A/

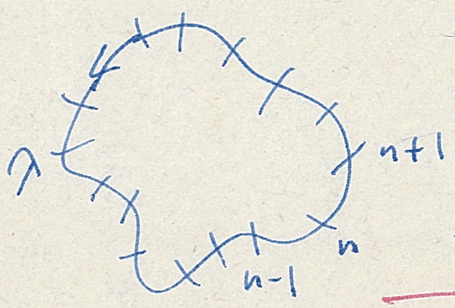
<u>спин</u> <u>Лекция 1</u>

определим фазу, набираемую по пути в параметрическом пространстве $\lambda = 1 \ldots N$

$$\varphi = -\,\mathrm{Im}\,\ln\Big[\langle \lambda=1 | \lambda=2\rangle \ldots \langle \lambda=n | \lambda=n+1\rangle \ldots \langle \lambda=N-1 | \lambda=N\rangle\Big]$$

знак не обязательно минус, может быть и плюс. как удобно.

адиабатическое изменение - перекрытия гладкие



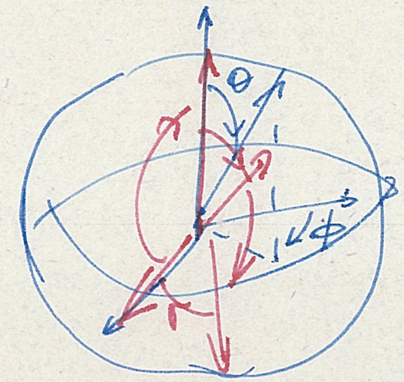
<u>Литература</u>: David Vanderbilt „Berry phases in electronic structure theory" Cambridge University Press 2018

В/

спин :

$$H = -g\vec{B}\vec{S}$$

$$|\theta,\phi\rangle = \begin{bmatrix}\cos\theta/2 \\ \sin\theta/2\; e^{i\phi}\end{bmatrix}$$



путь :

тащим спин, магнитным полем $\vec{B}$, например

$\theta=0\ \phi=0$ $\qquad\qquad$ $\theta=\frac{\pi}{2}\ \phi=\pi$

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\vec{S} = S\hat{e}_z & \rightarrow & \vec{S} = S\hat{e}_y \\
\vec{S} = S\hat{e}_y & \rightarrow & \vec{S} = -S\hat{e}_z \\
\vec{S} = -S\hat{e}_z & \rightarrow & \vec{S} = -S\hat{e}_y \\
\vec{S} = -S\hat{e}_y & \rightarrow & \vec{S} = S\hat{e}_z
\end{array}\right.$$

$$\langle +z|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle +y|-z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/2}$$

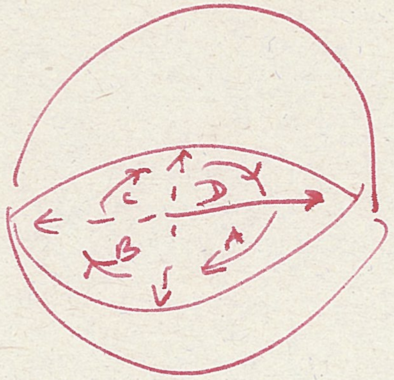
$$\langle -z|-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\langle -y|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \varphi = -\mathrm{Im}\ln\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= -\pi$$

набрали фазу



$s\hat{e}_x \to -s\hat{e}_y \to -s\hat{e}_x$

$\to +s\hat{e}_y \to s\hat{e}_x$

$\theta = \pi/2$

$+x \quad \phi = 0$

$-y \quad \phi = \pi/2$

$-x \quad \phi = \pi$

$y \quad \phi = 3\pi/2$

$$|\pi/2, \phi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 \\ \sin \pi/4 \, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\langle +x | -y \rangle \langle -y | -x \rangle \langle -x | y \rangle \langle y | x \rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\pi/2}\right) \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\pi/2}\right) \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\pi/2}\right) \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\pi/2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + e^{i\pi/2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(1 + \cos\pi/2 + i\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2}\right)^4 = \frac{1}{4} e^{i}$$

c/

фаза, мнимая часть волновой функции, отвечает за скорость, если есть возможность пускать ток (в нашем примере син был нульмерным)

поэтому изучим случай, когда эта фаза будет определять ток в двумерной электронной системе

