

# Квантовые магнетики и спиновые жидкости: задачи о скрытом порядке.

Теорема Нернста (она же - 3-е начало термодинамики) сообщает, что энтропия большой системы в расчете на одну частицу должна быть равна нулю при температуре, стремящейся к абсолютному нулю. Если это система локализованных магнитных моментов (спинов) то обычно при низких температурах они выстраиваются упорядоченно: все параллельно (ферромагнетик) или антипараллельно через один (антиферромагнетик). Но иногда никакого упорядочения не наблюдается до самых низких достигнутых температур. Такие состояния вещества обобщенно называются «спиновая жидкость». Их полная теория еще не создана, но кое-что из того, что удалось уже понять, будет рассказано на этой лекции.

# Общее свойство:

Нарушение симметрии ведёт к увеличению «степени упорядоченности» - т.е. к уменьшению ЭНТРОПИИ

При  $T=0$  энтропия = 0:  
«теорема Нернста» или  
3-й закон термодинамики

# Квантовый «скрытый порядок»

- Вопрос: может ли так быть, что энтропия = 0, без нарушения симметрии ?
- Ответ: да. Это бывает в системах, называемых

## «СПИНОВЫЕ ЖИДКОСТИ»

Здесь, если и есть какое-то нарушение симметрии, его очень трудно выявить - что полезно для создания *квантового компьютера*

# Магнитный порядок

- Ферромагнетик:  $E = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$

$S_i$  - вектор «спина» (магнитного момента) в  $i$ -ом узле

$J > 0$ : энергия минимальна для

При температурах  $T < T_c$   $\langle S_i \rangle \neq 0$  -

Нарушение симметрии !

А какой именно?

1.  $S = +1$  или  $-1$  «модель Изинга»  $Z_2$
2.  $\mathbf{s} = (S_x, S_y)$  XY – модель  $O(2)$
3.  $\mathbf{s} = (S_x, S_y, S_z)$  магнетик Гейзенберга  $O(3)$

## Магнитный порядок -2

- Антиферромагнетики  $E = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$

$S_i$  - вектор «спина» (магнитного момента) в  $i$ -  
ом узле  $J < 0$ : энергия минимальна для

“staggered” конфигурации  $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$

Определим  $\sigma_k = (-1)^k S_k$  и получим

$$E = -|J| \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad ???$$

Да, но лишь для “bipartite” решеток

# АФМ на квадратной решетке

↑ ↓ ↑ ↓ ↑

**Изменение симметрии решетки:**

↓ ↑ ↓ ↑ ↓

**удвоение периода**

↑ ↓ ↑ ↓ ↑

**Кроме того, нарушение**

**$O(2)$  или  $O(3)$  вращений**

## АФМ на треугольной решетке ?

↑   ↓

**Неизвестно, где минимум**

**E :**

**?**

**«фрастрация»**

**В результате возникают «экзотические» фазы вещества  
- стекла, спиновые жидкости...**

# Главные вопросы:

- Как описать основное состояния ( $T=0$ ) ?
- Какова статистика и спектр возбуждений над основным состоянием ?
  - бозоны или фермионы ?
  - есть ли в спектре возбуждений сколь угодно низкие энергии ?

# Снова о ферромагнетике

## 1. Модель Гейзенберга

$$H = -J \sum_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

$$|GS\rangle = |++++++\rangle$$

Это точное основное состояния!

$$|k\rangle = \sum_j \exp(ikj) S^- |GS\rangle \quad \text{Магنون с импульсом } \mathbf{k}$$

Энергия магнона:  $E(k) = J(0) - J(k) \sim J (ka)^2$

Спин магнона = 1 потому что оператор  $S^-$  понижает спин состояния на единицу



## 2. Модель XY - симметрия O(2)

$$H = -J \sum_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + D \sum_i (S_i^z)^2$$

**Точное** основное состояния не известно, но есть хорошее приближение при  $S \gg 1$

Возбуждение - магнон с импульсом  $\mathbf{k}$

Энергия магнона:  $E(\mathbf{k}) = [D(J(0) - J(\mathbf{k}))]^{1/2} \sim (DJ)^{1/2} (ka)$

Спин магнона = 1 потому что оператор  $S^-$  понижает спин состояния на единицу

# Антиферромагнетик Гейзенберга

$$H = + J \sum_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

**Точное** основное состояния не известно, но есть хорошее приближение при  $S \gg 1$

Надо ввести  $\sigma = \mathbf{S} (-1)^{i+k}$  и записать разложение по магнонам для  $\sigma$

Возбуждение – АФМ магнон с импульсом  $\mathbf{k}$

Энергия АФМ магнона:  $E(\mathbf{k}) = [J(0)(J(0) - J(\mathbf{k}))]^{1/2} \sim J(ka)$

Спин магнона = 1 потому что оператор  $S^-$  понижает спин состояния на единицу

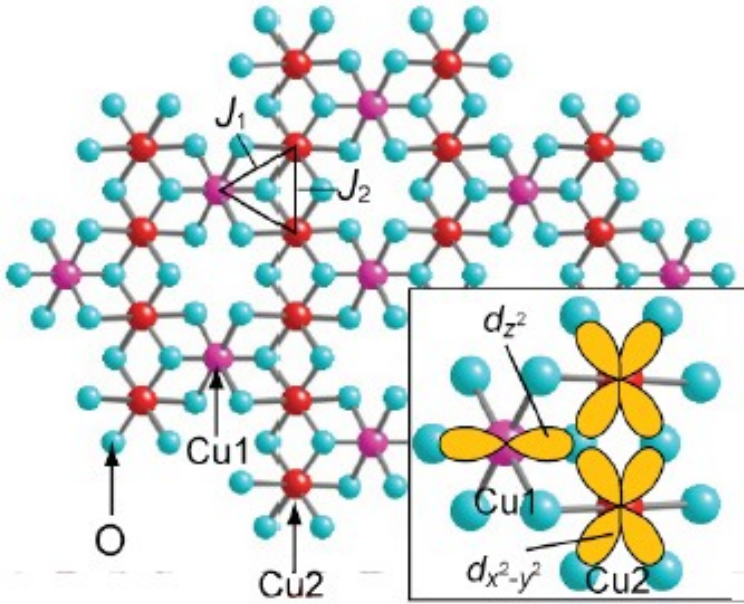
# Может ли быть иначе ?

