (см. например [2]) были получены кривые с максимумом, однако, положение максимума существенно зависит от концентрации примеси. В настоящей работе показано, что это происходит в результате примесного ферромагнетизма. Рассмотрено влияние на сопротивление внешнего магнитного поля (\*).

1. Примесный ферромагнетизм

Для учета примесного ферромагнетизма и действия внешнего магнитного поля мы поступим в духе работы [3]. Из уравнений для  $g$  и  $\chi$  Функши (см. [1]) мы выведем уравнения нерезонансного порядка, изображенные на рис. 1. Эти уравнения разные будут при отсутствии упорядоченных спинов и отличны от нуля в расконтрактированном случае. Их можно расконтрактировать, как результат действия некоторого эффективного «поля» в одном случае на один электрон, а в другом случае на один примесный. Мы обозначим это «поле» с настоящим магнитным полем и будем расконтрактировать примесный электрон под действием некоторого внешнего поля, которое мы затем определим самосоогласованным методом. «Обозначим» соответствующие функции будут иметь вид:

$$G = \frac{1}{i\omega - \xi + \sigma, p} \quad (a) \quad g = \frac{1}{i\omega - \lambda + S\gamma Q} \quad (b) \quad (1)$$

\*) Влияние внешнего магнитного поля на сопротивление металла с калгнитными примесями было рассмотрено другим способом Л. Турезвичем и Роскневичем. Эффект Кондо не учитывался.

Обозначения те же, что и в [1].



Рис. 1

Заметим, что процессе уреднения по стичан примеки: в данном случае должен промзводиться с учетом «кюды»  $Q$ . Виду этого нормирующей множитель равен  $e^{\lambda/T(2S+1)}$ , а

$$e^{\lambda/T} / \left( \sum_{S'} e^{-\psi Q} \right) = e^{\lambda/T} \frac{\sinh(Q/2T)}{\sinh(Q(S+\frac{1}{2})/T)}$$

Из уравнений Ia и b, и формул (2) получаем самосогласованные уравнения для  $P$  и  $Q$  (здесь и дальше  $\bar{N} = 1$ ):

$$Q = g\mu_0 H + \frac{J}{N} \frac{P_{2D}}{2\pi^2} S p_s T \int \frac{d\xi}{i\omega - \xi + c_z p} \quad (1)$$

$$P = \mu_0 H + \frac{N J}{N} \frac{e^{\lambda/T} \sinh(Q/2T)}{\sinh(Q(S+\frac{1}{2})/T)} S p_s T \sum_{\omega} \frac{S z}{i\omega - \lambda + S z Q} \quad (2)$$

(1) — число атомов примеки в  $1\omega$ ,  $\mu_0$  — магнетон Борра,  $\theta \approx 2$  — температурный фактор примеки. Если суммировать и интегрировать по  $\omega$ , получаем:

$$P = \mu_0 H + J c S B_S \left( \frac{S Q}{T} \right) \quad (a)$$

$$Q = g\mu_0 H + \frac{3ZJ}{2e\epsilon} P \quad (b)$$

(2) — функция Бриллюэна,  $z$  — число электронов на 1 атом,  $c$  — атомная концентрация). Если подставить  $z$  в  $2e$ , то мы получим в точности условие (13) работы [3] (обозначения  $S = \frac{X_0}{2\mu_0^2} P, \frac{X_0}{\mu_0^2} = \frac{P_0 H}{\pi^2}, a = \frac{2J}{N}$ ). С помощью уравнений (2) можно найти  $P$  и  $Q$ , а следовательно и «свободные» термодинамические функции. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства функции:

Выражения. Пусть  $H = 0$ . Читая аргумент в  $B_S$  малым и разлагая по нему в ряд, получаем соотношение:

$$P^2 = \frac{10cS(S+1)e\epsilon}{32(S^2+S+\frac{1}{2})} (T_c - T) \quad (3)$$

где  $T_c$  — температура Кюри, равная

$$T_c = \frac{J^2 c z S(S+1)}{2e\epsilon} \quad (4)$$

формула (3) справедлива только при  $T_c \ll T$ . Если же  $T \ll T_c$ , то

$$P = J c S \quad (5)$$

что касается величины  $Q$ , то она, согласно (2), равна

$$Q = J \left[ \frac{15}{2} \frac{cS(S+1)^2}{e\epsilon(S^2+S+\frac{1}{2})} (T_c - T) \right]^{1/2}, \quad T_c - T \ll T_c$$

$$Q = \frac{3cZJ^2S}{2e\epsilon}, \quad T \ll T_c \quad (6)$$

Таким образом, при  $T_c \ll T$  —  $Q S \ll T_c$ , а при  $T \leq T_c$  —  $Q S \sim T_c$ . Теперь рассмотрим, что происходит при малых полях. Нам будет интересно случай  $\mu_0 H \gg T_c$  и  $T \gg T_c$ . Сперва опять аргумент  $B_S$  малым, получаем:

$$P = \mu_0 H \left( 1 + \frac{J c S(S+1)e}{3T} \right)$$

Условие применимости этой формулы является  $g\mu_0 H/T \ll 1$ . В обратном предельном случае

$$P = \mu_0 H + J c S$$

Из (2) находим, что в обоих предельных случаях

$$Q = g\mu_0 H \quad (7)$$

Эти формулы будут полезны нам в дальнейшем.

## 2. Собственно энергетическая часть

Теперь рассмотрим рассеяние. В данном случае имеется несколько типов диаграмм, данных вклад в собственно-энергетическую часть. Одна диаграмма соответствует [1] (рис. 2). Остальные изображены на рис. 3; где она взаимодействует в каждой диаграмме относятся к одному атому (для простоты мы ограничимся борновским приближением для обычного рассеяния). Диаграммы на рис. 3 равны нулю при отсутствии:

поляризации спинов (\*). Их вклад вычисляется очень просто и дает (во временной гриновской функции)

$$\sum_{\alpha\alpha'}^{(1)} = -i\pi \operatorname{sign} \omega \frac{P_0 \pi}{2\pi^2} \left[ -2f_0(P - \mu_0 H) \sigma_z + \frac{1}{N_i} (P - \mu_0 H)^2 \right]_{\alpha\alpha'}$$

где  $f_0$  — амплитуда обычного рассеяния (предполагаемого для простоты изотропным), а  $P$  определено в предыдущем разделе. Что касается

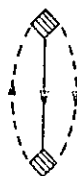


Рис. 2

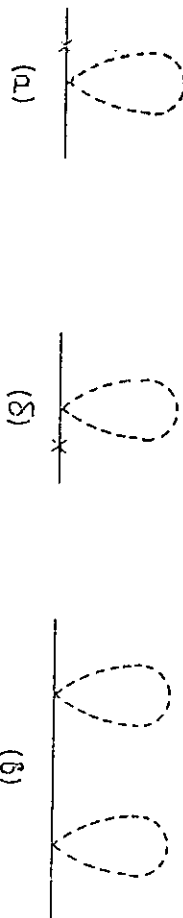


Рис. 3

наглядно на Рис. 2, то она вычисляется аналогично тому, как это было сделано в [1]:

$$\sum_{\alpha\alpha'}^{(2)} = i \operatorname{sign} \omega \frac{e^{\lambda/T} \sinh(Q/2T)}{\sinh[(S + \zeta)Q/2T]} N_i \frac{P_0 \pi}{2\pi^2} \quad (8)$$

$$\times \int \Gamma_{\alpha\beta} \alpha_1 \beta_1(\omega_1; \omega + \omega_1 - \omega_2, \omega_2) \Gamma_{\alpha_2 \beta_2} \alpha' \beta_2(\omega + \omega_1 - \omega_2, \omega; \omega_1 \omega_1)$$

$$\times \operatorname{Im} \varphi_{\beta_1 \beta_1}^R(\omega_1) \operatorname{Im} \varphi_{\beta_2 \beta_2}^R(\omega_2) \operatorname{Im} G_{\alpha_1 \alpha_2}^R(\omega + \omega_1 - \omega_2)$$

$$\times \left( \tanh \frac{\omega_2}{2T} - \coth \frac{\omega_2 - \omega}{2T} \right) \left( \tanh \frac{\omega_1}{2T} - \tanh \frac{\omega + \omega_1 - \omega_2}{2T} \right) \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi}$$

