Задачи к лекции Вокруг Турбулентности

1. Разность скоростей в точках 1 и 2 может быть представлена в виде $|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = \xi r^{1/3}$, где r – расстояние между точками, а ξ – случайная величина, имеющая Гауссову функцию распределения вероятности

$$P = N^{-1} \exp[-(\xi - \xi_0)^2/D].$$

Здесь N – нормировочная константа

$$N = \int d\xi \ \exp[-(\xi - \xi_0)^2/D].$$

Найти структурные функции такой системы.

2. В неограниченной двумерной жидкости в начальный момент времени включается накачка, которая производит энергию ϵ на единицу массы. За счет этого постепенно формируется обратный каскад. Оценить зависимость от времени t максимального размера флуктуаций в обратном каскаде L. Оценить время, за которое сформируется стационарный (в статистическом смысле) обратный каскад, если коэффициент трения о дно равен α.

3. Вывести выражение для функции Грина

$$\mathcal{G} = \frac{1}{16\pi^2 z^2} \exp\left[\frac{i}{2z}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q})(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}) - z\int_0^1 d\chi \, |\chi \boldsymbol{q} + (1 - \chi)\boldsymbol{r}|^c\right],$$

определяющей эволюцию парной корреляционной функции амплитуды световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере. Здесь $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{Q}$ – двумерные векторы. Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\partial_z \mathcal{G} - 2i\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{R} \partial \boldsymbol{r}}\mathcal{G} + r^c \mathcal{G} = \delta(z)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q})\delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}),$$

и равна нулю при $z < 0$. Указание: произвести Фурье-преобразование по координате $\boldsymbol{R}$, решить получившееся уравнение методом характеристик и сделать обратное Фурье-преобразование.