- Еще в 1928 г. P.Jordan & E.Wigner предложили математическое преобразование гамильтониана **1-мерной** спиновой цепочки к представлению через фермиевские операторы
- И.Я.Померанчук, ЖЭТФ (1941) – впервые высказал гипотезу о том, что парамагнитный диэлектрик может иметь возбуждения со спином  $\frac{1}{2}$
- P.W.Anderson (1973) - модель “резонансных валентных связей” для основного состояния треугольной решетки с АФМ взаимодействием

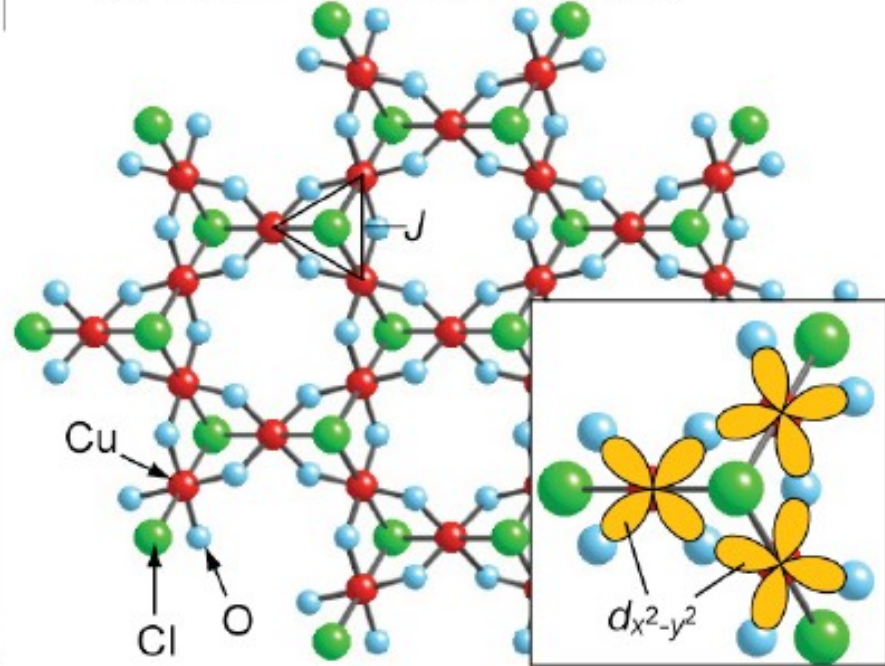
# Примеры из жизни: странные магнитные диэлектрики

# Попытка АФМ на решетке кагоме

(a) Volborthite  $\text{Cu}_3\text{V}_2\text{O}_7(\text{OH})_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$

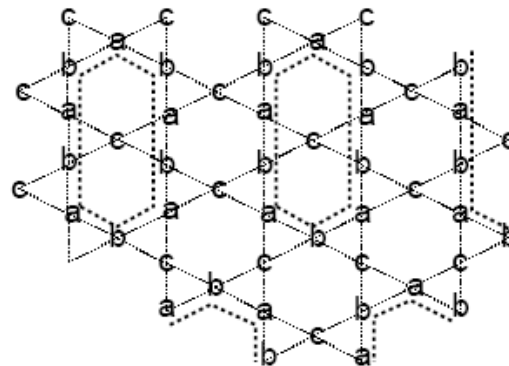


(b) Herbertsmithite  $\text{ZnCu}_3(\text{OH})_6\text{Cl}_2$



↑  
↓  
?

фрастрация



# Kapellasite: a kagome quantum spin liquid

B. Fåk,<sup>1</sup> E. Kermarrec,<sup>2</sup> L. Messio,<sup>3</sup> B. Bernu,<sup>4</sup> C. Lhuillier,<sup>4</sup> F. Bert,<sup>2</sup> P. Mendels,<sup>2,5</sup> B. Koteswararao,<sup>2</sup> F. Bouquet,<sup>2</sup> J. Ollivier,<sup>6</sup> A. D. Hillier,<sup>7</sup> A. Amato,<sup>8</sup> R. H. Colman,<sup>9</sup> and A. S. Wills<sup>9</sup>

<sup>1</sup>SPSMS, UMR-E CEA/UJF-Grenoble-1, INAC, F-38054 Grenoble Cedex 9, France

Magnetic susceptibility, NMR,  $\mu$ SR, and inelastic neutron scattering measurements show that kapellasite,  $\text{Cu}_3\text{Zn}(\text{OH})_6\text{Cl}_2$ , a geometrically frustrated spin-1/2 kagomé antiferromagnet polymorphous with the herbertsmithite mineral, is a gapless spin liquid with frustrated interactions showing unusual dynamic short-range correlations of non-coplanar cuboc2 type which persist down to 20 mK. The Hamiltonian is determined from a fit of a high-temperature series expansion to thermodynamical data. The experimental data are compared to theoretical calculations using the Schwinger-boson approach.

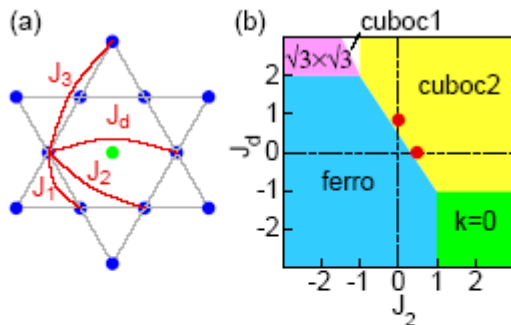


FIG. 2: (Color online) (a) Kagomé plane of kapellasite with  $\text{Cu}^{2+}$   $S = 1/2$  spins (blue), non-magnetic  $\text{Zn}^{2+}$  ion (green), and exchange interactions (red). (b) Classical  $J_2$ - $J_d$  phase diagram for ferromagnetic nearest-neighbor coupling,  $J_1 = -1$ , and  $J_3 = 0$ . The best two-parameter HT-series fits to susceptibility data are shown with red points (see text).

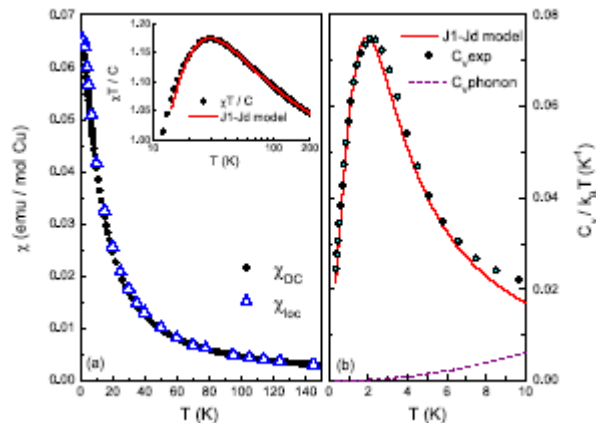


FIG. 3: (Color online) (a) Local  $\chi_{100}$  and macroscopic  $\chi_{\text{DC}}$  magnetic susceptibilities from NMR and DC SQUID measurements, respectively. Inset: Fit of high-temperature series expansion (red line) down to 20 K. (b) Total specific heat per spin  $C_V^{\text{exp}}$  measured in zero field (symbols), magnetic specific heat calculated with the  $J_1$ - $J_d$  model (red solid line) rescaled by a factor 0.88 to account for mass uncertainties and missing entropy. The phonon contribution estimated from a high- $T$  fit (purple dashed line) is negligible below 10 K.

