

# Волновая турбулентность на примере поверхностных волн на воде.

А. О. Короткевич

Центр инженерной физики, Сколтех, Москва, Россия.

A.Korotkevich@Skoltech.ru

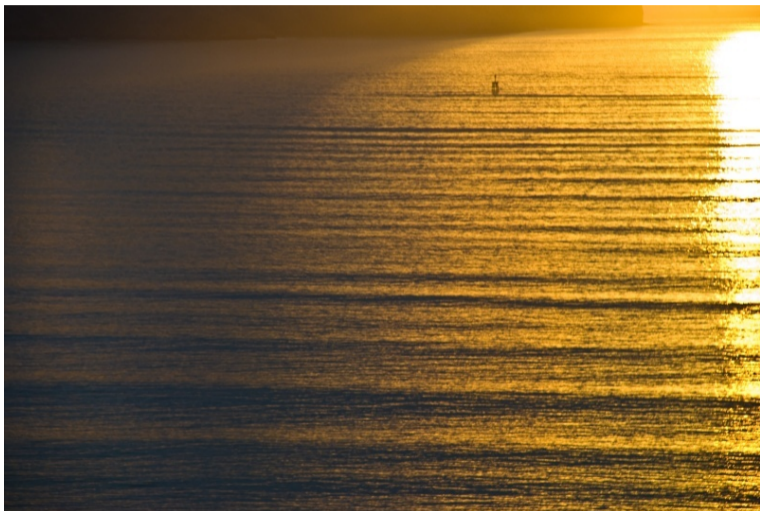
ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Россия.

19-е марта, 2026,

Курс “Теория конденсированного состояния: современные проблемы”.

**Skoltech** Center for  
Engineering  
Physics

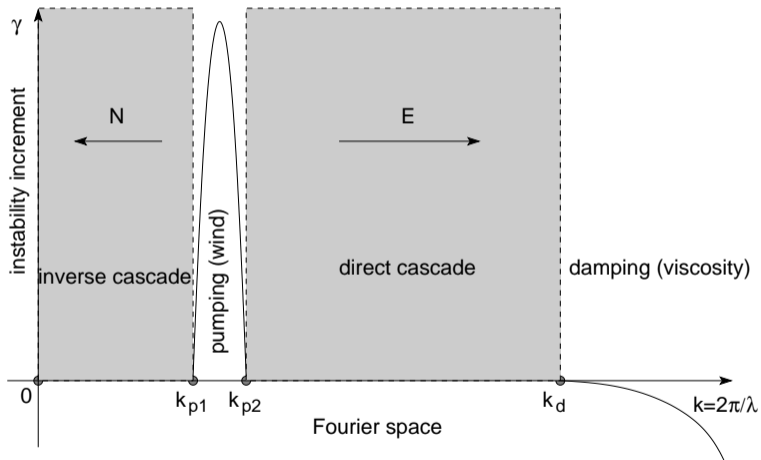
# Волновая турбулентность: вовлечены разные масштабы



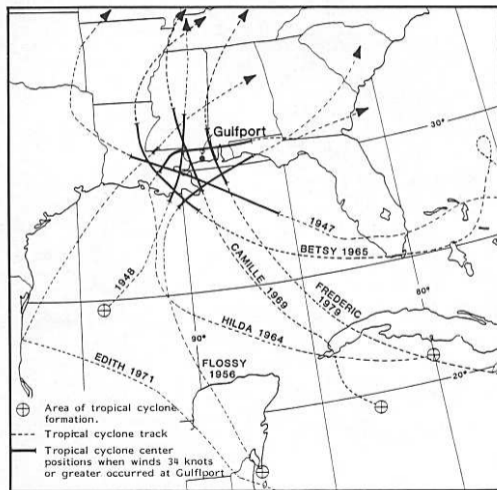
# Волновая турбулентность: вовлечены разные масштабы