A/

$$\hat H_A = \frac{\hat k^2}{2m} + \underbrace{\lambda(\hat k_x \hat\sigma_y - \hat k_y \hat\sigma_x)}_{\substack{\text{спин-орбитальное} \\ \text{взаимодейсвие} \\ \lambda = \text{const}}} + \Delta \hat\sigma_z - \mu$$

химический потенциал

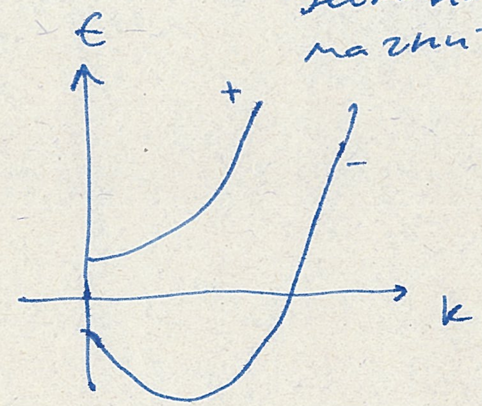
обменное взаимодействие или Зеемановское магнитное поле $\Delta = \text{const}$

2D система

$\vec k \in (k_x, k_y)$

спектр

$$\epsilon_{k,\pm} = \frac{k^2}{2m} \pm \sqrt{(\lambda k)^2 + \Delta^2} - \mu$$



$$\psi_{k+} = \begin{pmatrix} \cos \xi_k/2 \; e^{i\phi_k} \\ -\sin \xi_k/2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \xi_k = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + (\lambda k)^2}}$$

$$\psi_{k-} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\xi_k}{2} \, e^{i\phi_k} \\ \cos \frac{\xi_k}{2} \end{pmatrix}$$

$$\phi_k = \arctan \frac{k_y}{k_x}$$

B/ Спиноры напоминают то, как мы параметризовывали спин на единичной сфере.

Теперь импульс (k_x, k_y) „управляет" спином.

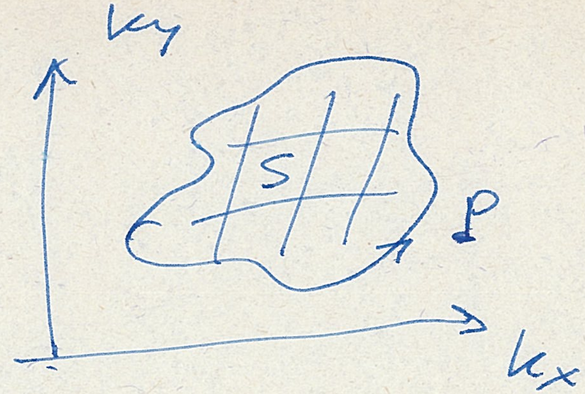
Чтобы ~~спин мог~~ фаза спина могла проявиться, нужно задействовать все три компонента спина, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, в Гамильтониане. В нашей модели так оно и есть.

C1

фаза:

$\lambda \in (k_x; k_y)$

$\lambda \in P$ путь



$$\varphi = -\operatorname{Im} \sum_{\lambda} \ln \langle u_\lambda | u_{\lambda + d\lambda} \rangle =$$

$$|u_{\lambda+d\lambda}\rangle \simeq |u_\lambda\rangle + d\lambda \left| \frac{\partial}{\partial\lambda} u_\lambda \right\rangle \qquad \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda}$$

$$= -\operatorname{Im} \sum_{\lambda} \ln \Big(\underbrace{\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle}_{=1} + d\lambda \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle \Big]$$

$$= -\operatorname{Im} \sum_{\lambda} d\lambda \underbrace{\langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle}_{\text{мнимая}}$$

$$= \oint_P \langle u_\lambda | i \partial_\lambda u_\lambda \rangle \, d\lambda$$

C2

$\langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$ почему мнимая

$$\langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \partial_\lambda \langle u_\lambda | u_\lambda \rangle = 0 = \langle \partial_\lambda u_\lambda | u_\lambda \rangle + \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle = - \langle \partial_\lambda u_\lambda | u_\lambda \rangle$$

эрмитовость:

$A_{ij} = A_{ji}^*$, где $A_{ij} = \langle i | \hat{A} | j \rangle$

поскольку в нашем случае $A_{ij} \equiv \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$

, то $A_{ji} = \langle \partial_\lambda u_\lambda | u_\lambda \rangle$, тогда

$A_{ij} = -A_{ji} = A_{ji}^*$ $\Rightarrow$ A_{ij} мнимая величи

Теорема Стокса:

$$\oint_P \langle u_\lambda | i\partial_\lambda u_\lambda \rangle = \int_S \vec{\Omega}(\lambda)\cdot d\vec{S}$$