\* В письме в редакцию ЖЭТФ, где очень кратко изложены результаты настоящей работы, эти члены не были учтены. Автор благодарен А. Рубинову, обратившему на них его внимание.

Подставляя

$$\operatorname{Im} \varphi_{\beta\beta}^R = -\pi \delta_{\beta\beta}^R (\omega - \lambda + S z \beta Q) \\ \operatorname{Im} G_{\alpha\alpha}^R = -\pi \delta_{\alpha\alpha}^R (\omega - \xi + \delta z \alpha P)$$

взяв интегралы по  $\omega_1, \omega_2$  и  $\xi$ , и учитывая, что  $\lambda \gg T$ , получаем:

$$\sum_{\alpha\alpha'}^{(2)} = -i \operatorname{sign} \omega N_i \frac{P_0 \pi}{2\pi} \frac{\sinh(Q/2T)}{\sinh[(Q/2S + 1)/2T]} \frac{e^{-\omega/T} + 1}{e^{-Q/2S} z \beta_1 T - e^{-Q/2S} z \beta_1 / T} \\ \times \Gamma_{\alpha\beta} \alpha_1 \beta_1 \left[ \omega, \lambda - QS z \beta_1; \omega + Q(S z \beta_1 - S z \beta) \cdot \lambda - QS z \beta_1 \right] \\ \times \Gamma_{\alpha' \beta'} \alpha_1' \beta_1' \left[ \omega + Q(S z \beta_1 - S z \beta) \cdot \lambda - QS z \beta_1; \omega, \lambda - QS z \beta \right] \quad (10)$$

Ограничиваясь логарифмической точностью, мы можем, как и в [1], вычислять  $\Gamma$  с помощью «временно́й» техники при  $T \neq 0$ , и показать, что  $\lambda = 0$ . В [1] нижним пределом логарифмического интеграла была величина  $\omega$ , и при вычислении проводимости связывались следующие величины  $\omega \sim T$ . В данном случае головочные моменты. Разумеется, простейшую диаграмму на Рис. 4.



Рис. 4

Аналогично [1] (формула (10a)) получаем:

$$-i \left( \frac{J}{N} \right)^2 \left( \vec{\sigma} \vec{S} \right)_{\alpha\beta} \alpha_1 \beta_1 \left( \vec{\sigma} \vec{S} \right)_{\alpha_1 \beta_1} \alpha' \beta_1' \frac{P_0 \pi}{2\pi^2} \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int d\xi_1$$

$$\times \frac{1}{\omega_1 + QS z \beta_1 + i\delta} \frac{1}{\omega - \omega_1 - \xi_1 + P \sigma z \alpha_1 + i\delta \operatorname{sign}(\xi_1 - P \sigma z \alpha_1)}$$

(11)

$$= \left( \frac{J}{N} \right)^2 \left( \vec{\sigma} \vec{S} \right)_{\alpha\beta} \alpha_1 \beta_1 \left( \vec{\sigma} \vec{S} \right)_{\alpha_1 \beta_1} \alpha' \beta_1' \frac{P_0 \pi}{2\pi^2} \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi_1}{\xi_1 - QS z \beta_1 - \omega - i\delta}$$

(здесь сделана замена  $E_1 - P_{\sigma, \sigma} \rightarrow E_1$ ). Отсюда видно, что величина  $P$  вообще не участвует в логарифмическом интеграле. Нижним пределом интеграла оказывается наибольшая из величин  $Q$  и  $\omega$ , т.е. в окончательном результате  $\max(Q, T)$ . Так как логарифмический интеграл идет по области  $E_1 \rightarrow \max(Q, T)$ , то выражение (11) сохраняет ту же синорну форму, что и при отсутствии упорядочения спинов. Это же относится ко всем следующим порядкам для  $T$ .