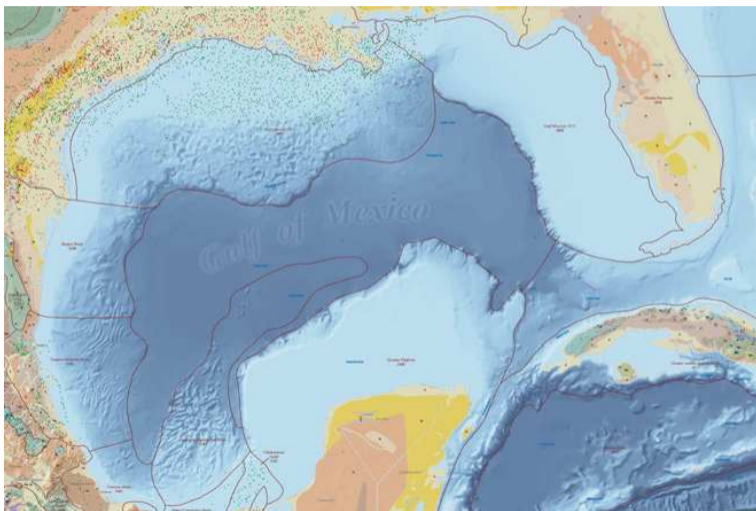
## Идеи Ричардсона-Колмогорова



## Почему это важно?

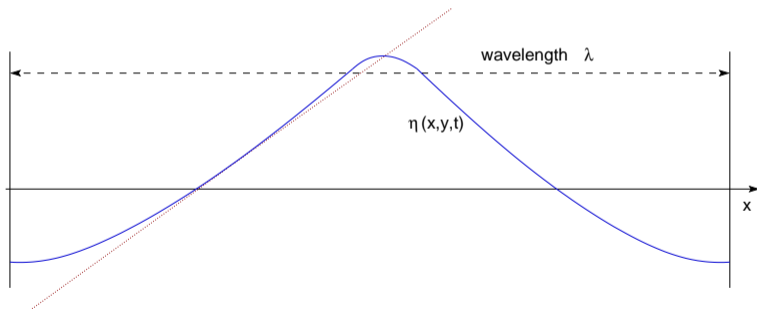


## Цель предсказания ветрового волнения



## Волны на воде. Формулировка задачи.

Рассмотрим потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью. Мы используем стандартные обозначения для потенциала скорости  $\phi(\vec{r}, z, t)$ ,  $\vec{r} = (x, y)$ ;  $\vec{v} = \nabla\phi$  и отклонения поверхности по высоте  $\eta(\vec{r}, t)$ .



Крутизна поверхности:  $\mu = \sqrt{\langle |\nabla\eta(\vec{r}, t)|^2 \rangle} \approx 0.1$  — средний наклон.

Благодаря несжимаемости потенциал скорости  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

в области занимаемой жидкостью:

$$-\infty < z < \eta(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y). \quad (2)$$

Граничные условия на потенциал следующие:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right|_{z=\eta} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\eta}, \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) \Big|_{z=\eta} - g\eta = 0,$$

$$\phi_z \Big|_{z \rightarrow -\infty} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\eta = \eta(x, y, t)$  — это отклонение поверхности по вертикали от состояния покоя ( $z = 0$ ).

## Энергия системы

Полная энергия системы может быть представлена в следующем виде:

$$H = T + U,$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{\rho}{2} \int d^2r \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla\phi)^2 dz,$$

Потенциальная энергия в поле тяжести:

$$U = \int \sigma \left( \sqrt{1 + (\nabla\eta)^2} - 1 \right) d^2r + \frac{\rho}{2} g \int \eta^2 d^2r,$$

здесь  $g$  – это ускорение свободного падения,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Отнормируем к единичной плотности  $\rho = 1$  и введём  $\sigma' = \sigma/\rho$ .

## Разложение гамильтониана.

В. Е. Захаровым (1968) было показано, что при таких допущениях жидкость является гамильтоновской системой:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta},$$

где  $\psi = \phi(\vec{r}, \eta(\vec{r}, t), t)$  — это потенциал скорости на поверхности жидкости. Для вычисления значения  $\psi$  надо решить уравнение Лапласа в области с изменяющейся формой поверхности  $\eta$ . Можно упростить ситуацию используя разложение гамильтониана (или оператора Дирихле-Неймана) по степеням «крутизны» (здесь  $\Delta = \nabla^2$  и  $\hat{k} = \sqrt{-\Delta}$ ):

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \int \left( g\eta^2 + \sigma' |\nabla \eta|^2 + \psi \hat{k} \psi \right) d^2 r + \\ & + \frac{1}{2} \int \eta \left[ |\nabla \psi|^2 - (\hat{k} \psi)^2 \right] d^2 r + \\ & + \frac{1}{2} \int \eta (\hat{k} \psi) \left[ \hat{k}(\eta(\hat{k} \psi)) + \eta \Delta \psi \right] d^2 r. \end{aligned}$$

Полный вывод с капиллярностью можно найти в доп. материалах к статье КАО, Phys. Rev. Lett., **130**, 264002 (2023): arXiv:2211.16567

## Динамические уравнения.

В этом случае динамические уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \\ &\quad + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \frac{1}{2}\Delta[\eta^2\hat{k}\psi] + \frac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\Delta\psi], \\ \dot{\psi} &= \sigma'\Delta\eta - g\eta - \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - \\ &\quad - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\Delta\psi.\end{aligned}$$

Введём преобразование Фурье:

$$\psi_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \psi_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^2r, \quad \eta_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \eta_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d^2r.$$

## Линейная дисперсия.

В линейном приближении:

$$\dot{\eta} \simeq \hat{k}\psi; \quad \dot{\psi} = \sigma' \Delta \eta - g\eta.$$

В пространстве волновых векторов (после преобразования Фурье по XY):

$$\dot{\eta}_{\vec{k}} \approx k\psi_{\vec{k}}; \quad \dot{\psi}_{\vec{k}} \approx -\sigma' k^2 \eta_{\vec{k}} - g\eta_{\vec{k}}.$$

Ищем решение в виде  $\eta_{\vec{k}}, \psi_{\vec{k}} \sim \exp(-i\omega t)$  и получаем  $\omega_k = \sqrt{\sigma' k^3 + gk}$ .  
 Подставим  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $\sigma = 72.86 \times 10^{-3} \text{ N/m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \Rightarrow$   
 $\sigma' = \sigma/\rho = 7.29 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}^2$  и получаем, что члены сравниваются при  
 $k = 2\pi/\lambda \approx 367 \text{ m}^{-1}$ , что соответствует  $\lambda \approx 1.71 \text{ cm}$ .

