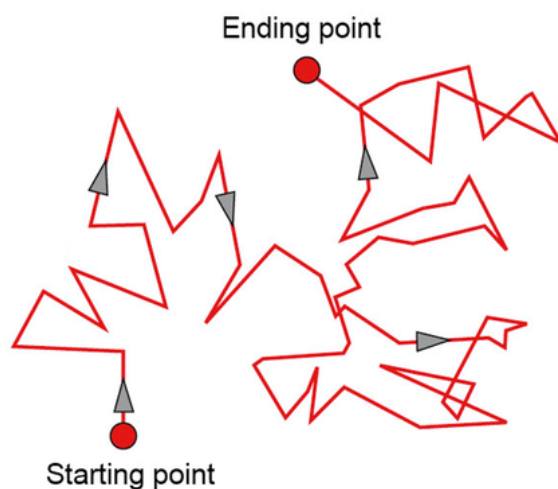


Тепловое и активное броуновское движение



Случайное блуждание микроскопических частиц, обусловленное тепловым движением молекул окружающей среды, может быть описано с помощью стохастического дифференциального уравнения Ланжевена. Мы познакомимся с этим подходом и воспроизведем известные результаты, характеризующие тепловое броуновское движение. Затем мы рассмотрим простейшее обобщение на случай активной броуновской частицы. В рамках модели частица будет двигаться с постоянной скоростью, но направление ее движения будет изменяться стохастическим образом. Мы обсудим характер движения активной частицы и определим его некоторые статистические характеристики.

Список литературы:

1. David Tong, "Lectures on Kinetic Theory", [Chapter 3: Stochastic Processes](#).
2. Urna Basu, Satya N. Majumdar, Alberto Rosso, and Grégory Schehr, "Active Brownian motion in two dimensions", [PRE 98, 062121 \(2018\)](#).

Тепловое и активное броуновское движение

[Введение](#)

[Уравнение Ланжевена](#)

[Диффузия в сильно вязкой среде](#)

[Уравнение Фоккера–Планка](#)

[Распределение Больцмана](#)

[Активная броуновская частица](#)

[Приложение: свойства дельта-функции](#)

Введение

Всем нам хорошо знакомо броуновское движение – случайное дрожание микроскопических частиц, помещенных в жидкость или газ. Известно, что это движение обусловлено столкновениями с молекулами окружающей среды вследствие их теплового движения. Цель предстоящей лекции – представить математический формализм, который позволяет моделировать такое случайное поведение.

Уравнение Ланжевена

Движение микроскопической частицы массы m происходит в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma\dot{\vec{x}} + \vec{F}. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает вязкую силу трения, пропорциональную скорости частицы, а второй член учитывает влияние остальных внешних сил. Коэффициент сопротивления γ определяется динамической вязкостью среды η и формой частицы. Например, для сферической частицы радиуса a коэффициент сопротивления $\gamma = 6\pi\eta a$ (формула Стокса). Обратная величина $1/\gamma$ называется *подвижностью* частицы. Это название обусловлено тем, что в случае постоянной силы $\vec{F}$ стационарное решение уравнения движения соответствует движению частицы с постоянной скоростью $\dot{\vec{x}} = \vec{F}/\gamma$.

Оставшуюся внешнюю силу $\vec{F}$ мы представим в виде суммы двух членов

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{x}) + \vec{f}(t). \quad (2)$$

Первое слагаемое соответствует некоторому постоянному потенциальному полю, в котором частица движется. Это может быть поле силы тяжести или поле электростатических сил, если наша частица заряжена. Эти силы хорошо определены и в них нет ничего случайного. Второе слагаемое напротив представляет из себя случайную силу, которую частица испытывает из-за столкновений с молекулами окружающей среды. Часто этот вклад называют *шумом*. Именно благодаря шуму траектории броуновских частиц выглядят хаотическими. Мы будем считать, что интенсивность шума не зависит от положения частицы в пространстве. Существуют обобщения и на более сложные системы (мультипликативный шум, зависящий от координат, и внешняя сила, зависящая от времени), но они выходят за рамки текущей лекции.