по пути

по площади

$$\vec{\Omega} = \hat{e}_z \Omega = -2\,\mathrm{Im}\,\langle \partial_x u | \partial_y u \rangle$$ кривизна Берри

в нашем случае двумерие

в нашей модели

$$|u\rangle \Longrightarrow |\psi_{k,\pm}\rangle \qquad \partial_{x/y} = \frac{\partial}{\partial k_{x/y}}$$

$$\vec{\Omega} \to \vec{\Omega}_{k,\pm}$$

$\vec{\Omega}$ эффективное магнитное поле в импульсном пространстве

$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{A}$ - потенциал

E/

к чему это эффективное магнитное поле приводит:

уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\vec r}_{k\pm} = \dfrac{\partial \epsilon_{k\pm}}{\partial \vec k} + \dot{\vec k}_\pm \times \vec\Omega_{k\pm} & \text{скорость} \\[2ex] \dot{\vec k}_\pm = \underbrace{e\vec E + \dfrac{e}{c}\,\dot{\vec r}_{k,\pm} \times \vec B}_{\text{сила Лоренца}} & \text{второй закон Ньютона} \end{cases}$$

получим „аномальную" скорость:

$$\left(\dot{\vec r}_{k\pm}\right)_{\text{аномальная}} \propto e\left[\vec E \times \vec\Omega_{k\pm}\right]$$

если аккуратно подсчитать ток

$$\vec J_{\text{АХЭ}} = e^2 \sum_{s=\pm} \int \frac{d\vec k}{(2\pi)^2} \left[\vec E \times \vec\Omega_{k\pm}\right] f(\epsilon_{k\pm})$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{x/T}+1}$$

функция распределения Ферми-Дирака

F/ в нашей модели

$$\Omega_{k;\pm} = \mp \frac{\lambda^2 \Delta}{2\left[\Delta^2 + (\lambda k)^2\right]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_{\text{АХЭ}} = e^2 \left[\vec{E} \times \hat{e}_z\right] \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \left[f(\epsilon_{k;-}) - f(\epsilon_{k;+}) \right] \cdot \frac{\lambda^2 \Delta}{2\left(\Delta^2 + (\lambda k)^2\right)^{3/2}}$$

не ноль в меру разницы заполнения ~~эне~~ энергетических подзон $\epsilon_{k,+}$ и $\epsilon_{k,-}$

напомним, $\epsilon_{k\pm} = \frac{k^2}{2m} \pm \sqrt{\Delta^2 + (\lambda k)^2} - \mu$

Это понятно: У разных подзон противоположная по знаку кривизна (фаза)

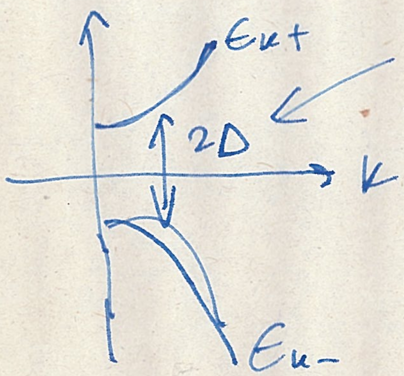
A/

Модель изолятора:

$$\hat{H}_B = \lambda(\hat{k}_x \hat{\sigma}_y - \hat{k}_y \hat{\sigma}_x) + \Delta \hat{\sigma}_z$$

всё тоже самое, но $\frac{1}{2m} \to 0$ и $\mu = 0$

спектр, $\epsilon_{k,\pm} = \pm\sqrt{\Delta^2 + (\lambda k)^2}$



энергетическая щель

$T = 0$

$$\Rightarrow J_{АХЭ} = e^2 [\vec{E} \times \hat{e}_z] \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{\lambda^2 \Delta}{2(\Delta^2 + (\lambda k)^2)^{3/2}}$$

только ϵ_{k-} подзона даёт вклад при $T = 0$

B/

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2}\, \frac{\lambda^2\Delta}{\left(\Delta^2+(\lambda k)^2\right)^{3/2}} = \int_0^{\Lambda} \frac{k\,dk}{(2\pi)}\, \frac{\lambda^2\Delta}{\left(\Delta^2+(\lambda k)^2\right)^{3/2}}$$

$$\underset{\Lambda\to\infty}{\approx} \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{dy}{(y+1)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2}{\sqrt{y+1}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi}$$