Значит начиная с масштаба несколько миллиметров и меньше можно считать волны чисто капиллярными, а с 10 см и больше – чисто гравитационными.

## Нормальные переменные

$\psi(\vec{r}, t)$  и  $\eta(\vec{r}, t)$  — это действительные функции,  $\Rightarrow \psi_{\vec{k}} = \psi_{-\vec{k}}^*$ ,  $\eta_{\vec{k}} = \eta_{-\vec{k}}^*$  — эрмитова симметрия.

Удобно ввести канонические (нормальные) переменные  $a_{\vec{k}}$  следующим образом:

$$a_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}} \eta_{\vec{k}} + i \sqrt{\frac{k}{2\omega_k}} \psi_{\vec{k}}, \text{ где } \omega_k \text{ — это дисперсионное соотношение.}$$

$$i\dot{a}_{\vec{k}} = \frac{\delta H}{\delta a_{\vec{k}}^*} \text{ — уравнения Гамильтона,}$$

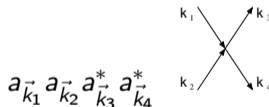
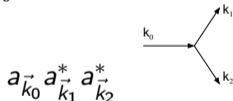
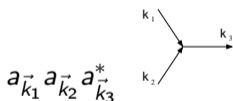
$a_{\vec{k}}$  — элементарное возбуждение (плоская волна).

## Гамильтониан в нормальных переменных.

$$H_0 = \int \omega_k |a_{\vec{k}}|^2 d\vec{k},$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2}^{\vec{k}_0} (a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_0}^* + a_{\vec{k}_1}^* a_{\vec{k}_2}^* a_{\vec{k}_0}) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_0 + \dots,$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} \int D_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_3}^* a_{\vec{k}_4}^* \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 + \dots$$



## Резонансные условия

Давайте посмотрим, что значит “слабая нелинейность” и какие у этого последствия:

$$(a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_0}^* + a_{\vec{k}_1}^* a_{\vec{k}_2}^* a_{\vec{k}_0}) \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0)$$

$$a_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}(t) e^{i\omega_{\vec{k}} t} \Rightarrow a_{\vec{k}_0}^* a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} = A_{\vec{k}_0}^* A_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_2} e^{i(\omega_{\vec{k}_0} - \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2})t}$$

Резонансные условия для трёхволнового взаимодействия (слияние и распад):

$$\omega_{\vec{k}_0} = \omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2}, \quad \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2.$$

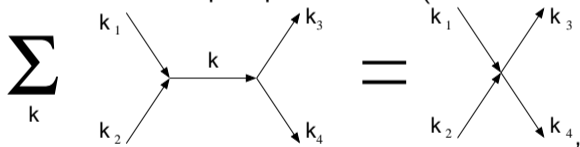
Резонансные условия для четырёхволнового взаимодействия (рассеяние два в два):

$$\omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2} = \omega_{\vec{k}_3} + \omega_{\vec{k}_4}, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4.$$

## Каноническое преобразование

### Преобразование к нормальной форме (Пуанкаре)

Закон дисперсии (линейной) в случае гравитационных волн на глубокой воде  $\omega_k = \sqrt{gk}$  является “не распадным” и уравнения:  $\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$ ,  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$  не имеют действительных нетривиальных решений. Это означает, что в пределе малой нелинейности кубические члены гамильтониана могут быть исключены подходящим каноническим преобразованием (показана только одна диаграмма):  $a(\vec{k}, t) \rightarrow b(\vec{k}, t)$ .



$$H_0 = \int \omega_k |b_{\vec{k}}|^2 d\vec{k},$$

$$H_1 = 0,$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int T_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} b_{\vec{k}_1}^* b_{\vec{k}_2}^* b_{\vec{k}_3} b_{\vec{k}_4} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4.$$

## Парная корреляционная функция

Для статистического описания стохастического волнового поля можно использовать парную (авто-)корреляционную функцию

$$\langle a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^* \rangle = n_k \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Функция  $n_{\vec{k}}$  является измеримой величиной, прямо связанной с наблюдаемой корреляционными функциями. Например, из определения  $a_{\vec{k}}$  можно получить следующее выражение:

$$I_k = \langle |\eta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{k}{2\omega_k} (n_k + n_{-k}).$$

Для вывода кинетического уравнения описывающего гравитационные волны на воде удобно ввести другую корреляционную функцию:

$$\langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'}^* \rangle = N_k \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

## Связь между корреляционными функциями

Соотношение между  $n_{\vec{k}}$  и  $N_{\vec{k}}$  довольно простое (в случае глубокой воды):

$$\frac{n_{\vec{k}} - N_{\vec{k}}}{n_{\vec{k}}} \simeq \tilde{\mu}^2,$$

где  $\tilde{\mu} = k_{sp} \sqrt{\langle |\eta|^2 \rangle} \simeq \mu$ , здесь  $\eta$  — это отклонение поверхности. В случае слабой турбулентности  $\mu \ll 1$ , поэтому относительная разница меньше нескольких процентов. Во всех вычислениях мы будем пользоваться более простой функцией  $n_{\vec{k}}$  для анализа.