В итоге уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma\dot{\vec{x}} - \nabla V(\vec{x}) + \vec{f}(t). \quad (3)$$

Его особенность состоит в том, что явный вид зависимости $\vec{f}(t)$ нам не известен. Возможны различные реализации случайной силы $\vec{f}(t)$, которые будут приводить к различным траекториям броуновской частицы. Дифференциальные уравнения такого типа называют уравнениями Ланжевена. Для стохастических систем такого типа возникает естественный запрос на статистическое описание. Типичная постановка задачи выглядит так: зная статистические характеристики случайного шума (например, что его среднее значение равно нулю), определить статистические характеристики движения броуновских частиц (например, найти среднее значение координаты). В дальнейшем усреднение по реализациям шума мы будем обозначать угловыми скобками $\langle \dots \rangle$.

Диффузия в сильно вязкой среде

Упростим задачу – будем считать, что потенциал внешних сил $V = 0$, а также будем предполагать, что наша частица имеет малую массу и/или движение происходит в сильно вязкой среде. Тогда случайная сила, действующая на частицу, будет уравниваться вязкой силой трения, а не слагаемым с ускорением. Другими словами, мы будем рассматривать уравнение

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\xi}(t), \quad (4)$$

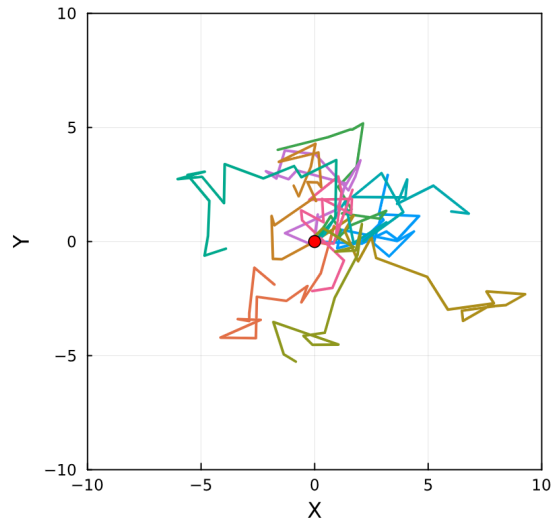
где $\vec{\xi}(t) \equiv \vec{f}(t)/\gamma$. Это уравнение можно проинтегрировать по времени и записать формальное решение

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \int_0^t dt' \vec{\xi}(t'). \quad (5)$$

Далее, нам нужно задать статистические свойства $\vec{\xi}(t)$. Наше первое предположение будет состоять в том, что среднее значение шума в любой момент времени равно нулю

$$\langle \vec{\xi}(t) \rangle = 0. \quad (6)$$

Тогда, усредняя соотношение (5) по статистике шума, мы находим $\langle \vec{x}(t) \rangle = \vec{x}(0)$. Подчеркнем, что этот результат не означает, что частица неподвижна. Она движется, но если мы повторим эксперимент много раз, помещая частицу каждый раз в точку $\vec{x}(0)$, а потом усредним по всем реализациям шума/траекториям, то обнаружим, что среднее значение координаты частицы совпадает с исходной точкой.



Про это еще можно думать в других терминах. Представим, что в начальный момент времени у нас есть ансамбль частиц в точке с координатой $\vec{x}(0)$, причем на каждую из частиц действует свой шум, никак не скоррелированный с шумом, который действует на другие частицы. Тогда облако частиц будет со временем расползаться, но его центр масс будет совпадать с исходной точкой.

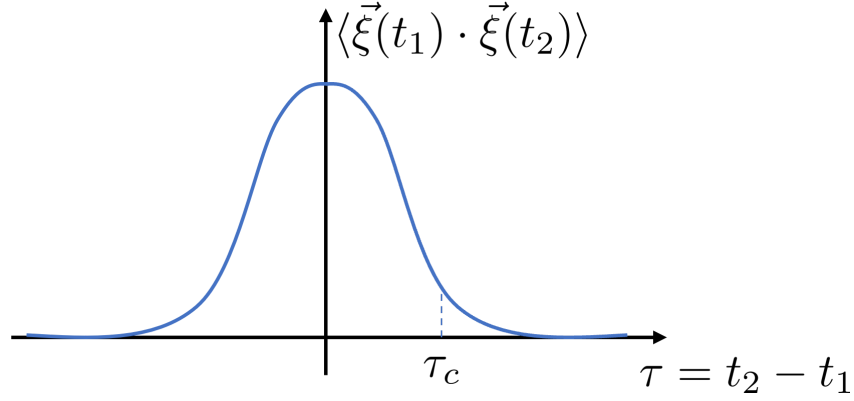
Чтобы определить типичное смещение частицы (или размер облака), нам следует вычислить величину

$$\langle [\vec{x}(t) - \vec{x}(0)]^2 \rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle \vec{\xi}(t') \cdot \vec{\xi}(t'') \rangle, \quad (7)$$