## Попытка не удалась:

- $E = J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j$      $J \sim 100 \text{ K}$

но никакого магнитного порядка не найдено  
вплоть до температур  $T$  порядка  $100 \text{ mK}$

Эти системы выбирает какой-то другой способ  
занулить энтропию

То же самое - на треугольной решетке

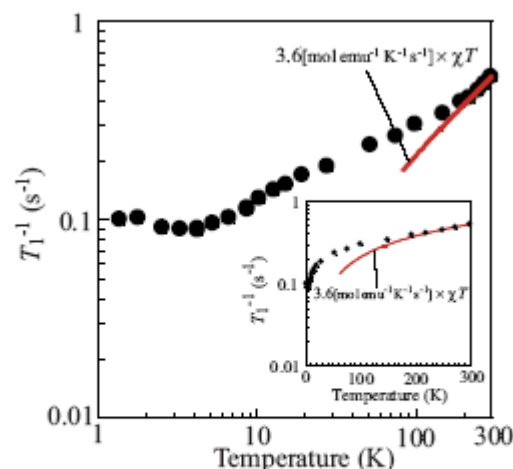
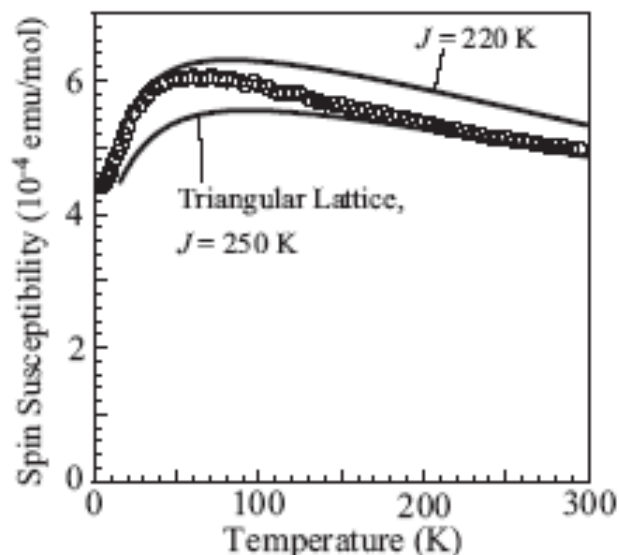
Quantum spin liquid in the spin-1/2 triangular antiferromagnet  $\text{EtMe}_3\text{Sb}[\text{Pd}(\text{dmit})_2]_2$ T. Itou,<sup>1</sup> A. Oyamada,<sup>1</sup> S. Maegawa,<sup>1</sup> M. Tamura,<sup>2</sup> and R. Kato<sup>2</sup>

FIG. 3. (Color online) Temperature dependence of  $^{13}\text{C}$  nuclear spin-lattice relaxation rate of  $\text{EtMe}_3\text{Sb}[\text{Pd}(\text{dmit})_2]_2$ . The transverse axis in the inset is linear so that data at high temperatures can be clearly illustrated, while it is logarithmic in the main figure. The

this system does not have an appreciable spin gap more than 1 K either with nodes or without nodes, because the estimated  $T_1^{-1}$  does not show any sign of decreasing. It is surprising that the paramagnetic state remains down to 1.37 K despite the growth of the antiferromagnetic correlations from much higher temperatures around 200 K.



# Quantum phase transition in the diopside magnetic lattice

Gros, P. C. Lemmens, K.-Y. Choi, G. Güntherodt, M. Baenitz, H.H.

Otto

Europhys. Lett. 60, 276 (2002)

the crystal green diopside  $\text{Cu}_6\text{Si}_6\text{O}_{18}\cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , known to the ancient Roman as the gem of Venus

The gem-stone diopside  $\text{Cu}_6\text{Si}_6\text{O}_{18}\cdot 6\text{H}_2\text{O}$  is a transparent green mineral build up from  $\text{Si}_6\text{O}_{18}$  single rings on a lattice, which sandwiches six-membered water rings down the (crystallographic)  $c$ -direction [2–4]. The magnetic  $\text{Cu(II)}$  ions are located between the  $\text{Si}_6\text{O}_{18}$  rings

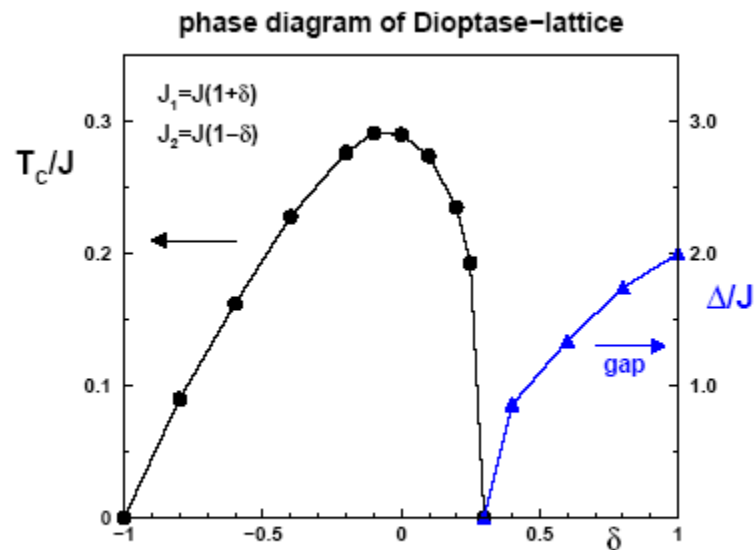
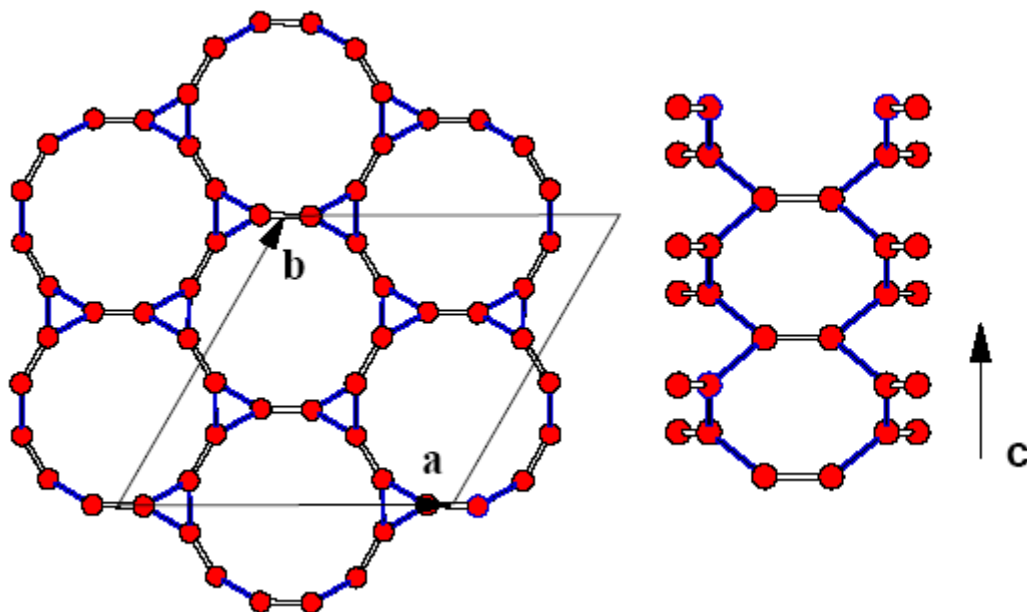


Fig. 3 – Phase diagram of the diopside magnetic sublattice as obtained by Quantum Monte Carlo simulations. The lines are guides to the eye. The magnetic coupling constants are  $J_{1,2} = J(1 \pm \delta)$