## Кинетическое уравнение для гравитационных волн

Корреляционная функция  $N_{\vec{k}} = \langle |b_{\vec{k}}|^2 \rangle$  подчиняется кинетическому уравнению (Нордгейм, 1928; Пайерлс, 1929; Хассельманн, 1962)

$$\frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t} = st(N, N, N) + f_p(\vec{k}) - f_d(\vec{k}),$$

Здесь:

$$st(N, N, N) = 4\pi \int \left| T_{\vec{k}, \vec{k}_1}^{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \right|^2 N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2} N_{\vec{k}_3} \left( \frac{1}{N_{\vec{k}}} + \frac{1}{N_{\vec{k}_1}} - \frac{1}{N_{\vec{k}_2}} - \frac{1}{N_{\vec{k}_3}} \right) \times \\ \times \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3.$$

Данное кинетическое уравнение и его модификации являются основой для всех моделей предсказания ветрового волнения. Вся физика содержится в  $T$  и  $\omega_k$ . НУШ, гравволны.

## Кинетическое уравнение для капиллярных волн

Другой закон дисперсии  $\omega_k \sim k^{3/2}$ , распадный процесс работает  $\Rightarrow$  можно ограничиться трёхволновыми процессами. Корреляционная функция  $n_{\vec{k}} = \langle |a_{\vec{k}}|^2 \rangle$  подчиняется кинетическому уравнению для капиллярных волн (Захаров и Филоненко, 1966)

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t} = st(n, n) + f_p(\vec{k}) - f_d(\vec{k}),$$

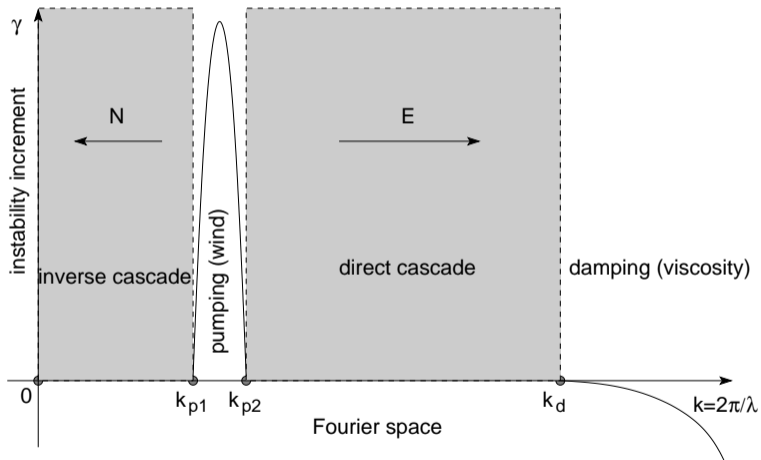
Здесь:

$$st(n, n) = 4\pi \int \left| V_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}^{\vec{k}} \right|^2 n_{\vec{k}} n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} \left( \frac{1}{n_{\vec{k}}} - \frac{1}{n_{\vec{k}_1}} - \frac{1}{n_{\vec{k}_2}} \right) \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 +$$

$$8\pi \int \left| V_{\vec{k}, \vec{k}_2}^{\vec{k}_1} \right|^2 n_{\vec{k}} n_{\vec{k}_1} n_{\vec{k}_2} \left( \frac{1}{n_{\vec{k}}} + \frac{1}{n_{\vec{k}_2}} - \frac{1}{n_{\vec{k}_1}} \right) \delta(\vec{k} + \vec{k}_2 - \vec{k}_1) \delta(\omega_k + \omega_{k_2} - \omega_{k_1}) d\vec{k}_1 d\vec{k}_2.$$

Опять вся физика содержится в  $V$  и  $\omega_k$ . Используется, к примеру, для капиллярных волн и волн Россби (волны в атмосфере с учётом сферичности Земли).

## Идеи Ричардсона-Колмогорова: масштабы и потоки.



## Решения термодинамического равновесия.

Равномерное распределение волнового действия:

$$N_k = \text{const.} \quad (5)$$

Равномерное распределение энергии:

$$e_k \simeq \omega_k N_k \text{ (in linear approximation), } \Rightarrow e_k = \text{const} \Leftrightarrow N_k = \frac{C}{\omega_k}. \quad (6)$$

Можно объединить оба спектра в один (Рэлей-Джинс):

$$N_k = \frac{C}{\mu + \omega_k}. \quad (7)$$

Очевидно, что данные равновесные решения соответствуют нулевым потокам энергии и волнового действия (числа частиц). Для именно турбулентности интерес представляют спектры соответствующие динамическому равновесию, т.е. постоянным потокам сохраняющихся величин.