где мы снова воспользовались соотношением (5). Эта величина определяется парной корреляционной функцией шума $\langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle$. Латинские индексы могут принимать значения $\{x, y, z\}$ и обозначают соответствующие направления в пространстве. Парная корреляционная функция описывает насколько согласованно действие шума в различные моменты времени.

Во многих случаях, которые представляют интерес, толчки, связанные с шумом, можно считать быстрыми и независимыми. Пусть столкновение микроскопической частицы с молекулой окружающей среды происходит за характерное время τ_c . Тогда, если нас интересуют времена $|t_2 - t_1| \leq \tau_c$, то значения шума $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ будут взаимосвязаны между собой, поскольку они вызываются одним и тем же физическим процессом. Однако, если мы переходим к временам $|t_2 - t_1| \gg \tau_c$, то эти корреляции исчезают, поскольку внешняя сила, действующая на нашу частицу в эти моменты времени, будет вызвана столкновениями с различными молекулами. Поскольку рассматриваемая система однородна во времени, то значение корреляционной функции

$\langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle$ будет зависеть только от разности времен $\tau = t_2 - t_1$. Схематичный график этой зависимости показан ниже.



То, что столкновения происходят быстро означает, что нас интересует предел $\tau_c \rightarrow 0$. В этом случае корреляционную функцию шума можно заменить на дельта-функцию

$$\langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t_2 - t_1), \quad (8)$$

где коэффициент D – это некоторая константа, которая описывает интенсивность случайного внешнего воздействия, а дельта-символ Кронекера δ_{ij} означает отсутствие корреляций у ударов в различных направлениях. Наше предположение по сути означает, что окружающая среда релаксирует к своему положению равновесия гораздо быстрее, чем изучаемая микроскопическая частица. Пока она пытается отреагировать на предыдущий удар, окружение успевает забыть все, что было раньше, и наносит новый удар столь же случайный, как и в первый раз.

Теперь мы готовы вычислить интегралы в выражении (7). Окончательный результат для трехмерного пространства имеет вид

$$\langle [\vec{x}(t) - \vec{x}(0)]^2 \rangle = 6Dt, \quad (9)$$

то есть среднеквадратичное смещение частицы растет пропорционально $\sqrt{t}$. Такое поведение называют диффузионным, причем константа D имеет специальное название – *коэффициент диффузии*.

Из приведенного рассмотрения ясно, что величины более высокого порядка (например, $\langle [\vec{x}(t) - \vec{x}(0)]^4 \rangle$) определяются корреляционными функциями шума соответствующего порядка, и их необходимо определить явным образом. В дальнейшем мы будем предполагать, что шум обладает гауссовой статистикой с нулевым средним. Эта модель случайного воздействия универсальна. Действительно, если динамика нашей частицы медленная в сравнении с шумом, то любое ее заметное смещение обусловлено столкновениями с большим числом

окружающих молекул. Как бы ни был устроен каждый отдельный удар, суммарный эффект от взаимодействия с большим числом молекул должен характеризоваться распределением Гаусса в силу центральной предельной теоремы. Формально это означает, что, во-первых, произведения вида $\langle \xi_i(t_1)\xi_j(t_2)\xi_k(t_3)\dots \rangle$, содержащие нечетное число сомножителей, равны нулю, а во-вторых, что произведения с четным числом сомножителей выражаются через сумму всех возможных произведений парных корреляционных функций. Например,

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t_1)\xi_j(t_2)\xi_k(t_3)\xi_l(t_4) \rangle = & \langle \xi_i(t_1)\xi_j(t_2) \rangle \langle \xi_k(t_3)\xi_l(t_4) \rangle + \\ & \langle \xi_i(t_1)\xi_k(t_3) \rangle \langle \xi_j(t_2)\xi_l(t_4) \rangle + \langle \xi_i(t_1)\xi_l(t_4) \rangle \langle \xi_j(t_2)\xi_k(t_3) \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Шум, который коротко коррелирован во времени (8), имеет нулевое среднее значение и обладает свойством типа (10) называется *белым шумом*. В силу своей универсальности и простоты эта модель случайного воздействия находит широкое применение в различных областях.

