

# Задачи и вопросы к экзамену

**Вопрос 1.** Что такое белый шум и чем обусловлена универсальность этой модели? Как устроены его корреляционные функции?

**Вопрос 2.** Что описывают уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка? Запишите их для одномерного движения броуновских частиц с коэффициентом диффузии  $D = k_B T / \gamma$  в потенциальном поле  $V(x) = \alpha x^2 \geq 0$ , где  $1/\gamma$  – подвижность частиц, а  $T$  – температура окружающей среды. Не проводя никаких вычислений, что вы можете сказать про стационарную функцию распределения броуновских частиц?

**Задача 1.** Рассмотрим частицу, совершающую движение на плоскости с постоянной по модулю скоростью  $v_0$ . Угол отклонения  $\phi$  мгновенной скорости частицы от направления оси  $X$  является стохастической переменной и описывается уравнением

$$\dot{\phi} = \xi(t), \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  – гауссов шум с нулевым средним и парной корреляционной функцией  $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D\delta(t_2 - t_1)$ . Кроме того, угол  $\phi$  случайным образом сбрасывается к исходному нулевому значению  $\phi(0) = 0$  со средней частотой  $r$ . Сброс угла к нулевому значению может быть описан на языке уравнения Фоккера-Планка как

$$\partial_t P = D\partial_\phi^2 P - rP + r\delta(\phi). \quad (2)$$

1. Решите уравнение Фоккера-Планка и вычислите среднее смещение частицы в горизонтальном направлении  $\langle x(t) \rangle$  в произвольный момент времени  $t$ . Проанализируйте полученный результат в пределе  $t \rightarrow \infty$  и определите среднюю скорость дрейфа частицы вдоль оси  $X$  в установившемся режиме.
2. Проведите численное моделирование рассматриваемой системы. Сгенерируйте большое число стохастических траекторий, а затем проведите по ним усреднение для нахождения  $\langle x(t) \rangle$ . Сравните результат с аналитическим ответом при различных параметрах системы.

**Указание:** промежутки времени  $T \geq 0$  между двумя последовательными сбросами угла являются случайными величинами, имеющими функцию распределения  $\rho(T) = r \exp(-rT)$ .