## Решения Колмогорова-Захарова

(3D жидкость, 2D поверхность, изотропные гравитационные волны, глубокая вода  $\Rightarrow$  четырёхволновой процесс 2 в 2).

$$\omega_k = \lambda k^\alpha, \quad T_{\varepsilon \vec{k}, \varepsilon \vec{k}_1}^{\varepsilon \vec{k}_2, \varepsilon \vec{k}_3} = \varepsilon^\beta T_{\vec{k}, \vec{k}_1}^{\vec{k}_2, \vec{k}_3}, \quad d\text{- размерность } \vec{k}. \quad (8)$$

Для гравитационных волн на глубокой воде:  $d = 2$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 3$ .

Прямой каскад энергии (от больших масштабов к малым, Захаров и Филоненко, 1967)

$$N_k^{(1)} = C_1 P^{1/3} k^{-\frac{2\beta}{3}-d} = C_1 P^{1/3} k^{-4}. \quad (9)$$

Обратный каскад волнового действия (от малых масштабов к большим, Захаров и Заславский, 1982)

$$N_k^{(2)} = C_2 Q^{1/3} k^{-\frac{2\beta-\alpha}{3}-d} = C_2 Q^{1/3} k^{-23/6} \approx \text{const } k^{-3.83}. \quad (10)$$

Решение Колмогорова-Захарова-Филоненко  
 (3D жидкость, 2D поверхность, изотропные капиллярные волны,  
 глубокая вода  $\Rightarrow$  трёхволновой процесс 1 в 2 или 2 в 1).

$$\omega_k = \lambda k^\alpha, \quad V_{\varepsilon \vec{k}_1, \varepsilon \vec{k}_2}^{\varepsilon \vec{k}} = \varepsilon^\beta V_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}^{\vec{k}}, \quad d - \text{размерность } \vec{k}. \quad (11)$$

Для капиллярных волн на глубокой воде:  $d = 2$ ,  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = 9/4$ .

Прямой каскад энергии (от больших масштабов к малым, Захаров и Филоненко, 1966)

$$n_k = CP^{1/2} k^{-\beta-d} = C_1 P^{1/3} k^{-17/4}. \quad (12)$$

Отметим, что в данном случае обратного каскада нет, т.к. нет второй сохраняющейся величины – волнового действия (числа частиц), т.к. процесс взаимодействия волн распаднй, т.е. число волн при взаимодействии изменяется.

## Вывод спектра прямого каскада из соображений размерности.

Идея восходит к знаменитому выводу спектра развитой турбулентности в работе Колмогорова (1941). Однако в нашем случае есть дополнительный размерный параметр: ускорение свободного падения  $g$  или коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Таким образом нам надо ввести дополнительную связь в систему. Мы можем извлечь её из формы кинетического уравнения. При  $N$ -взаимодействующих волн (четырёхволновой процесс для гравитационных волн и трёхволновой для капиллярных) связь скорости изменения волнового действия (числа частиц) или энергии выражается следующей зависимостью (см. на количество различных  $n_k$  в интеграле столкновений):

$$\dot{n}_{\vec{k}} \leftrightarrow n_{\vec{k}}^{N-1}, \Rightarrow \dot{E}_{\vec{k}} \leftrightarrow E_{\vec{k}}^{N-1}. \quad (13)$$

Мы рассматриваем несжимаемую жидкость, поэтому плотность  $\rho = const$ , следовательно массу мы можем измерять в "литрах":  $[m] \sim [l]^3$ . Тогда для энергии:

$$[E] = \left[ \frac{mv^2}{2} \right] \sim \frac{[l]^3 [l]^2}{[t]^2} \sim \frac{[l]^5}{[t]^2}.$$

Плотность энергии (на единицу площади, объёма и т.п.):

$$\left[ \frac{E}{V} \right] \sim \frac{[E]}{[l]^d} \sim \frac{[l]^{5-d}}{[t]^2}.$$

Мы рассматриваем изотропный случай, поэтому спектр зависит только от радиуса волнового вектора  $k = |\vec{k}|$ . Проинтегрировав такой “радиальный” спектр плотности энергии по всем масштабам (напомним, что  $k = 2\pi/L$ , т.е. размерность  $[k] \sim [l]^{-1}$ ) можно получить плотность энергии:

$$\frac{E}{V} = \int E_k^r dk, \Rightarrow \left[ \frac{E}{V} \right] \sim [E_k^r][l]^{-1}, \Rightarrow [E_k^r] \sim \frac{[l]^{6-d}}{[t]^2}.$$

Энергия – сохраняющаяся величина, так что для её спектральной плотности можно написать уравнение непрерывности в  $k$ -пространстве (такое же можно написать для спектральной плотности волнового действия в случае, если оно сохраняется):

$$\dot{E}_k^r + \frac{\partial P}{\partial k} = 0, \Rightarrow \frac{[P]}{[k]} \sim \frac{[E_k^r]}{[t]}, \Rightarrow [P] \sim \frac{[l]^{5-d}}{[t]^3}.$$

Здесь  $P$  – это поток энергии.