Таким образом, в выражении (10) в качестве  $\Gamma_{\alpha\beta}, \alpha, \beta, \Gamma_{\alpha, \beta}, \alpha, \beta$  можно, согласно [1], подставить

$$\begin{pmatrix} \sigma & S \\ \sigma & S \end{pmatrix} \alpha, \beta, \beta_1 \begin{pmatrix} \sigma & S \\ \sigma & S \end{pmatrix} \alpha, \beta, \alpha, \beta$$

$$\left[ 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{\max(Q, |\omega|)} \right]^{-1}$$

(12)

Считая  $|\omega| \sim T$ , мы получаем, согласно предыдущему разделу, что для магнитное поле отстывает или  $\rho_{\omega_0} HS \ll T_c$ , то при  $T \gg T_c$  в (12) стоит  $\ln \frac{\epsilon F}{T}$ , а при  $T \lesssim T_c$   $\ln \frac{\epsilon F}{T_c}$ . Если же  $\rho_{\omega_0} HS \gg T_c$ , то при  $T \gg \rho_{\omega_0} HS$  имеем  $\ln \frac{\epsilon F}{T}$ , а при  $T \ll \rho_{\omega_0} HS$   $\ln \frac{\epsilon F}{\rho_{\omega_0} HS}$ .

Однако в данном случае зависимость от температуры проиходит не только от  $T$ , но и от предельного множителя в (10). Пользуясь симметричной формой  $\Gamma$ , (12) мы получаем

$$\sum_{\alpha\beta}^{(2)} = -i \operatorname{sign} \omega V_i \frac{\rho_{\omega_0}}{2\pi} \frac{\sinh(Q/2T)}{\sinh(Q/2S + 1)/2T} \left[ 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{\max(Q, |\omega|)} \right]^{-1}$$

$$\times \sum_{M=-S}^S e^{Q_M/T} \left[ M^2 + \frac{1}{2}(S+M)(S-M+1)(1-\sigma_2)\alpha\alpha' \frac{e^{\omega/T}}{e^{\omega/T} + e^{Q/T}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(S+M+1)(S-M)(1+\sigma_2)\alpha\alpha' \frac{e^{\omega/T}}{e^{\omega/T} + e^{-Q/T}} \right]$$

(13)

Все это по  $M$ , находим:

$$\sum_M^{(2)} = -i \operatorname{sign} \omega V_i \frac{\rho_{\omega_0}}{2\pi} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{\max(Q, |\omega|)} \right]^2}$$

$$\times \left\{ S(S+1) + SB_S \left( \frac{SQ}{T} \right) \left[ \frac{e^{\omega/T} + 1}{e^{\omega/T} + e^{TQ/T}} \left( \coth \frac{Q}{2T} + 1 \right) - \coth \frac{Q}{2T} \right] \right\}$$

(14)

где знаки + и - относятся к разным ориентациям электронного

спина. Множитель в  $\chi^{(1)} + \chi^{(2)}$  при  $-i \operatorname{sign} \omega$  обозначим через  $1/2T_+$ . Неомонное рассеяние дает, как и раньше (см. [1]) дополни- тельное слагаемое в  $\chi$ , значительно большей величины (кроме окрестности «резонанса»).