Упражнение 1. Броуновская частица совершает одномерное движение в сильно вязкой среде, ее коэффициент диффузии равен D . В начальный момент времени частица находилась в начале координат. Найдите $\langle x^4(t) \rangle$.

Уравнение Фоккера-Планка

Выше мы продемонстрировали как можно вычислять моменты случайной величины $\vec{x}(t)$ – положения броуновской частицы в заданный момент времени. Теперь мы покажем, как можно найти функцию распределения этой величины $P(\vec{x}, t)$. Формально мы можем записать

$$P(\vec{x}, t) = \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi(t)) \rangle, \quad (11)$$

где $\vec{x}_\xi(t)$ – это решение уравнения Ланжевена для конкретной реализации шума (одна из возможных траекторий), а угловые скобки обозначают усреднение по всем возможным реализациям шума/траекториям.

Рассмотрим изменение функции распределения за время Δt , которое мало по сравнению с характерным временем эволюции броуновской частицы, но велико по сравнению с временем корреляции шума τ_c . Тогда, в соответствии с определением,

$$P(\vec{x}, t + \Delta t) - P(\vec{x}, t) = \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi - \Delta \vec{x}_\xi) \rangle - \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi) \rangle, \quad (12)$$

где $\Delta\vec{x}_\xi$ – изменение координаты частицы за время Δt . Для уравнения Ланжевена (4), находим

$$\Delta\vec{x}_\xi = \int_t^{t+\Delta t} dt' \vec{\xi}(t'). \quad (13)$$

Далее, разложим первую дельта-функцию в ряд Тейлора по малому приращению координаты

$$\begin{aligned} \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi - \Delta\vec{x}_\xi) \rangle &= \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi) \rangle - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi) \Delta x_\xi^i \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}_\xi) \Delta x_\xi^i \Delta x_\xi^j \rangle + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь мы удержали члены до второго порядка включительно. Теперь выполним усреднение по статистике шума. Важно отметить, что усреднение величины Δx_ξ^i происходит по реализациям шума в моменты времени $[t, t + \Delta t]$, в то время как усреднение дельта-функции происходит на промежутке до момента времени t . Поскольку интервал Δt намного больше, чем время τ_c корреляции шума, то эти усреднения независимы друг от друга. Используя соотношения $\langle \Delta\vec{x}_\xi \rangle = 0$ и

$$\langle \Delta x_\xi^i \Delta x_\xi^j \rangle = \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t+\Delta t} dt_2 \langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = 2D\delta_{ij}\Delta t, \quad (15)$$

находим

$$P(\vec{x}, t + \Delta t) - P(\vec{x}, t) = D\nabla^2 P(\vec{x}, t) \cdot \Delta t + \dots \quad (16)$$

Отметим, что члены третьего порядка в ряде Тейлора при усреднении дадут нулевой вклад, а вклад от слагаемых четвертого порядка будет пропорционален $\propto (\Delta t)^2$.

Теперь нам осталось разделить обе части полученного выражения на Δt и перейти к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, чтобы получить хорошо знакомое уравнение диффузии

$$\partial_t P(\vec{x}, t) = D\nabla^2 P(\vec{x}, t). \quad (17)$$

В силу линейности решение этого уравнения в неограниченном пространстве может быть записано с помощью функции Грина (покажите это самостоятельно, решив уравнение в Фурье-пространстве с произвольным начальным условием и выполнив обратное преобразование Фурье)

$$P(\vec{x}, t) = \int d\vec{x}' G(\vec{x} - \vec{x}', t) P(\vec{x}', 0), \quad (18)$$

где функция Грина

$$G(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{4\pi Dt} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\vec{x}^2}{4Dt} \right) \quad (19)$$

описывает эволюцию функции распределения частицы, которая в момент времени $t = 0$ находилась в начале координат, $P(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x})$.

