Сверхпроводниковые квантовые биты: как построить квантовый компьютер

Ю.Махлин

1 Кубиты

Двухуровневые квантовые системы, $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ или $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b, \in \mathbb{C}$.

Логические операции: эволюция, уравнение Шредингера

$$i\frac{d}{dt}\,|\psi\rangle = \mathcal{H}\,|\psi\rangle\ .$$

$$|\psi_0\rangle \to U(t)\,|\psi_0\rangle\ , U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right)\ .$$

Спин-1/2, гамильтониан $\mathcal{H} = -\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$.

Пример 1. Сдвиг фазы, $B \parallel \hat{z}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\ ; \qquad \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) = \begin{pmatrix} e^{-iBt/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{iBt/\hbar} \end{pmatrix}$$

Пример 2. Поворот спина, $B \parallel \hat{x}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -B & 0 \end{pmatrix}\ ; \qquad \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{Bt}{\hbar} & i\sin\frac{Bt}{\hbar} \\ i\sin\frac{Bt}{\hbar} & \cos\frac{Bt}{\hbar} \end{pmatrix}$$

Квантовое преобразование Фурье:
$\sum_{x=0}^{2^L-1} c_x\,|x\rangle \mapsto \sum_{k=0}^{2^L-1} c_k\,|k\rangle$, где $c_k = \frac{1}{2^L}\sum_{x=0}^{2^L-1} c_x \exp\left(2\pi i k x/2^L\right)$.

Квантовый алгоритм: инициализация, унитарная эволюция (обратимость), считывание (измерение)

Квантовый параллелизм: ускорение вычислений
N кубитов — 2^N состояний

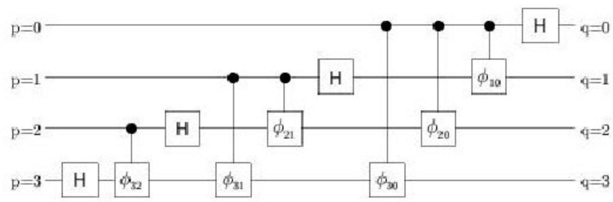


Рис. 1: Квантовое преобразование Фурье: $\varphi_{ij} = \pi/2^{|i-j|}$. Число операций $\propto L^2$, “классически” $\propto 2^L \cdot L$.

N кубитов можно приготовить в суперпозиции всех 2^N состояний, т.е. “обработать все их за один раз”.

$$\sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle\,|0\rangle \mapsto \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle\,|f(x)\rangle$$

Почему не всегда быстрее? — Квантовое измерение. — Но иногда!

$$\mathcal{H} = -\sum_i \mathbf{B}_i(t)\boldsymbol{\sigma}_i + \sum_{i,j} J_{ij}(t)\left[\sigma_x^i\sigma_x^j + \sigma_y^i\sigma_y^j\right] + \mathcal{H}_{\mathrm{diss}} + \mathcal{H}_{\mathrm{meas}}(t)$$

2 Сверхпроводниковые кубиты

$$E_{\mathrm{ch}}(Q, V_{\mathrm{g}}) = \frac{(Q - C_{\mathrm{g}}V_{\mathrm{g}})^2}{2(C_{\mathrm{g}} + C_{\mathrm{J}})}$$

Кулоновская блокада.
Когерентная динамика заряда
Джозефсоновское туннелирование

$$\sum_n \left[-\frac{E_{\mathrm{J}}}{2}\,|n\rangle\,\langle n+1| + \mathrm{h.c.}\right] + \sum_n E_{\mathrm{ch}}(n)\,|n\rangle\,\langle n|$$

$|\varphi\rangle = \sum_n e^{i\varphi n}\,|n\rangle \quad \Rightarrow \quad -E_{\mathrm{J}}\cos\varphi$

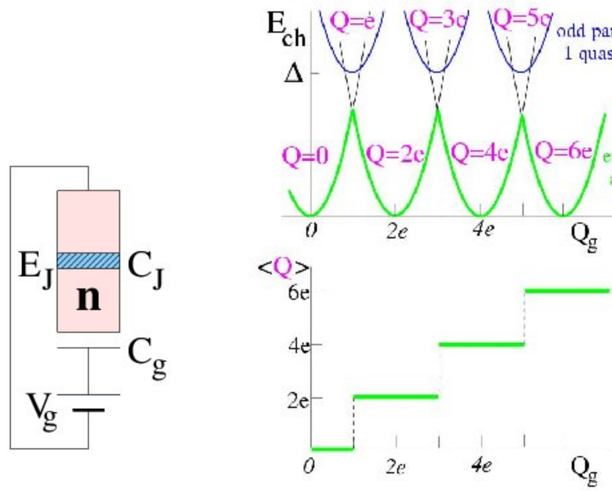
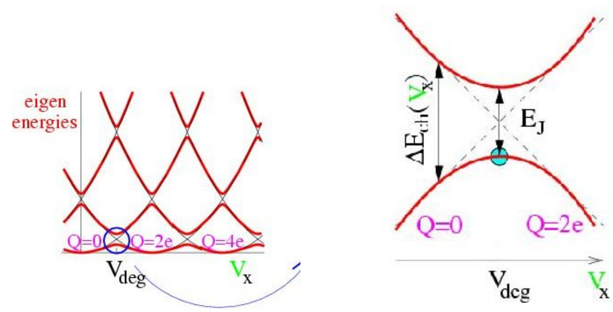


Рис. 2: Зарядовый сверхпроводниковый квантовый бит. Кулоновская лестница.