Вспомним, как зависит скорость изменения спектра энергии от количества волн во взаимодействии  $N$ :

$$\dot{E}_k^r \leftrightarrow E_k^r{}^{N-1}.$$

Но из уравнения непрерывности следует, что и поток энергии  $\epsilon$  связан так же, т.е.  $P \leftrightarrow (E_k^r)^{N-1}$  или  $E_k^r \leftrightarrow P^{1/(N-1)}$  с точностью до размерной константы. Физическая размерная константа у нас входит только в дисперсионный закон. Обозначим её  $\lambda$ . Т.к. ситуация изотропна, то для частоты имеем:

$$\omega = \lambda k^\alpha, \Rightarrow [\lambda] \sim [t]^{-1} [l]^\alpha.$$

Используя всё предыдущее, радиальный спектр энергии можно искать в следующем виде (подразумеваем, что он степенной по  $k$ ):

$$E_k^r \sim \lambda^x P^{1/(N-1)} k^y, \Rightarrow [E_k^r] \sim \frac{[l]^{6-d}}{[t]^2} \sim \frac{[l]^{\alpha x}}{[t]^x} \frac{[l]^{(5-d)/(N-1)}}{[t]^{3/(N-1)}} [l]^{-y}.$$

Разрешая соотношения относительно  $x$  и  $y$  получаем:

$$x = 2 - \frac{3}{N-1}, \quad y = -6 + d + 2\alpha + \frac{5-d-3\alpha}{N-1}, \Rightarrow E_k^r \sim P^{1/(N-1)} k^y. \quad (14)$$

Понимая, что связь обычной спектральной плотности энергии с радиальной компонентой следующая  $E_k^r \sim E_k k^{d-1}$  и используя линейную связь спектральной плотности энергии и волнового действия, получаем спектр прямого каскада энергии:

$$E_{\vec{k}} = \omega_k n_{\vec{k}}, \Rightarrow n_{\vec{k}} \sim k^{-\alpha} E_{\vec{k}}, \Rightarrow n_{\vec{k}} \sim P^{1/(N-1)} k^{-5+\alpha+\frac{5-d-3\alpha}{N-1}}. \quad (15)$$

Для прямого каскада энергии гравитационных волн ( $N = 4$ ) на двумерной поверхности ( $d = 2$ ) глубокой трёхмерной жидкости ( $\alpha = 1/2$ ):

$$n_k \sim P^{1/3} k^{-4}. \quad (16)$$

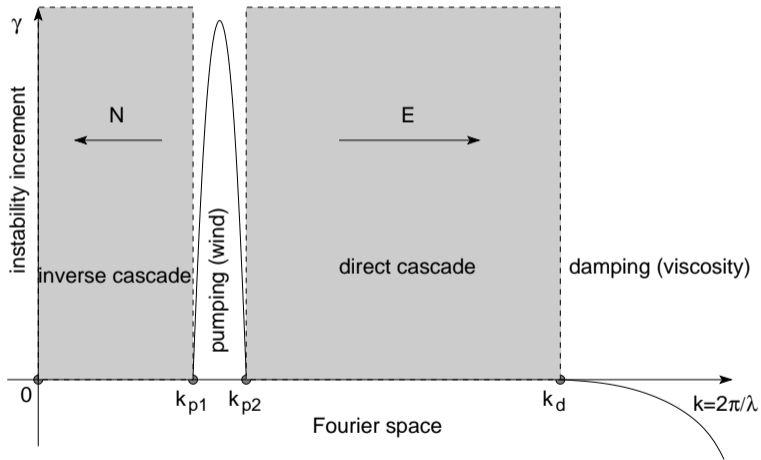
Что полностью совпадает с (9).

Для прямого каскада энергии капиллярных волн ( $N = 3$ ) на двумерной поверхности ( $d = 2$ ) глубокой трёхмерной жидкости ( $\alpha = 3/2$ ):

$$n_k \sim P^{1/2} k^{-17/4}. \quad (17)$$

Что, как и ожидалось, полностью совпадает с (12).

## Аргумент Fjørtoft-a: куда текут потоки?



## Аргумент Fjørtoft-а: куда текут потоки?

Давайте рассмотрим ситуация, когда на масштабе  $k_f$  энергия и волновое действие вбрасывается в систему, а на масштабах  $k_-$  и  $k_+$  они сгорают.

$$\varepsilon = \int \varepsilon_{\vec{k}} d\vec{k}, \quad n = \int n_{\vec{k}} d\vec{k}.$$

В слабонелинейном приближении:

$$\varepsilon_{\vec{k}} \approx \omega_k n_{\vec{k}}.$$

Для простоты пусть  $k_- \ll k_f \ll k_+$ . Соответственно, есть два инерционных интервала  $(k_-, k_f)$  и  $(k_f, k_+)$ , где есть только перенос сохраняющихся величин потоком, за счёт нелинейного взаимодействия волн. В динамическом равновесии вся вбрасываемая энергия и всё вбрасываемое волновое действие сгорают:

$$\dot{\varepsilon}_{k_f} + \dot{\varepsilon}_{k_-} + \dot{\varepsilon}_{k_+} = 0, \quad \dot{n}_{k_f} + \dot{n}_{k_-} + \dot{n}_{k_+} = 0.$$