Распределение Больцмана

Проделанный выше анализ можно обобщить на случай движения броуновской частицы в стационарном потенциальном поле. Для простоты рассмотрим одномерное движение. В этом случае уравнение Ланжевена имеет вид

$$\dot{x} = -V'(x)/\gamma + \xi(t), \quad (20)$$

где штрих обозначает производную по координате. Для приращения координаты частицы за малое время Δt можно записать

$$\Delta x_\xi \approx -\frac{V'(x_\xi)}{\gamma} \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} dt' \xi(t'), \quad (21)$$

где мы воспользовались тем, что координата частицы изменяется за время Δt на малую величину. Подставим этот результат в выражение (14). Квадратичное по Δx_ξ слагаемое останется фактически без изменений, поскольку поправка, связанная с внешним потенциалом, даст вклад пропорциональный $(\Delta t)^2$. А вот линейное слагаемое произведет новый вклад

$$\frac{\Delta t}{\gamma} \cdot \langle \delta'(x - x_\xi) V'(x_\xi) \rangle = \frac{\Delta t}{\gamma} \cdot \partial_x \langle \delta(x - x_\xi) V'(x) \rangle = \frac{\Delta t}{\gamma} \cdot \partial_x (P(x, t) V'(x)). \quad (22)$$

При преобразовании этого выражения мы воспользовались свойствами дельта-функции, которые обсуждаются в приложении. В итоге уравнение Фоккера-Планка приобретет вид

$$\partial_t P(x, t) = \partial_x \left(P(x, t) \frac{V'(x)}{\gamma} \right) + D \partial_x^2 P(x, t). \quad (23)$$

Отметим, что в отсутствии шума $D = 0$, а скорость частицы $\dot{x} = v = -V'(x)/\gamma$. В этом случае уравнение Фоккера-Планка совпадает с уравнением непрерывности $\partial_t P + \text{div}(\vec{v}P) = 0$, которое вам хорошо знакомо.

Найдем теперь стационарное решение уравнения (23), предполагая, что функция распределения и ее производные стремятся к нулю на бесконечности. Приравнивая к нулю правую часть выражения (23) и интегрируя полученное соотношение, находим

$$P(x) = C \exp\left(-\frac{V(x)}{\gamma D}\right). \quad (24)$$

Константа C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1. \quad (25)$$

Этот результат должен совпадать с распределением Больцмана $P(x) \propto e^{-V(x)/k_B T}$, знакомым вам из курса общей физики. Сравнивая ответы друг с другом, можно установить соотношение Эйнштейна

$$D = \frac{k_B T}{\gamma}. \quad (26)$$

Здесь интересны две особенности. Во-первых, мы получили, что интенсивность шума и коэффициент диффузии пропорциональны температуре, что логично, поскольку броуновское движение обусловлено тепловым движением молекул. Во-вторых, мы увидели, что коэффициент диффузии связан с коэффициентом сопротивления среды γ . Это обусловлено тем, что на микроскопическом уровне оба процесса обусловлены столкновениями с молекулами окружающей среды. Соотношение Эйнштейна является частным случаем флуктуационно-диссипационной теоремы. На качественном уровне она выражает тот факт, что случайные силы и сила трения имеют одинаковую природу – тепловую.

Теперь мы можем переписать выражение (9) для среднеквадратичного смещения сферической частицы радиуса a , изначально помещенной в начало координат, в виде

$$\langle \vec{x}^2 \rangle = \frac{k_B T}{\pi \eta a} t, \quad (27)$$

где мы воспользовались формулой Стокса $\gamma = 6\pi\eta a$. Полученный результат позволяет экспериментально определить константу Больцмана k_B . Такой эксперимент был проведен в 1909 году французским физиком Жаном Перреном, за что он был награжден Нобелевской премией в 1926 году.

Упражнение 2. Рассмотрите одномерное движение броуновской частицы с коэффициентом диффузии $D = k_B T / \gamma$ в потенциальном поле $V(x) = \alpha x^2$, где $1/\gamma$ – подвижность частицы, а T – температура окружающей среды. Запишите уравнение Фоккера–Планка и найдите его стационарное решение.