Аналогично [1] получаем для проводимости

$$\sigma = \frac{ZNc^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2T \cosh \frac{2\omega}{2T}} [T_+'(\omega) + T_-'(\omega)]$$

здесь  $T_+'(\omega) = [1/T_{\sigma, \sigma} + 1/T_+(\omega)]^{-1}$ . Мы воспользуемся тем, что величина  $T_+'(\omega) + T_-'(\omega)$  симметрична относительно изменения знака  $\omega$ . Считая  $1/T_{\sigma, \sigma} \gg 1/T_+(\omega)$  получаем  $T_+' = T_{\sigma, \sigma} + T_+$  (здесь  $T_{\sigma, \sigma}$  — постоянная и интегральная часть; соответствующий член в  $\chi^{(2)}$  дает вклад во втором порядке по  $J/f_0$ ),

$$\rho_{ex,0} = \rho_{ex,0} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{S+1} B_S \left( \frac{SQ}{T} \right) \frac{\sinh \frac{Q}{T} - \frac{Q}{T}}{\coth \frac{Q}{T} - 1} \right] \left( 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{\max(Q, T)} \right)^{-1} \right. \\ \left. - \frac{3}{S+1} B_S^2 \left( \frac{SQ}{T} \right) \right\}$$

(15)

где  $\rho_{ex,0} = \frac{3\pi J^2 S(S+1)C}{2V_{\sigma} \epsilon^2 \hbar}$  (объемные единицы),  $C$  — атомная константа.

Асимптотические значения равны:

$$\rho_{ex} = \rho_{ex,0} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{Q}{3T} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{T} \right)^{-1} - \frac{S(S+1)Q^2}{3T^2} \right\}, \quad Q \ll T$$

$$\rho_{ex} = \rho_{ex,0} \left\{ \frac{S}{S+1} \left( 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{Q} \right)^{-1} - \frac{3S}{S-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{S+1} \left[ \left( \frac{1}{S} - 2 + \frac{2Q}{T} \right) \left( 1 + \frac{3JZ}{2\epsilon F} \ln \frac{\epsilon F}{Q} \right)^{-2} + 6 \right] e^{-Q/T} \right\}, \quad e^{-Q/T} \ll 1$$

(16)

Таким образом упорядочение спинов преобразует логарифмический рост сопротивления  $\rho$ , более того, приводит к уменьшению сопротивления благодаря замене  $S(S+1)$  при логарифмическом множителе на  $S^2$ . Появление дополнительного отрицательного слагаемого, проиходящего в основном от взаимодействия с обменным рассеянием. Конечно, сюда стает еще эффект возрастания сопротивления при наличии магнитного поля, связанного с обменным взаимодействием электронной траектории. О нем речь пойдет несколько позже.

Пенерь рассмотрим как должна себя вести кривая  $\rho(T)$  в различных

случаях. Если  $J > 0$ , то  $\rho_{ex}$  уменьшается с температурой. Это будет продолжаться до тех пор, пока  $T$  не станет порядка  $T_0$  — температуры, при которой упорядочиваются спины. Согласно предыдущему это происходит при  $T \sim QS$ , т.е. при  $T \sim \max(T_0, \rho_{ex} SH)$ . После этого  $\rho \rightarrow \text{const.}$

Если же  $J < 0$ , то возможны разные случаи. При  $Q = 0$  на подной кривой  $\rho(T)$  в общем случае должен быть минимум, происходящий от сложения растущей с температурой обычной части сопротивления и падающей  $\rho_{ex}$ . Пусть он находится при температуре  $T_{min}$ . При более низкой температуре  $T_{max}$  имеется максимум, происходящий от поворота в (15). Если  $T_0 \ll T_{max}$  то упорядочение на кривой  $\rho(T)$  проявится следующим образом. Сохраняется как  $T_{min}$ , так и  $T_{max}$ . Температура  $T_{max}$  не зависит от концентрации примесей. При  $T \sim T_0$  сопротивление  $\rho(T) \rightarrow \text{const.}$

Если  $T_{max} \ll T_0 \ll T_{min}$ , то возникает то положение, которое, по-видимому, чаще всего наблюдается на опыте [2]. Сохраняется минимум  $\rho(T)$ . Старый максимум исчезает, но появляется новый. При приближении сверху к  $T_0$  рост кривой  $\rho(T)$  замедляется и сменяется падением, после чего  $\rho(T)$  становится константой. Если магнитное поле отсутствует или мало, то  $T_0 \sim T_0$ , так что температура максимума примерно пропорциональна концентрации магнитных примесей. Если же  $Q \gg \rho_{ex} SH \gg T_0$ , то температура примерно пропорциональна  $H$  и не зависит от концентрации.