просто число, независящее от λ и Δ, коль скоро $\lambda \neq 0$ $\Delta \neq 0$

$$\vec{J}_{\text{АХЭ}} = e^2\,\frac{1}{2\pi}\left[\vec{E}\times\hat{e}_z\right]$$

мы работали в $\hbar \equiv 1$; $h = 2\pi\hbar$

$$\vec{J}_{\text{АХЭ}} = \frac{e^2}{h}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\vec{E}\times\hat{e}_z\right]$$

если вернуть $h = 2\pi\hbar$

c/

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812\ \Omega \approx 25\ k\Omega$$

Омы

Сопротивление Клитцинга (klitzing)

Черн - число (Chern number)
(Число Черна)

$$\oint \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2\pi C$$

целое число

$C = \pm 1, \pm 2, \ldots$ в зависимости от модели

A/

$$\left(\beta mc^2 + c\,\vec{\alpha}\vec{p}\right)\psi = \left(E\,\cancel{\xi} + \phi\right)\psi$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left((mc^2)^2 + c^2 p^2\right)\psi = (E+\phi)^2\psi + c\,\vec{\sigma}(\vec{p}\phi)\cdot\psi$$

$$\left[(mc^2)^2 + (c\vec{p})^2\right]\psi = (E+\phi)^2\psi + \underbrace{ci\,\vec{\sigma}\vec{E}\cdot}_{\text{spin couples to the electric field}}\psi$$

<u>spin-orbit coupling</u>

Откуда берётся спин-орбита — это релятивистский эффект за счёт присутствия электрического поля в системе

B

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

integrate χ out

$$\left(-\beta mc^2 + E + \phi\right]\psi = + c\vec{\alpha}\vec{p}\,\psi$$

$$\begin{cases} \left(E + \phi - mc^2\right)\varphi = c(\vec{\sigma}\vec{p})\,\chi \\ \left(E + \phi + mc^2\right)\chi = c(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi \end{cases}$$

$$\left(2mc^2 + \epsilon + \phi\right)\chi = c(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi$$

$$\chi \approx \frac{c(\vec{\sigma}\vec{p})\,\varphi}{2mc^2}$$

$$(\epsilon + \phi)\,\varphi = \frac{1}{2m}\,p^2\,\varphi$$

c/

$$\chi \approx \frac{1}{2mc^2+\phi}\, c(\vec{\sigma}\vec{p})\varphi$$

$$(\epsilon+\phi)\varphi = c\,\vec{\sigma}\vec{p}\,\frac{1}{2mc^2+\phi}\,c\,\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi$$

$$= c\,\vec{\sigma}\vec{p}\,\frac{1}{2mc^2}\left(1-\frac{\phi}{2mc^2}\right)c\,\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi$$

$$= \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\varphi - \frac{1}{(2mc)^2}\left(\vec{\sigma}\vec{p}\,\phi\,\vec{\sigma}\vec{p}\,\varphi\right)$$

$$\sigma_m \hat{p}_m \phi\, \sigma_n \hat{p}_n \varphi = \sigma_m \sigma_n (\hat{p}_m \phi)\hat{p}_n \varphi$$

$$+\ \phi\,\vec{p}^{\,2}\varphi =$$

spin-orbit coupling

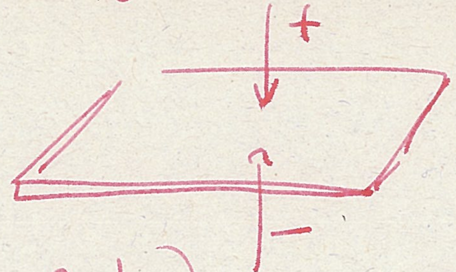
$$= -(\vec{\sigma}\vec{E})(\sigma\hat{p}\varphi) + \phi p^2\varphi = -(\vec{E}\vec{p})\varphi \overbrace{- i\vec{\sigma}[\vec{E}\times\vec{p}]\varphi}^{\text{spin-orbit coupling}}$$

$$+\ \phi p^2 \varphi$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi = -\hat{e}_x\partial_x\phi - \hat{e}_y\partial_y\phi - \hat{e}_z\partial_z\phi$$

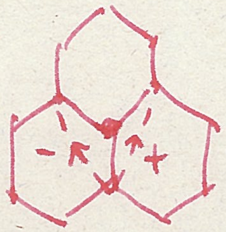
Типы спин-орбитального взаимодействия

Рашба:



2DEG.
приложена ⊥ разница
напряжения
асимметрия между
верхом и низом

$$H_R = \lambda(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x)$$



$$H_{SO} = \beta \sigma_z p_x (p_x^2 - 3p_y^2)$$

взаимодействие электронов проводимости
с магнитным порядком

ферромагнетик

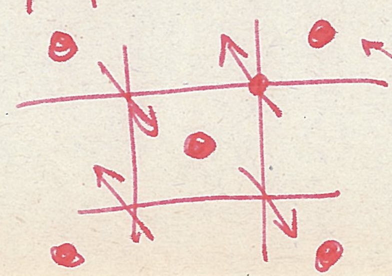
$$H_{FM} = \gamma \vec{M}\vec{\sigma}$$

антиферромагнетик

$$H_{AFM} = \xi(\vec{n}\vec{\sigma})\, p_x p_y$$

$\vec{n}$ - направление Неелевского вектора

$$\vec{n} = \vec{m}_1 - \vec{m}_2$$



не магнитные атомы

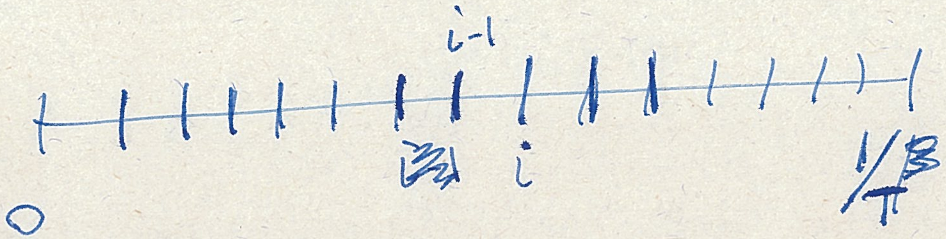
A

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-H(\vec{S})\frac{1}{T}}$$ статистическая сумма

$$Z = \lim_{M\to\infty} \prod_{i=1}^{M} e^{-\Delta\tau_i H(\vec{S})}$$

$$\langle f | e^{-\int_0^\beta H d\tau} | i \rangle$$

final initial



разбили на интервалы

$$\Delta\tau_i = \frac{1}{MT}$$

$$\int \frac{d\vec{N}_i}{2\pi} |\vec{N}_i\rangle\langle\vec{N}_i| = 1$$

Лекция 2

$$\langle N_i | e^{-\Delta\tau_i H(\vec{S})} | N_{i+1} \rangle$$

$$= \langle N(\tau) | e^{-\Delta\tau H(S)} | N(\tau+\Delta\tau) \rangle$$

книга S. Sachdev „Quantum phase transitions" Cambridge Univ Press

B/

$$= \langle N(\tau)| \left(1 - \Delta\tau\, H(s)\right) |N(\tau + \Delta\tau)\rangle$$

$$= \langle N(\tau)| \left(1 - \Delta\tau\, H(s)\right)\left(|N(\tau)\rangle + \Delta\tau \frac{d}{d\tau}|N(\tau)\rangle\right)$$

$$= 1 - \Delta\tau \langle N(\tau)| H(s) |N(\tau)\rangle$$

$$+ \Delta\tau \langle N(\tau)| \frac{d}{d\tau} |N(\tau)\rangle$$

reexponentiate

$$\approx e^{-\Delta\tau \underbrace{\langle N(\tau)|\frac{d}{d\tau}|N(\tau)\rangle}_{\text{purely imaginary}} - \Delta\tau \langle N(\tau)|H(s)|N(\tau)\rangle}$$

$\leftarrow$ Berry phase

$\triangleright$ $\langle N|N\rangle = 1$

$$\frac{d}{dt}\langle N|N\rangle = 0 = \langle \dot N|N\rangle + \langle N|\dot N\rangle$$

$$\langle \dot N|N\rangle = -\langle N|\dot N\rangle = -(\langle \dot N|N\rangle)^\dagger$$

Hermicity: $(\langle \dot N|N\rangle)^\dagger = \langle N|\dot N\rangle$ $\triangleleft$

A/

Лекция 2

параметризация спина

$$|\vec{N}\rangle = e^{z\hat{S}_+ - z^*\hat{S}_-}|0\rangle$$

$$\vec{N} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$$

$$z = -\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

for $S = 1/2$

$$|\vec{N}\rangle = \exp\begin{bmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{bmatrix}|0\rangle$$

$$= \left(1 + \begin{bmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{bmatrix}^2 + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{bmatrix}^3 + \dots\right)|0\rangle$$

$$= \left(1 + \begin{bmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -|z|^2 & \\ & -|z|^2 \end{pmatrix}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left\{(-|z|^2)\begin{bmatrix} 0 & z \\ -z^* & 0 \end{bmatrix} + \dots\right)|0\rangle$$