# Large quantum fluctuations in the strongly coupled spin-1/2 chains of green diopside: a hidden message from birds and trees

O. Janson, A. A. Tsirlin, M. Schmitt, H. Rosner

Phys. Rev. B **82**, 014424 (2010)

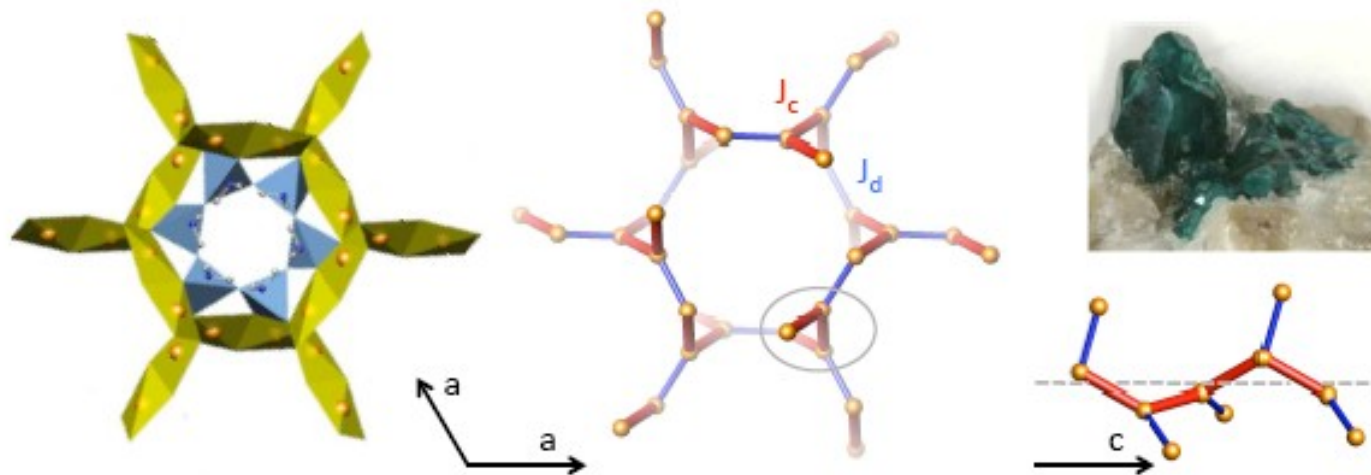


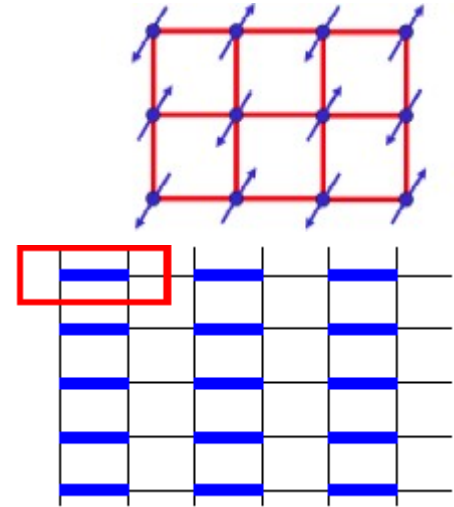
FIG. 1. (Color online) Left: Crystal structure of the green diopside. The  $\text{Cu}_2\text{O}_6$  dimers are shown in yellow and form a 3D network.  $\text{SiO}_4$  tetrahedra are shown blue. The crystal water is depicted by O (blue) and H (gray) atoms with O–H bonds. Middle: the magnetic model of the green diopside. Cu atoms are depicted as orange spheres, other atoms are not shown. The leading antiferromagnetic coupling  $J_c$  (red) forms spiral chains running along  $c$  perpendicular to the projection plane. The ferromagnetic coupling  $J_d$  (blue) within the structural  $\text{Cu}_2\text{O}_6$  dimers couples the chains into a three-dimensional framework. Right: section of the spiral chain along  $c$  (bottom) and a natural sample of green diopside grown on calcite (top).

# Теоретические модели для спиновой жидкости

# 2D lattice with AFM interaction of spins $S=1/2$ : possible phases

- Néel state: magnetic order
- Valence bond state: breaking of translational symmetry
- Spin liquids

$$\text{—} = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$$



1) Topological

- Ground state degeneracies on a torus
- Gapped excitations with fractional statistics

2) Critical

*Stable gapless phase, no broken symmetries*

3) “Spin metal”

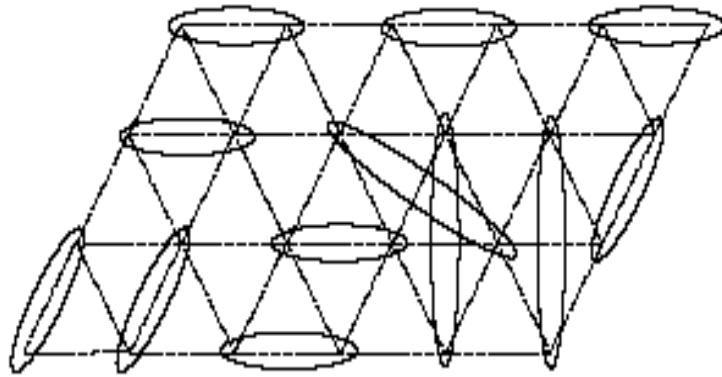
**Correlation functions singular along surfaces in momentum space**

## Спиновые жидкости: порядок идеальный, но неуловимый

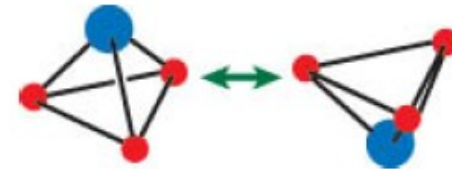
- Обычного «локального» параметра порядка нет
- Есть загадочная зависимость свойств от *топологии* решетки (круг, цилиндр, тор)
- Три возможных типа спектра:
  - 1) Щель:  $E = \Delta + Jk^2$
  - 2) Коническая точка:  $E = sk$
  - 3) Нуль на целой линии (как ферми-газ):  $E = s|k-k_0|$

# «Резонансные валентные связи»

(P.W.Anderson 1973)



Вспомним аммиак:



$$|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle) / \sqrt{2}$$

Здесь  
«димер»:



Объект со спином = 0

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_i \downarrow_j\rangle - |\downarrow_i \uparrow_j\rangle)$$

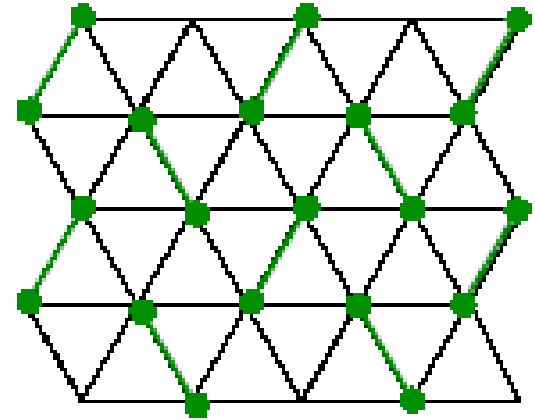
Как рассадить димеры по решетке ?