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\Delta E_{\rm ch} & -E_{\rm J} \\ -E_{\rm J} & \Delta E_{\rm ch} \end{pmatrix} \begin{matrix} |n=0\rangle \\ |n=1\rangle \end{matrix} = -\frac{1}{2}\left[\Delta E_{\rm ch}\hat{\sigma}_z + E_{\rm J}\hat{\sigma}_x\right] ,$$

уровни $\varepsilon = \pm\sqrt{\Delta E_{\rm ch}^2 + E_{\rm J}^2}/2$.

3 Разрушение квантовой когерентности

3.1 Релаксация

$$\mathcal{H} = -\frac{\Delta E}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}\hat{X}(t)\hat{\sigma}_x + \mathcal{H}_{\text{рез}}$$

X — оператор в гильбертовом пространстве резервуара.
Золотое правило:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\downarrow &= \frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{4}\sum_{i,f}\rho_i|\langle i|X|f\rangle|^2\delta(E_i+\Delta E-E_f) = \\
&= \frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{4}\sum_{i,f}\rho_i\langle i|X|f\rangle\langle f|X|i\rangle\int\frac{dt}{2\pi\hbar}e^{it(E_i+\Delta E-E_f)/\hbar} = \\
&= \frac{1}{4\hbar^2}\int dt\sum_i\rho_i\langle i|X(t)X(0)|i\rangle e^{it\Delta E/\hbar} = \\
&= \frac{1}{4\hbar^2}\left\langle X^2_{\omega=\Delta E/\hbar}\right\rangle .
\end{aligned}$$

$$\Gamma_\uparrow = \frac{1}{4\hbar^2}\left\langle X^2_{\omega=-\Delta E/\hbar}\right\rangle .$$

$$\frac{1}{T_1} = \Gamma_\downarrow + \Gamma_\uparrow .$$

3.2 Сбой фазы T_2^*

$$\mathcal{H} = -\frac{\Delta E}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}\hat{X}(t)\hat{\sigma}_z + \mathcal{H}_{\text{рез}}$$

Случайная фаза $\int X(t')dt'$:

$$\rho_{\uparrow\downarrow} \propto e^{-i\Delta Et}\left\langle e^{i\int_0^t\hat{X}(t')dt'}\right\rangle_{\text{рез}}$$

Для гауссова шума:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{\frac{i}{\hbar}\int X(t')dt'}\right\rangle &= e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\langle(\int Xdt')^2\rangle} = \\
&= e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\int\int dt_1dt_2\langle\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)\rangle} = e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\int\int dt_1dt_2\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega(t_1-t_2)}\langle\hat{X}^2_\omega\rangle} = \\
&= e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\langle X^2_\omega\rangle\frac{\sin^2(\omega t/2)}{(\omega/2)^2}} .
\end{aligned}$$

Если $\langle X_\omega^2 \rangle$ гладкое по ω вблизи $\omega = 0$, то:

$$\left\langle e^{i\int \hat{X}(t')dt'} \right\rangle \approx e^{-t\langle X^2_{\omega=0}\rangle \int \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{dx}{2\pi\hbar^2}} = e^{-t/T_2^*}$$

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{2\hbar^2}\left\langle X^2_{\omega=0}\right\rangle .$$

4 Квантовое измерение

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = (t_0 + t'\hat{\sigma}_z)(\hat{T} + \hat{T}^\dagger)$$

$\hat{T}$ — туннелирование направо, $\hat{T} = \sum_{k_1,k_2} a^\dagger_{k_1} b_{k_2}$

Ток $I = \langle N \rangle^\cdot = i[\mathcal{H}_{\text{int}}, N] = i(t_0 + t'\hat{\sigma}_z)(T - T^\dagger)$.

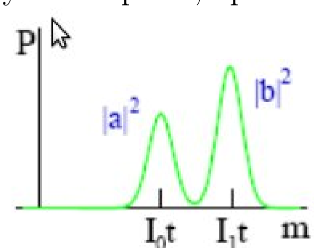
Шум тока, $\langle \delta N^2 \rangle \sim N$.

С одной стороны, шум дефазирует кубит.

Скорость дефазировки:

$$\frac{1}{t_\varphi} = \frac{4}{2}t'^2\left\langle (T+T^\dagger)^2_{\omega=0}\right\rangle = 2t'^2\langle (TT^\dagger + T^\dagger T)_{\omega=0}\rangle = \frac{2t'^2}{t_0^2}\langle I^2_{\omega=0}\rangle \overset{\text{shot\_noise}}{=} 2\left(\frac{t'}{t_0}\right)^2 \bar{I}\,.$$

С другой стороны, происходит измерение:



$\bar{I} \propto t_0^2 V$, а $I_{0,1} \propto (t_0 \pm t')^2 V$. Значит,

$$\frac{I_1 - I_0}{\bar{I}} = \frac{4t_0 t'}{t_0^2} = 4\frac{t'}{t_0}\,.$$

$I_1 t - I_0 t = 4\frac{t'}{t_0}\bar{I}t = 4\frac{t'}{t_0}\bar{N}$.

Следовательно, $4\frac{t'}{t_0}\bar{I}t_m = 2\sqrt{2\bar{I}t_m}$, а $16(t'/t_0)^2\bar{I}^2t_m^2 = 8\bar{I}t_m$, и время измерения определяется равенством

$$\frac{1}{t_m} = 2\left(\frac{t'}{t_0}\right)^2 \bar{I}\,.$$

Итак, $t_m \sim t_\varphi$. При неоптимальном измерении фаза может сбиваться и быстрее. Всегда

$$t_m \geq t_\varphi\,.$$

Нельзя измерить, не разрушив состояние.