B

$$= \left(\cos|z| + \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\phi} \\ +e^{i\phi} & \end{pmatrix} \sin|z| \right) |0\rangle$$

$$= \left(\cos\frac{|\theta|}{2} + \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \right) |0\rangle$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} \, |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \, |\downarrow\rangle$$

c/

$$\left\langle \vec{N}(\tau) \middle| \frac{d}{d\tau} \middle| \vec{N}(\tau) \right\rangle$$

$$\frac{d}{d\tau} \left| \vec{N}(\tau) \right\rangle = \frac{d}{d\tau} \left(\cos\frac{\theta}{2} \left| \uparrow \right\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \left| \downarrow \right\rangle \right)$$

$$= -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin\frac{\theta}{2} \left| \uparrow \right\rangle + i\dot{\phi} e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \left| \downarrow \right\rangle + \frac{\dot{\theta}}{2} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \left| \downarrow \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{N}(\tau) \right| = \left\langle \uparrow \right| \cos\frac{\theta}{2} + \left\langle \downarrow \right| e^{-i\phi} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\left\langle \vec{N}(\tau) \middle| \frac{d}{d\tau} \middle| \vec{N}(\tau) \right\rangle = -\frac{\dot{\theta}}{2} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} + i\dot{\phi} \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\dot{\theta}}{2} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} = i\dot{\phi} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= i\dot{\phi}(1-\cos\theta)\frac{1}{2}$$

D/

$$\left\langle \vec{N}(\tau) \middle| S_z \middle| \vec{N}(\tau) \right\rangle =$$

$$= \left(\langle \uparrow | \cos\frac{\theta}{2} + \langle \downarrow | e^{-i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos\frac{\theta}{2} | \uparrow \rangle - e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} | \downarrow \rangle \right)$$

$$= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$

$$\left\langle \vec{N}(\tau) \middle| S_x \middle| \vec{N}(\tau) \right\rangle = e^{-i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}$$

$$= \sin\theta \cos\phi$$

$$\left\langle \vec{N}(\tau) \middle| S_y \middle| \vec{N}(\tau) \right\rangle = -i \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} + i \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$$

$$= \sin\theta \sin\phi$$

E/

$$L = -i\dot{\phi}(1-\cos\theta)\left(\frac{1}{2}\right)_{s} - S\vec{H}\vec{N}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial\phi} \qquad -iS\sin\theta\,\dot{\theta} = -\frac{\partial}{\partial\phi}S\vec{H}\vec{N}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \qquad -\frac{\partial}{\partial\theta}S\vec{H}\vec{N} + iS\dot{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} is\sin\theta\,\dot{\theta} = +s(-H_x\sin\phi + H_y\cos\phi)\sin\theta \\ +iS\dot{\phi}\sin\theta + s(H_x\cos\phi\cos\theta + H_y\sin\phi\cos\theta - H_z\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} iS\dot{\theta} = +S(-H_x\sin\phi + H_y\cos\phi) \\ is\dot{\phi}\sin\theta = s(H_x\cos\phi\cos\theta + H_y\sin\phi\cos\theta - H_z\sin\theta) \end{cases}$$

F/

$$\begin{cases} iS\cos\theta\,\dot\theta\sin\phi = +S\left(-H_x\sin^2\phi + H_y\cos\phi\sin\phi\right)\cos\theta \\ iS\sin\theta\,\dot\phi\cos\phi = -S\left(H_x\cos^2\phi\cos\theta + H_y\sin\phi\cos\phi\cos\theta \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - H_z\sin\theta\cos\phi\right) \end{cases}$$

add them

$$iS\frac{d}{dt}\left(\sin\theta\sin\phi\right) = S\left(-H_x\cos\theta + H_z\sin\theta\cos\phi\right)$$

$$iS\frac{d}{dt}N_y = S\left(H_zN_x - H_xN_z\right)$$

$$= S\left[\vec{H}\times\vec{N}\right]_y$$

$$i\frac{d}{dt}\vec{S} = \left[\vec{H}\times\vec{S}\right]$$

external magnetic field

Landau-Lifshits equation (in imaginary time)

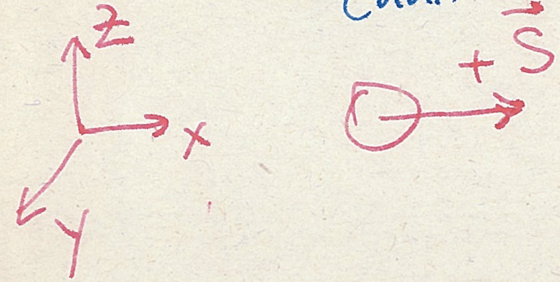
A

Лекция 2

Пример реализации спиновой фазы Берри в системе локализованного спина.