Квантовые димеры -  
упрощенная модель для спиновой  
жидкости

# Жидкость квантовых димеров

- Треугольная решетка

$$\hat{H} = -t\hat{T} + v\hat{V} = \sum_{i=1}^{N_p} \left\{ -t \sum_{\alpha=1}^3 \left( |\nabla_{\alpha}\rangle \langle \nabla_{\alpha}| + h.c. \right) + v \sum_{\alpha=1}^3 \left( |\nabla_{\alpha}\rangle \langle \nabla_{\alpha}| + |\nabla_{\alpha}\rangle \langle \nabla_{\alpha}| \right) \right\}.$$



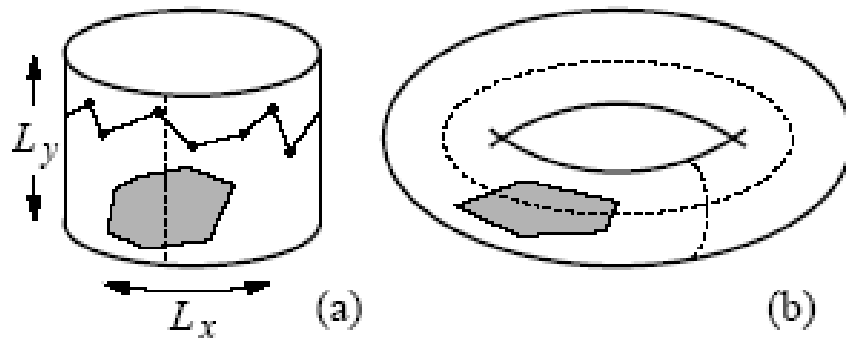
При  $v=t$  все расстановки димеров входят с равными амплитудами: полное «квантовое равноправие»

На цилиндре таких состояний - 2      На торе - 4  
Как это увидеть ?

На квадратной решетке их бесконечно много - как целых чисел



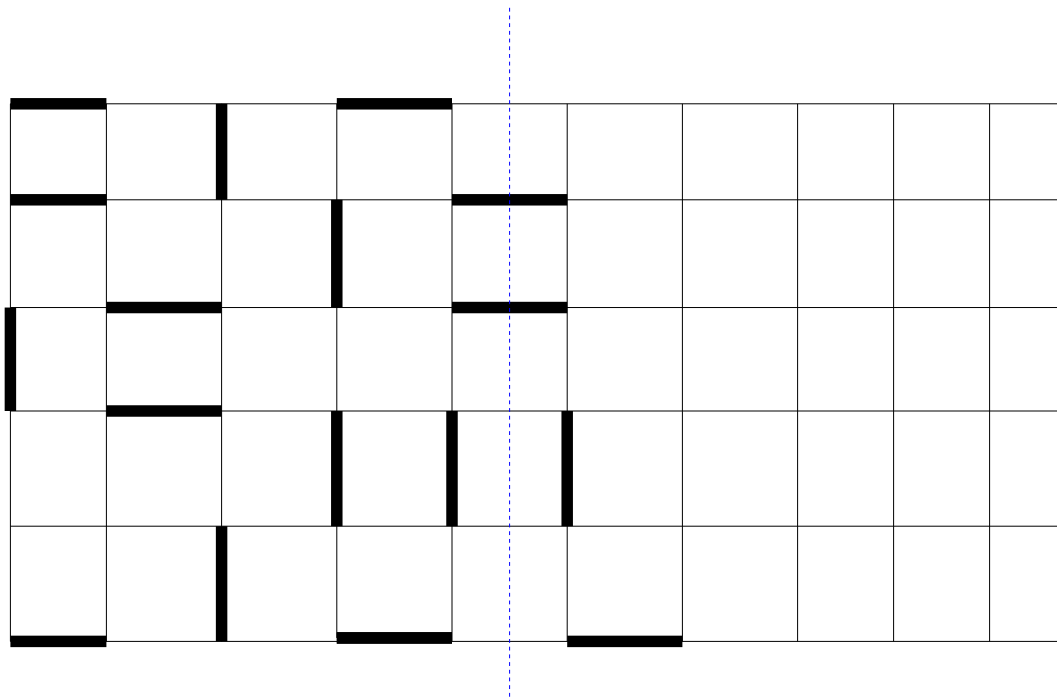
# Топологические классы димерных конфигураций



Ground-state properties  
of the Rokhsar-Kivelson  
dimer model on the triangular  
lattice A.Ioselevich, D.A.Ivanov,  
M.V.Feigelman  
Phys. Rev. B 66, 174405 (2002)

FIG. 1: Topological sectors on a cylinder and on a torus. Dimer coverings may be classified according to the parities of the number of dimers intersecting the reference lines (dashed lines). Dimer configurations differing by a rearrangement in contractible domains (shaded areas) belong to the same topological sector and contribute with the same sign to the partition function (2). To change the topological sector, a circular permutation of dimers along a topologically nontrivial contour (shown in a zig-zag line in the case of the cylinder) is necessary.

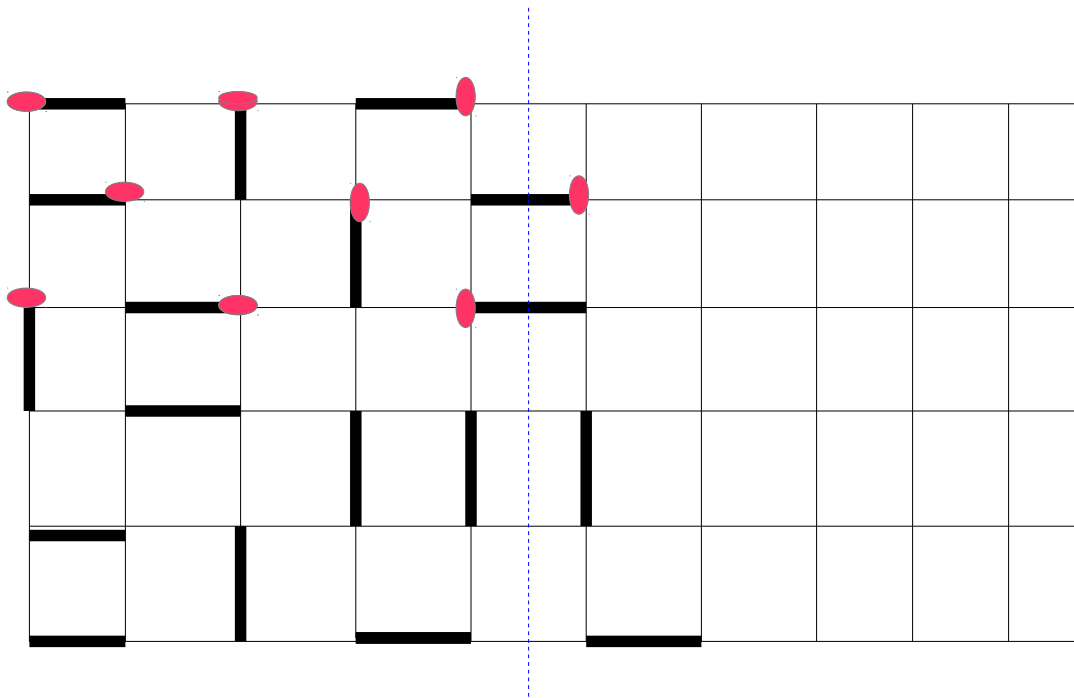
# Димеры на квадратной решетке



$$H = \sum_{\square} [-t (|\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow|) + v (|\uparrow\rangle \langle \downarrow| + |\downarrow\rangle \langle \uparrow|)]$$

