

Задачи и вопросы к экзамену

Упражнение 1. Броуновская частица совершает одномерное движение в сильно вязкой среде, ее коэффициент диффузии равен D . В начальный момент времени частица находилась в начале координат. Найдите $\langle x^4(t) \rangle$.

Упражнение 2. Рассмотрите одномерное движение броуновской частицы с коэффициентом диффузии $D = k_B T / \gamma$ в потенциальном поле $V(x) = \alpha x^2$, где $1/\gamma$ – подвижность частицы, а T – температура окружающей среды. Запишите уравнение Фоккера-Планка и найдите его стационарное решение.

Задача 1. Рассмотрим частицу, совершающую движение на плоскости с постоянной по модулю скоростью v_0 . Угол отклонения ϕ мгновенной скорости частицы от направления оси X является стохастической переменной и описывается уравнением

$$\dot{\phi} = \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ – гауссов шум с нулевым средним и парной корреляционной функцией $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D\delta(t_2 - t_1)$. Кроме того, угол ϕ случайным образом сбрасывается к исходному нулевому значению $\phi(0) = 0$ со средней частотой r . В этом случае появляется дрейф частицы вдоль оси X . Определите среднюю скорость дрейфа в установившемся режиме.

Указание: сброс угла к нулевому значению может быть описан на языке уравнения Фоккера-Планка следующим образом:

$$\partial_t P = D\partial_\phi^2 P - rP + r\delta(\phi). \quad (2)$$