Гамильтониан, описывающий спин

локализованный спин



$+\vec{S}$

$$H = K_1 S_z^2 + K_2 S_y^2$$

$$K_1 > K_2 > 0$$

$$E = K_1 S^2 \cos^2\theta + K_2 S^2 \sin^2\theta \sin^2\phi$$

$E = 0$ вырождено по

$+S_x$ $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$

$-S_x$ $\theta = \pi/2$, $\phi = \pi$

два вырожденных состояний

S – длина спина.

$\theta = \pi/2$ $S^2 K_2$ барьер

$\phi = 0$ $\phi = \pi$

<u>Вопрос:</u> мы приготовили спин в направлении $+S_x$. Какова ~~амплитуда~~ вероятность протуннелировать в состояние $-S_x$?

PRL 60, 661, 1988

PRL 69, 3232, 1992

PRL 69, 3236, 1992

B

$$\langle \pi | e^{-\beta H} | 0 \rangle = \int_{\theta(0)\,\phi(0)}^{\theta(\beta),\,\phi(\beta)} d\Omega \; e^{-S}$$

action

интеграл по всем траекториям начинающихся в $\theta(0), \phi(0)$ и заканчивающихся в $\theta(\beta), \phi(\beta)$

$$S = \int_0^\beta L \, d\tau$$

$$L = \underbrace{iS\dot\phi - iS\dot\phi\cos\theta}_{\text{это и есть фаза Берри}} + E(\theta;\phi)$$

энергия определённая выше

$$\int_0^\beta iS\dot\phi \, d\tau = iS\left(\phi(\beta) - \phi(0)\right)$$

эта часть выпадает из уравнений движения спина. Однако, эта часть очень важна для определения туннелирования между $+S_x$ и $-S_x$

c/

уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot\phi} = \frac{\delta L}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\partial \dot\theta} = \frac{\delta L}{\partial \theta}$$

$$\begin{cases} i\dot\theta \sin\theta = 2Sk_2 \sin^2\theta \sin\phi\cos\phi \\ i\dot\phi \sin\theta = 2Sk_1 \cos\theta\sin\theta - 2Sk_2 \cos\theta\sin\theta\sin^2\phi \end{cases}$$

используя симметрию уравнений, получаем

$$\begin{cases} (i\dot\phi)^2 = -(2k_1)^2\lambda \sin^2\phi\,(1-\lambda\sin^2\phi) \\ \sin^2\theta\,(1-\lambda\sin^2\phi) = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1} \leq 1$$

уравнения можно решить точно и получить инстантонное решение

D/

проинтегрируем ~~...~~

$$i\dot{\phi} = \sqrt{-(2k_1)^2 s\lambda \sin^2\phi\,(1-\lambda\sin^2\phi)}$$

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{+(2k_1)^2 s\lambda\sin^2\phi\,(\lambda\sin^2\phi-1)}} = -i\tau$$

$$\int \frac{d\phi}{\sin\phi\sqrt{\lambda\sin^2\phi-1}} = \sqrt{(2k_1)^2 s\lambda}\,(-i\tau)$$

$\phi = \arcsin x$ $\qquad d\phi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad x=\frac{1}{y}$

$$\int\frac{d\phi}{\sin\phi\sqrt{\lambda\sin^2\phi-1}} = \int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}\sqrt{\lambda x^2-1}} = \int\frac{-\frac{1}{y^2}dy}{\frac{1}{y}\frac{1}{y^2}\sqrt{y^2-1}\sqrt{\lambda-y^2}}$$

$$y^2=z \;\rightarrow\; = -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z-1}\sqrt{\lambda-z}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z-1}\sqrt{\lambda-1-(z-1)}} \triangleq$$

