

А. Задача

Найти асимптотику волновых функций и вырождение нулевой моды электрона со спином $1/2$ в произвольном магнитном поле, направленном по оси z . Гамильтониан есть

$$\hat{H} = \hat{\Pi}_\perp^2 - eB(x, y)\sigma_z, \quad (1)$$

где $\hat{\Pi}_\perp = \hat{p}_\perp - eA_\perp(x, y)$, $\perp = (x, y)$, было выбрано $\hbar = c = 2m = 1$, а магнитное поле дано

$$\frac{1}{ie}[\Pi_x, \Pi_y] = B(x, y) = \partial_x A_y(x, y) - \partial_y A_x(x, y), \quad (2)$$

где векторный потенциал $A(x, y)$ отвечает произвольному магнитному полю (не постоянному, как это бывает обычно),

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Нулевая мода даётся уравнением $\hat{H}\psi(x, y) = 0$. Представить это уравнение в виде $\hat{L}^\dagger \hat{L}\psi = 0$, где \hat{L} дифференциальный оператор. Использовать условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y = 0 \quad (4)$$

для удобного представления вектора \mathbf{A} , функцию Грина двумерного уравнения Лапласа, а также ввести понятие полного потока магнитного поля через образец,

$$\int B(x, y) dx dy = \Phi = \frac{2\pi}{e} N, \quad (5)$$

где N - количество квантов магнитного потока, при нахождении волновых функций нулевой моды.

Вопрос 1. Напишите уравнение движения Ландау-Лифшица.

Вопрос 2. Напишите полуклассические уравнения движения электрона с учётом фазы Берри в импульсном пространстве.