Потоки величин в инерционных интервалах постоянны (динамическое равновесие).  
Давайте посмотрим на большие масштабы  $k_-$  (помним, что  $\varepsilon_{\vec{k}} \approx \omega_k n_{\vec{k}}$ ).

$$\dot{n}_{k_+} = -\dot{n}_{k_f} - \dot{n}_{k_-} \quad \dot{\varepsilon}_{k_f} + \dot{\varepsilon}_{k_-} + \dot{\varepsilon}_{k_+} = 0, \quad \omega_{k_f} \dot{n}_{k_f} + \omega_{k_-} \dot{n}_{k_-} - \omega_{k_+} \dot{n}_{k_f} - \omega_{k_+} \dot{n}_{k_-} = 0.$$

Отсюда получаем для соотношения скоростей "горения" волнового действия ( $k_- \ll k_f \ll k_+$ ):

$$\dot{n}_{k_f} = \frac{\omega_{k_+} - \omega_{k_-}}{\omega_{k_f} - \omega_{k_+}} \dot{n}_{k_-}, \quad \dot{n}_{k_f} \approx \frac{\omega_{k_+}}{-\omega_{k_+}} \dot{n}_{k_-} = -\dot{n}_{k_-}.$$

То есть вбрасываемое волновое действие сгорает в основном в области больших масштабов. На малых масштабах  $k_+$  аналогичные рассуждения дают:

$$\dot{n}_{k_f} \approx \frac{\omega_{k_+}}{-\omega_{k_f}} \dot{n}_{k_+}, \quad \dot{\varepsilon}_{k_f} \approx -\dot{\varepsilon}_{k_+}.$$

Таким образом почти вся вбрасываемая в систему энергия сгорает в области малых масштабов.

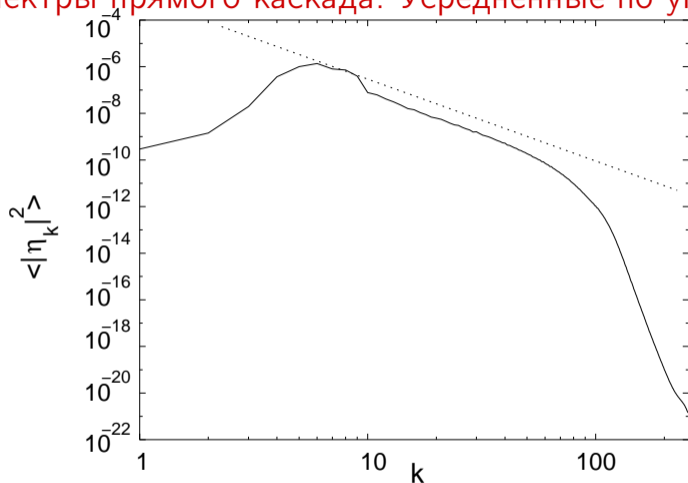
## Параметры численной схемы.

Давайте добавим накачку и затухание в динамические уравнения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \\
 &\quad + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \frac{1}{2}\Delta[\eta^2\hat{k}\psi] + \frac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\Delta\psi] - F^{-1}[\gamma_k\eta_{\vec{k}}], \\
 \dot{\psi} &= -g\eta - \frac{1}{2} \left[ (\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2 \right] - \\
 &\quad - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\Delta\psi - F^{-1}[\gamma_k\psi_{\vec{k}}] + F^{-1}[f_k e^{iR_{\vec{k}}(t)}], \\
 f_k &= 4F_0 \frac{(k-k_{p1})(k_{p2}-k)}{(k_{p2}-k_{p1})^2}; \\
 \gamma_k &= \gamma_0(k-k_d)^2, \quad k > k_d.
 \end{aligned}$$

Здесь  $R_{\vec{k}}(t)$  — равномерно распределённое случайное число в интервале  $(0, 2\pi]$ . Область моделирования  $L_x = L_y = 2\pi$  с периодическими граничными условиями. Гамильтоновское интегрирование по времени: КАО, А.И. Dyachenko, and V.E. Zakharov, *Numerical simulation of surface waves instability on a homogeneous grid*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **321**, 51–66 (2016); arXiv:1212:2225.