$Z$  – вырождение на цилиндре,  $Z \times Z$  - на торе

# Димеры на квадратной решетке



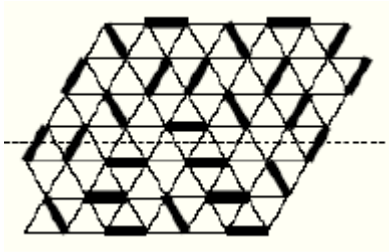
$$H = \sum_{\square} [-t (|\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow|) + v (|\uparrow\rangle \langle \downarrow| + |\downarrow\rangle \langle \uparrow|)]$$

Две подрешетки - это позволяет считать димеры **векторами**

$\mathbb{Z}$  – вырождение на цилиндре,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  - на торе

## An RVB phase in the triangular lattice quantum dimer model

## Димеры на треугольной решетке



Решетка не делится на 2 подрешетки, димеру нельзя сопоставить вектор Гамильтониан сохраняет только **ЧЕТНОСТЬ** числа, димеров пересекающих “пробную линию”

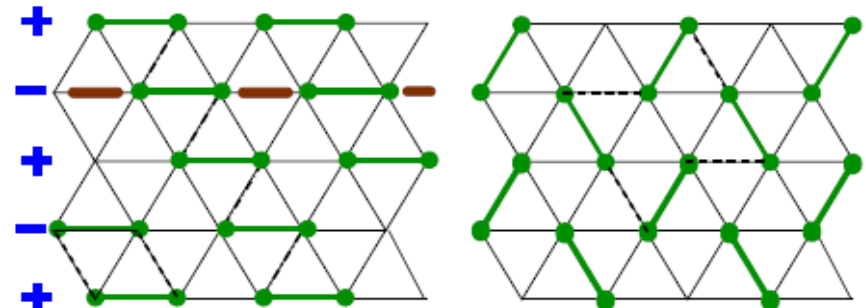
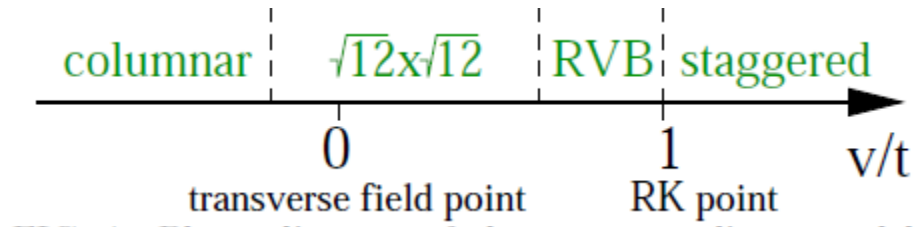


FIG. 2. Left: The columnar dimer state. The elementary dimer plaquette move generated by  $\hat{T}$  is indicated in the bottom left plaquette. Such plaquette moves conserve the difference between the number of dimers in rows marked by pluses and minuses. Dimer moves A and B, consist of shifting dimers onto the fat and dot-dashed bonds, respectively. Right: The staggered state with the four-dimer move connecting it to other states.

# Число димерных покрытий и Пфаффиан

Для любой антисимметричной матрицы  $A$  существует  
Пфаффиан  $A$

$$Z = \int \prod_i da_i \exp \left[ \sum_{ij} a_i A_{ij} a_j \right] = \text{Pfaff}(A_{ij}),$$

where  $i$  and  $j$  label the lattice sites, and the fermionic variables  $a_i$  obey the conventional rules:  $a_i a_j = -a_j a_i$ ,  $\int da_i = 0$ ,  $\int a_i da_i = 1$ . The “hopping amplitudes”  $A_{ij}$  take values  $\pm 1$  on nearest-neighbor sites and 0 otherwise, and form an antisymmetric matrix:  $A_{ij} = -A_{ji}$ . The signs of  $A_{ij}$  must be adjusted so that all terms in the expansion of the exponent in (2) give positive weight. Such terms in the expansion of the exponent are in one-to-one correspondence to the dimer coverings of the lattice

$$Z_{\sigma_1 \sigma_2} = \exp \sum_{\text{BZ}} \ln E(\mathbf{k}),$$

$$E(\mathbf{k}) = 2 (\cos^2 k_1 + \cos^2 k_2 + \cos^2 k_3)^{1/2},$$

$$(\text{Pfaff } A)^2 = \text{Det } A$$

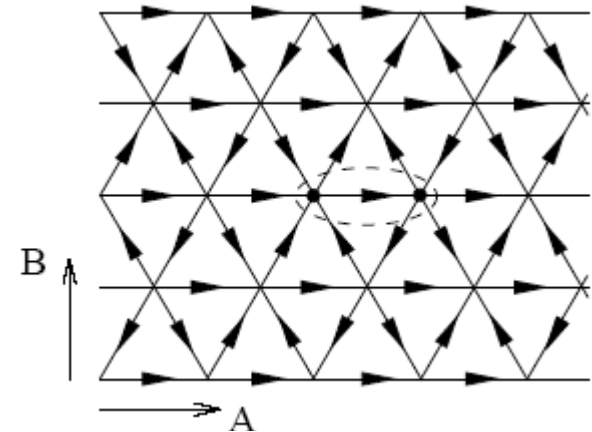


FIG. 2: One possible choice of the amplitudes  $A_{ij}$ . This choice of amplitudes is periodic with a unit cell containing two lattice sites (marked by a dashed ellipse). The arrow directions correspond to the signs of  $A_{ij}$ :  $A_{ij}$  equals 1 if the arrow points from  $i$  to  $j$ , and equals  $-1$  if it points from  $j$  to  $i$ . Also shown are  $A$  and  $B$  directions: parallel and perpendicular to the lattice lines, respectively.