E/

$$\frac{dz}{\sqrt{z-1}} = 2\,d\sqrt{z-1} \qquad \xi = \sqrt{z-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\lambda^2-1-\xi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-1-\xi} + C$$

const

$$\xi = \sqrt{z-1} \qquad x = \sin\phi$$

$$z = y^2 \qquad y = \frac{1}{\sin\phi}$$

$$x = \frac{1}{y} \qquad z = \frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$\phi = \arcsin x$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\phi} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-1-\sqrt{\frac{1}{\sin^2\phi}-1}} = 2k_1\sqrt{s\lambda}\,(-i\tau) + C$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-1-\cot\phi} = 2k_1\sqrt{s\lambda}\,(-i\tau) + C$$

F/

$$\lambda^2 - 1 - \mathrm{cotan}\,\phi = \left(4k_1\sqrt{5\lambda}\,(-i\tau) + c\right)^2$$

$$\lambda^2 - 1 - \left(4k_1\sqrt{5\lambda}\,(-i\tau) + c\right)^2 = \mathrm{cotan}\,\phi$$

$$\phi = \mathrm{arccot}\left[\lambda^2 - 1 - \left(4k_1\sqrt{5\lambda}\,(-i\tau) + c\right)^2\right]$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\mathrm{arccot}\left(\lambda^2 - 1 - c^2\right) = 0$$

$$4k_1\sqrt{5\lambda} = \sqrt{16k_1k_2 5}$$

$$\lambda^2 - 1 - c^2 = -\pi/2$$

$$c^2 = \lambda^2 - 1 + \pi/2$$

$$\mathrm{arccot}\, X = \arccos \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}$$

инстантоны в мнимом времени $t = -i\tau$

$$\phi(0) = 0 \qquad \phi(\infty) = \pi$$

G/

$$\dot\phi \cos\theta = \dot\phi \sqrt{1 - \frac{1}{1-\lambda \sin^2\phi}}$$

$$= \dot\phi \sqrt{\frac{\cancel{1}-\lambda \sin^2\phi}{1-\lambda \sin^2\phi}} \qquad \frac{\sqrt{1-\lambda \sin^2\phi}}{\sqrt{1-\lambda \sin^2\phi}}$$

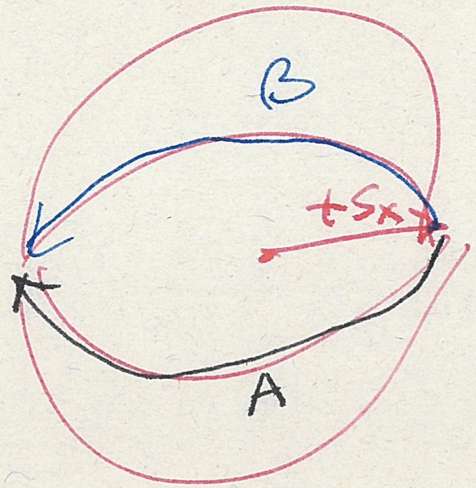
$$= \dot\phi \, \frac{1}{1-\lambda \sin^2\phi} \sqrt{-1} \qquad \frac{\dot\phi}{2k_1}$$

$$\sqrt{1-\lambda \sin^2\phi} = \frac{\dot\phi}{2k_1\sqrt{\lambda}\, \sin\phi}$$

$$= i(\dot\phi)^2\, 2k_1 \frac{1}{1-\lambda \sin^2\phi}$$

H/

вклад от двух разных траекторий туннелирования спина из $+S_x$ в $-S_x$



фаза:

$$\Omega = iS\int_0^\beta \dot\phi \, d\tau = iS\left(\phi(\beta)-\phi(0)\right)$$

для A: $\Omega_A = iS\pi$

для B: $\Omega_B = -iS\pi$

поэтому вероятность туннелирования

$$P_{+S_x\to -S_x} \propto \left(e^{iS\pi} + e^{-iS\pi}\right) e^{-\beta\langle E\rangle}$$

$$= 2|\cos(S\pi)|\, e^{-\beta\langle E\rangle}$$

энергия инстантонного пути

I/

⇒ если $s = \frac{1}{2}$ $\qquad P_{s_x \to -s_x} = 0$

$S = 1$ $\qquad P_{s_x \to -s_x} \neq 1$

⇒ фаза Берри участвует в правиле отбора возможности туннелировать между вырожденными состояниями

⇒ F.D.M. Haldane PRL 61, 1029 (1988)

Литература по туннелированию и инстантонному газу

Altland & Simons „Condensed Matter field theory"
Cambridge Univ Press