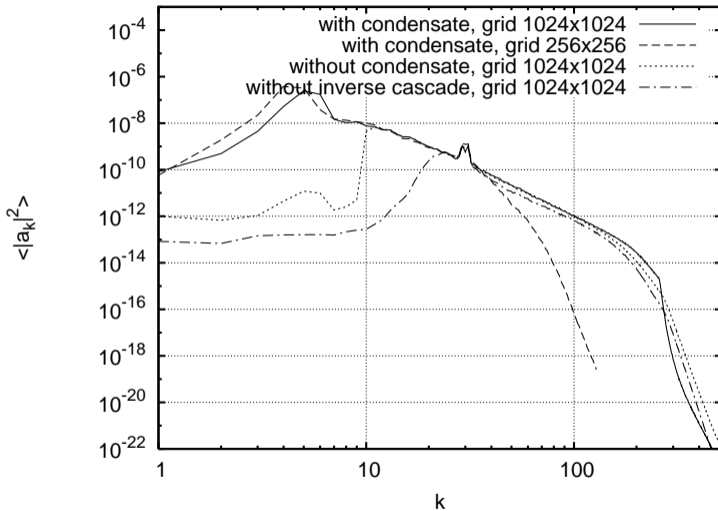
## Спектры прямого каскада. Усреднённые по углу.

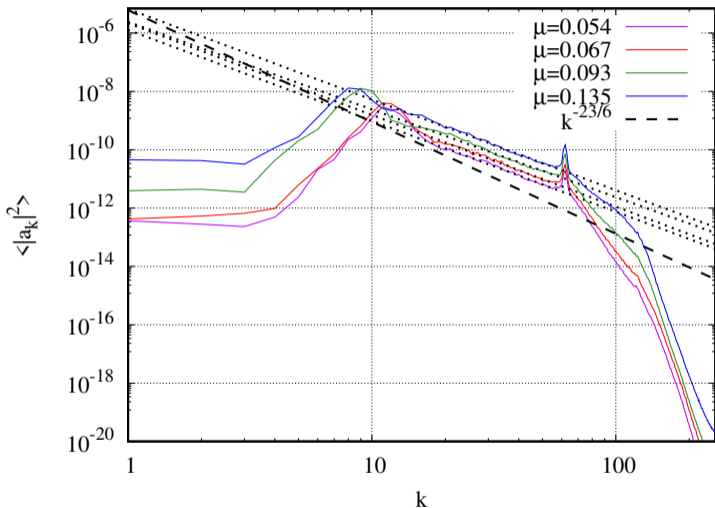


Dyachenko, KAO, Zakharov, JETP Letter **77** (10), 546-550 (2003) (arXiv:physics/0308101);

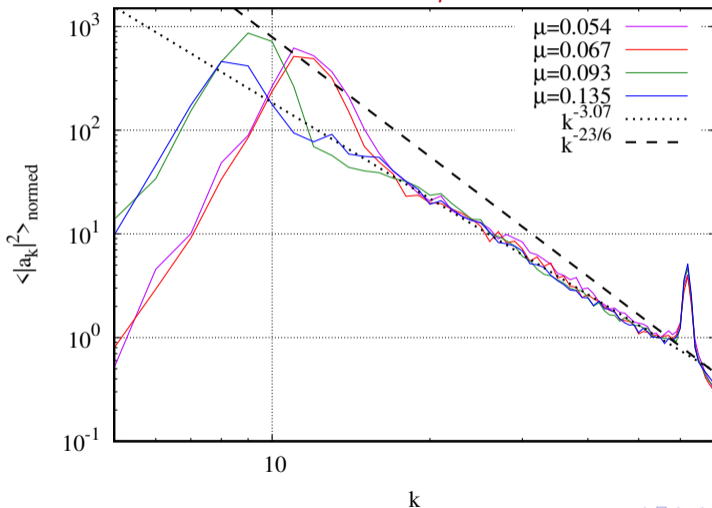
Dyachenko, KAO, Zakharov, PRL **92** (13), 134501 (2004) (arXiv:physics/0308099).

## Спектры прямого и обратного каскада. Усреднённые по углу.

KAO, PRL **101**, 7, 074504 (2008) (arXiv:0805.0445).

Спектры обратного каскада. Усреднение по углу.  $t \simeq 10^6 T_p$ .KAO, Phys. Rev. Lett., **130**, 264002 (2023) (arXiv:2211.16567).

## Спектры обратного каскада. Усреднённые по углу и отнормированные.

 $t \simeq 10^6 T_p.$ 

## Наименьшие квадраты: наклон для усреднённого по углу спектра.

$\mu$	$k \in$	Средний наклон	Ошибка в наклоне
0.054	[17; 55]	-3.12	$\pm 0.04$
0.067	[16; 55]	-3.14	$\pm 0.05$
0.093	[12; 56]	-3.01	$\pm 0.05$
0.135	[11; 56]	-3.11	$\pm 0.04$
Все	170 точек	-3.07	$\pm 0.02$

**Таблица:** Приближение наименьшими квадратами для различных симуляций. Вторая колонка показывает диапазон  $k$  между конденсатом и накачкой; the третья колонка даёт средний наклон  $\alpha$  для  $\langle |a_k|^2 \rangle \sim k^\alpha$ ; последняя колонка даёт оценку ошибки для приближения.

Аналитическое объяснение отклонения спектров от спектров KZ в рамках кинетического уравнения вот тут:

КАО, S. V. Nazarenko, Y. Pan, and J. Shatah, Journal of Fluid Mechanics, **992**, A1 (2024) (arXiv:2305.01930).

Все упомянутые статьи доступны на <http://kao.itp.ac.ru>