# Как что-то сосчитать для спиновой жидкости ?

- Главная проблема: что собой представляют квазичастицы – возбуждения над состоянием спиновой жидкости ?
- Самый простой пример – одномерная цепочка XY спинов. Гамильтониан диагонализуется преобразованием Йордана-Вигнера к виду свободного Ферми-газа

# Jordan-Wigner transformation:

Hamiltonian of a 1D chain  $H = - \sum_{ij} (J_x S_i^x S_j^x + J_y S_i^y S_j^y)$

$$S_i^+ = a_i^+ \exp \left\{ i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^+ a_j \right\}, \quad S_i^- = (S_i^+)^+ = \exp \left\{ -i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^+ a_j \right\} a_i, \quad S_i^z = a_i^+ a_i - 1/2.$$

$$S_i^+ S_{i+1}^+ = a_i^+ \exp \left\{ i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^+ a_j \right\} a_{i+1}^+ \exp \left\{ i\pi \sum_{j=1}^i a_j^+ a_j \right\} = a_i^+ \exp \{ i\pi a_i^+ a_i \} a_{i+1}^+ = a_i^+ a_{i+1}^+ \quad S_i^+ S_{i+1}^- = a_i^+ \exp \left\{ i\pi \sum_{j=1}^i a_j^+ a_j \right\} \exp \left\{ -i\pi \sum_{j=1}^i a_j^+ a_j \right\} a_{i+1} = a_i^+ \exp \{ -i\pi a_i^+ a_i \} a_{i+1} = a_i^+ a_{i+1}$$

$$S_i^- S_{i+1}^- = \exp \left\{ -i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^+ a_j \right\} a_i \exp \left\{ -i\pi \sum_{j=1}^i a_j^+ a_j \right\} a_{i+1} = a_i \exp \{ -i\pi a_i^+ a_i \} a_{i+1} = -a_i a_{i+1} \quad S_i^- S_{i+1}^+ = \exp \left\{ -i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^+ a_j \right\} a_i a_{i+1}^+ \exp \left\{ i\pi \sum_{j=1}^i a_j^+ a_j \right\} = a_i a_{i+1}^+ \exp \{ i\pi a_i^+ a_i \} = -a_i a_{i+1}^+$$

$$S_i^z = (1/2)(S_i^+ + S_i^-), \quad S_i^z S_{i+1}^z = (1/4)(a_i^+ a_{i+1}^+ - a_i a_{i+1} + a_i^+ a_{i+1} - a_i a_{i+1}^+)$$

$$S_i^y = (1/2i)(S_i^+ - S_i^-), \quad S_i^y S_{i+1}^y = (1/4)(-a_i^+ a_{i+1}^+ + a_i a_{i+1} + a_i^+ a_{i+1} - a_i a_{i+1}^+).$$

$$S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+ = a_i^+ a_{i+1} - a_i a_{i+1}^+$$

Продолжение: Л.Левитов, А.Шитов, "Функции Грина", глава 1

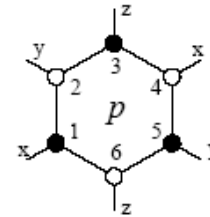
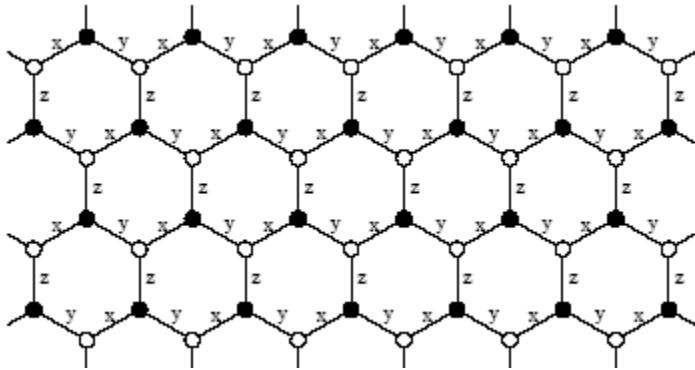
Можно ли обобщить  
преобразование  
Йордана-Вигнера  
на размерности  $> 1$  ?



# A. Kitaev: honeycomb model

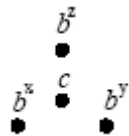
Ann.Phys. **321**, 2 (2006)

$$H = -J_x \sum_{x\text{-links}} \sigma_j^x \sigma_k^x - J_y \sum_{y\text{-links}} \sigma_j^y \sigma_k^y - J_z \sum_{z\text{-links}} \sigma_j^z \sigma_k^z,$$



$$W_p = \sigma_1^x \sigma_2^y \sigma_3^z \sigma_4^x \sigma_5^y \sigma_6^z$$

all  $W_p$  commute with H



$$\tilde{\sigma}^x = ib^x c,$$

$$\tilde{\sigma}^y = ib^y c,$$

$$\tilde{\sigma}^z = ib^z c$$

$$c_j^2 = 1, \quad c_j c_l = -c_l c_j \text{ if } j \neq l.$$

$$\tilde{\sigma}^x \tilde{\sigma}^y \tilde{\sigma}^z = ib^x b^y b^z c = iD.$$

$$\hat{u}_{jk} = ib_j^{\alpha_{jk}} b_k^{\alpha_{jk}}. \quad u_{jk} = \pm 1. \quad \text{!!!!}$$

Spins  $\frac{1}{2}$  are fractionalized into Majorana fermions

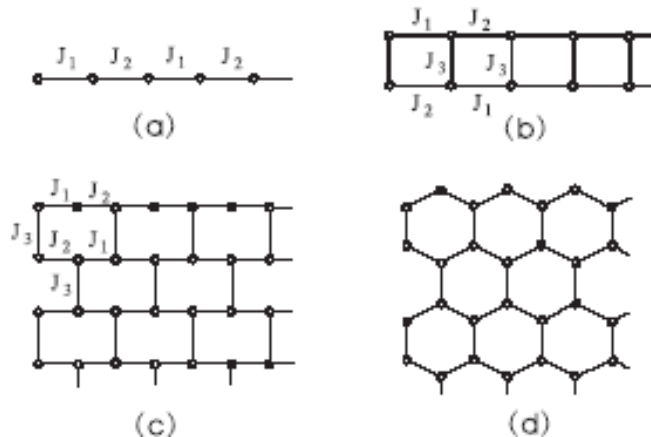
$$\sigma_j^\alpha \mapsto \tilde{\sigma}_j^\alpha = ib_j^\alpha c_j \text{ is gauge-equivalent to } \sigma_j^x \mapsto -ib_j^y b_j^z, \quad \sigma_j^y \mapsto -ib_j^z b_j^x, \quad \sigma_j^z \mapsto -ib_j^x b_j^y.$$

# Jordan-Wigner representation

Phys Rev Lett  
**98**, 087204 (2007)

Topological characterization of quantum phase transitions in a S=1/2 spin model

Xiao-Yong Feng<sup>1</sup>, Guang-Ming Zhang<sup>2</sup>, and Tao Xiang<sup>1</sup>



$$H = \sum_{j+l=\text{even}} (J_1 \sigma_{j,l}^x \sigma_{j+1,l}^x + J_2 \sigma_{j-1,l}^y \sigma_{j,l}^y + J_3 \sigma_{j,l}^z \sigma_{j,l+1}^z)$$

$$\sigma_{j,l}^{\dagger} = 2a_{j,l}^{\dagger} e^{i\pi (\sum_{i,k < l} a_{i,k}^{\dagger} a_{i,k} + \sum_{i < j} a_{i,l}^{\dagger} a_{i,l})}$$