Наконец в случае  $T_0 \gg T_{min}$  даже при  $J < 0$  минимум на кривой  $\rho(T)$  отсутствует.

Во всех случаях упорядочение приводит к уменьшению  $\rho_{ex}$ . Однако наряду с этим, как уже было отмечено выше,  $\rho_{ord}$  может увеличиваться под влиянием внутреннего магнитного поля. Если время между столкновениями  $\tau \ll \frac{1}{\Omega}$ ,  $\Omega = \frac{eH}{mc}$  — среднее поле в образце, то поправка к сопротивлению имеет порядок  $\rho_{ord}(\Omega\tau)^2$ .

Эту величину надо сравнивать с изменением обменного сопротивления, которое при  $Q/T \ll 1$  имеет порядок  $\rho_{ex}(\frac{Q}{T})^2$ , а при  $\frac{Q}{T} \gtrsim 1$  порядка  $\rho_{ex}$ .

Прежде всего возникает вопрос, не может ли в отсутствие внешнего поля увеличение  $\rho_{ord}$  при ферромагнитном переходе преобладающе уменьшать  $\rho_{ex}$ . Согласно [3] в результате ферромагнитного перехода поворачивается внутреннее поле  $B \sim 4\pi\mu_0 SH$ . Если определить верхний предел  $4\pi\mu_0 SH$  из значения индукции насыщения  $B_{sat}$  для наиболее ферромагнетиков, то  $\rho \ll 10^4 \rho_{ex}$ . Изменение  $\rho_{ord}$  не будет оказываться при

$$\tau \ll \frac{\sqrt{\rho_{ex}}}{\rho_{ord}} \frac{1}{\Omega}$$

Считая  $\rho_{ex} / \rho_{ord} \gtrsim 10^{-2}$ , получаем  $\tau \ll \frac{10^{-12}}{10^4}$ , или длину пробега  $l \ll 10^{-4} \text{ см}$ . Если оценивать  $l$  по формуле  $l \sim \frac{1}{\nu} \frac{v}{\nu} \sim \frac{1}{\nu} \frac{v}{\nu}$  и считать  $\nu \sim 10^{13} \text{ см}^{-2}$ ,  $v \sim 10^{10} \text{ см}^{-2}$ , то  $l \sim 10^{-5} \text{ см}$ , т.е. наше предположение заведомо исполнено даже в том случае, если в металле нет посторонних немагнитных примесей.

Пенерз рассмотрит влияние внешнего магнитного поля. В соответствии с приведенными оценками магнитное поле вызовет понижение поляного сопротивления, если:

$$\max(T, \mu_0 H) \ll \frac{h}{T} \sqrt{\frac{\rho_{ex}}{\rho_{ord}}}$$

(1)

При  $l \sim 10^{-5}$  справа стоит примерно  $0,1^\circ \text{K}$ . Отсюда следует, что поле сопротивления может как увеличиваться при включении поля, так уменьшаться. Можно подавить возрастание обычного сопротивления и наоборот немагнитных примесей. Однако во всех случаях возрастание обычного сопротивления с полем есть эффект, не зависящий от температуры, а изменение обменной части, наоборот, сильно зависит от температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Абрикосов, физика (Physics), в печати.
2. А.М. Gerritsen, J.O. Linde, Physica 17, 573, 584 (1951); 18, 577 (1952); А.М. Gerritsen, Physica, 19, 51 (1953) Н.Е. Алексеевичий и Ю.П. Гайдуков, ЖЭТФ, 31, 947 (1956)
3. А.А. Абрикосов, И.П. Горшков, ЖЭТФ 43, 2230 (1962).