Активная броуновская частица

В последнее время большое внимание привлекают исследования, направленные на изучение активной материи. Речь идет про неравновесные среды, состоящие из большого числа агентов, которые постоянно потребляют энергию и за счет этого все время находятся в движении. В качестве примеров можно привести стаи птиц, стада животных или суспензии бактерий. За счет взаимодействия между различными агентами в таких системах при определенных условиях может наблюдаться коллективное синхронное поведение. Описание коллективных явлений выходит за рамки нашей лекции, но мы познакомимся с простейшей моделью агента – активной броуновской частицей.

Рассмотрим частицу, совершающую движение на плоскости с постоянной по модулю скоростью v_0 . Угол отклонения ϕ мгновенной скорости частицы от направления оси X изменяется стохастическим образом и описывается уравнением

$$\dot{\phi} = \xi(t), \quad (28)$$

где $\xi(t)$ – гауссов шум с нулевым средним и парной корреляционной функцией $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D\delta(t_2 - t_1)$. Уравнения движения частицы имеют вид

$$\dot{x} = v_0 \cos \phi, \quad \dot{y} = v_0 \sin \phi, \quad (29)$$

и их необходимо дополнить начальными условиями. Для простоты выберем систему координат так, чтобы $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ и $\phi(0) = 0$.

Определим средние значения координат частицы в произвольный момент времени. Из соображений симметрии понятно, что $\langle y \rangle = 0$, так как направление "вверх" ничем не отличается от направления "вниз". Что касается $\langle x \rangle$, то здесь симметрия нарушена: в начальный момент времени частица движется "вправо". Для нахождения $\langle x \rangle$ проинтегрируем уравнение движения и усредним результат по реализациям шума

$$\langle x \rangle = v_0 \int_0^t dt' \langle \cos \phi(t') \rangle. \quad (30)$$

Среднее значение косинуса угла ϕ можно найти, если знать его функцию распределения $P(\phi, t)$. Этот объект должен удовлетворять уравнению Фоккера-Планка

$$\partial_t P = D \partial_\phi^2 P, \quad P(\phi, 0) = \delta(\phi). \quad (31)$$

Его решение имеет вид распределения Гаусса

$$P(\phi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{4Dt}\right), \quad (32)$$

и здесь мы считаем, что переменная ϕ изменяется в пределах от $(-\infty, +\infty)$. Теперь мы можем вычислить

$$\langle \cos \phi(t') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \cos \phi P(\phi, t') = e^{-Dt'}, \quad (33)$$

поэтому

$$\langle x \rangle = v_0 \int_0^t dt' e^{-Dt'} = \frac{v_0}{D} (1 - e^{-Dt}). \quad (34)$$

На малых временах $Dt \ll 1$ движение происходит баллистическим образом $\langle x \rangle \approx v_0 t$, а на больших временах $Dt \gg 1$ среднее значение координаты выходит на константу $\langle x \rangle \approx v_0/D$. За время порядка $1/D$ угол ϕ успевает забыть свое начальное положение $\phi(0) = 0$ и становится случайным, но за это время частица успевает переместиться на некоторое расстояние вдоль оси X .

Несколько сложнее вычислить средний квадрат смещения частицы, $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$. Интегрируя уравнения движения, находим

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= v_0^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \cos \phi(t_1) \cos \phi(t_2) + \sin \phi(t_1) \sin \phi(t_2) \rangle = \\ &= v_0^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \cos(\phi(t_1) - \phi(t_2)) \rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, нам сперва предстоит усреднить функцию, которая зависит от значения углов $\phi_1 = \phi(t_1)$ и $\phi_2 = \phi(t_2)$ в различные моменты времени. Формально, мы можем записать

$$\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_2 P(\phi_2, t_2; \phi_1, t_1 | \phi(0) = 0) \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad (36)$$

где $P(\phi_2, t_2; \phi_1, t_1 | \phi(0) = 0)$ описывает плотность вероятности того, что в момент времени t_1 значение угла равно ϕ_1 , в момент времени t_2 – значение равно ϕ_2 , и все это при условии, что в начальный момент значение угла было равно нулю. Пусть для определенности $t_2 > t_1$, тогда мы можем записать

$$P(\phi_2, t_2; \phi_1, t_1 | \phi(0) = 0) = P(\phi_1, t_1 | \phi(0) = 0) P(\phi_2, t_2 | \phi(t_1) = \phi_1). \quad (37)$$

Первый множитель мы находили ранее, смотри выражение (32), второй множитель может быть найден аналогично в силу однородности уравнений

$$P(\phi_2, t_2 | \phi(t_1) = \phi_1) = P(\phi_2 - \phi_1, t_2 - t_1 | \phi(0) = 0). \quad (38)$$

В итоге получаем

$$P(\phi_2, t_2; \phi_1, t_1 | \phi(0) = 0) = \frac{1}{4\pi D \sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \exp \left(-\frac{\phi_1^2}{4Dt_1} - \frac{(\phi_2 - \phi_1)^2}{4D(t_2 - t_1)} \right) \quad (39)$$

при условии $t_2 > t_1$, и после несложного интегрирования находим

$$\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle = e^{-D|t_2 - t_1|}. \quad (40)$$

В последней формуле мы поставили знак модуля, и теперь она справедлива также и для случая $t_1 \geq t_2$, который может быть рассмотрен аналогично. В итоге получаем окончательный ответ

$$\langle r^2 \rangle = v_0^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 e^{-D|t_2 - t_1|} = \frac{2v_0^2}{D^2} (Dt - 1 + e^{-Dt}). \quad (41)$$

На малых временах $Dt \ll 1$, как и следовало ожидать, движение баллистическое $\langle r^2 \rangle \approx v_0^2 t^2$. В противоположном случае $Dt \gg 1$ получаем диффузионный режим $\langle r^2 \rangle \approx 2v_0^2 t / D$.

Задача 1. Рассмотрим частицу, совершающую движение на плоскости с постоянной по модулю скоростью v_0 . Угол отклонения ϕ мгновенной скорости частицы от направления оси X является стохастической переменной и описывается уравнением

$$\dot{\phi} = \xi(t), \quad (42)$$

где $\xi(t)$ – гауссов шум с нулевым средним и парной корреляционной функцией $\langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = 2D\delta(t_2 - t_1)$. Кроме того, угол ϕ случайным образом сбрасывается к исходному нулевому значению $\phi(0) = 0$ со средней частотой r . В этом случае появляется дрейф частицы вдоль оси X . Определите среднюю скорость дрейфа в установившемся режиме.

Указание: сброс угла к нулевому значению может быть описан на языке уравнения Фоккера–Планка следующим образом:

$$\partial_t P = D\partial_\phi^2 P - rP + r\delta(\phi). \quad (43)$$

Приложение: свойства дельта-функции

В этом разделе мы напомним некоторые свойства дельта-функции и ее производной, которые были использованы при выводе уравнения Фоккера–Планка. Поскольку значение $\delta(x - x_0)$ отлично от нуля только при $x = x_0$, то для любой непрерывной функции $f(x)$ справедливо соотношение

$$\delta(x - x_0)f(x) = \delta(x - x_0)f(x_0). \quad (44)$$

Правила обращения с производной от дельта-функции $\delta'(x - x_0)$ можно установить с помощью интегрирования по частям

$$\int dx \delta'(x - x_0)f(x) = -f'(x_0). \quad (45)$$

Рассмотрим частный случай $f(x) = (x - x_0)g(x)$, тогда

$$\int dx \delta'(x - x_0)(x - x_0)g(x) = -g(x_0), \quad (46)$$

откуда в силу произвольности функции $g(x)$ следует, что

$$(x - x_0)\delta'(x - x_0) = -\delta(x - x_0), \quad x\delta'(x) = -\delta(x). \quad (47)$$

Теперь рассмотрим произведение $\delta'(x - x_0)f(x)$, в котором разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и воспользуемся свойствами (47) и (44)

$$\delta'(x - x_0)f(x) = \delta'(x - x_0)f(x_0) - f'(x_0)\delta(x - x_0). \quad (48)$$

В последнем слагаемом в силу свойства (44) можно заменить $f'(x_0)$ на $f'(x)$, и в итоге мы получаем

$$\delta'(x - x_0)f(x_0) = \partial_x[\delta(x - x_0)f(x)]. \quad (49)$$

Это соотношение было использовано при выводе выражения (22).