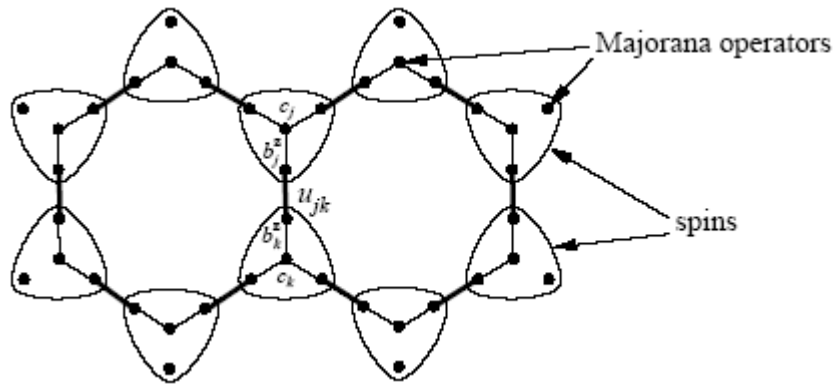
For each pair of fermion operators  $(a, a^{\dagger})$ , we can further define two Majorana fermion operators  $(c, d)$ :  $c_{j,l} = i(a_{j,l}^{\dagger} - a_{j,l})$  and  $d_{j,l} = a_{j,l}^{\dagger} + a_{j,l}$  when  $j+l = \text{even}$ , and  $c_{j,l} = a_{j,l}^{\dagger} + a_{j,l}$  and  $d_{j,l} = i(a_{j,l}^{\dagger} - a_{j,l})$  when  $j+l = \text{odd}$ .

$$H = -i \sum_{j+l=\text{even}} (J_1 c_{j,l} c_{j+1,l} - J_2 c_{j-1,l} c_{j,l} + J_3 D_{j,l} c_{j,l} c_{j,l+1}),$$

where  $D_{j,l} = id_{j,l}d_{j,l+1}$  is defined on each vertical bond. Since there are no direct connections between any two vertical bonds, all  $D_{j,l}$  are *good quantum numbers*. Each  $D_{j,l}$  acts like a local static  $Z_2$  gauge field. They commute with each other and with the Hamiltonian.

# Kitaev model: free fermions

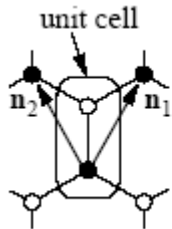
Kitaev model:



$$\hat{u}_{jk} = i b_j^{\alpha_{jk}} b_k^{\alpha_{jk}}.$$

$$u_{jk} = \pm 1.$$

$$\tilde{H} = \frac{i}{4} \sum_{j,k} \hat{A}_{jk} c_j c_k, \quad \hat{A}_{jk} = \begin{cases} 2J_{\alpha_{jk}} \hat{u}_{jk} & \text{if } j \text{ and } k \text{ are connected,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$



$$i\tilde{A}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & if(\mathbf{q}) \\ -if(\mathbf{q})^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(\mathbf{q}) = \pm|f(\mathbf{q})|,$$

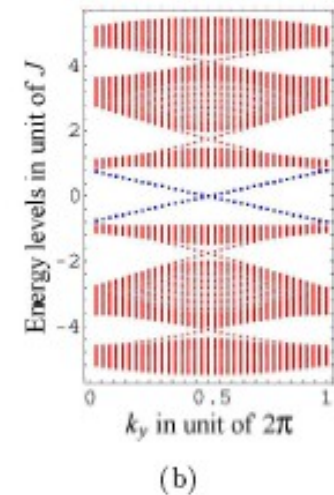
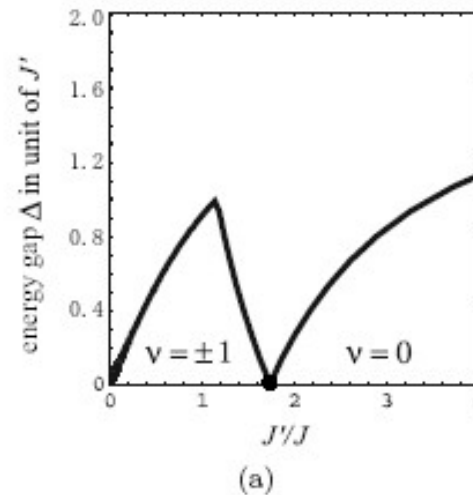
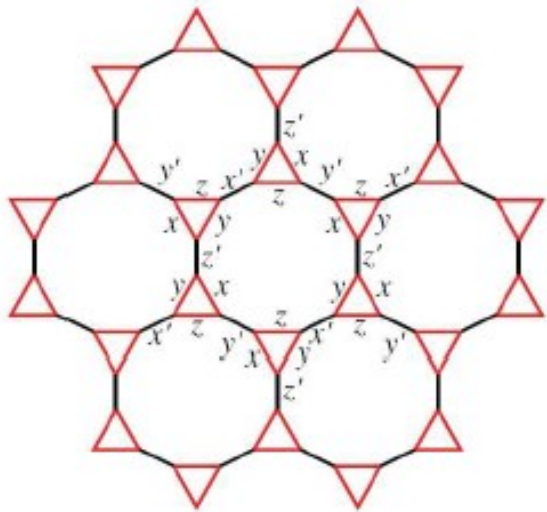
$$f(\mathbf{q}) = 2(J_x e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{n}_1)} + J_y e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{n}_2)} + J_z),$$

$$\mathbf{n}_1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathbf{n}_2 = \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

# Decorated honeycomb lattice: non-Abelian chiral spin liquid with gap and broken time-invariance

**H. Yao and S. Kivelson (2007)**

$$H = \sum_{\alpha\text{-links}} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha + g \sum_{\alpha'\text{-links}} \sigma_i^{\alpha'} \sigma_j^{\alpha'}$$

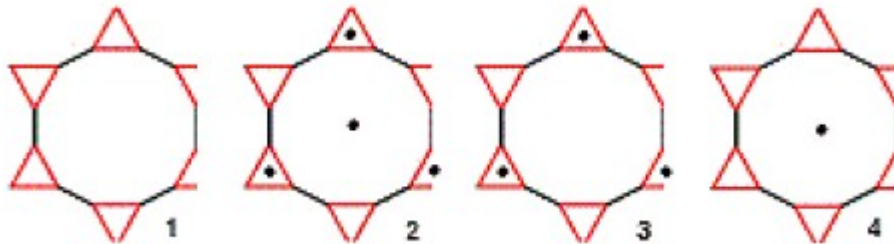


No fluxes in the ground state !

# Decorated honeycomb lattice: gapless spin liquid with a Fermi-line

K.S.Tikhonov and M.V.Feigelman,  
Phys. Rev.Lett. 105, 067207 (2010)

Add AFM ordering of fluxes:



$G_1$  is the Yao-Kivelson chiral state at  $g < g_c = \sqrt{3}$

$G_2$  is the “spin-metal” state at  $g < g_c = \sqrt{3}$

$G_2$  wins over  $G_1$  if  $\lambda > 2.3 \times 10^{-4}$

At  $g > g_c$  an Abelian gapful state is realized

# $G_2$ ground state at $g < g_c \equiv \sqrt{3}$

near the critical point  $g \equiv \sqrt{3} - \mu$  with  $|\mu| \ll 1$

Exactly at  $\mu = 0$  two (out of six) Majorana bands possess zeroes:  $\epsilon_1(\mathbf{K}^*) = \epsilon_2(-\mathbf{K}^*) = 0$   $\mathbf{K}^* = (5\pi/3, \pi/\sqrt{3})$

Other four bands are non-degenerate, with energies of the order of  $J$ ,

perturbation theory w.r.t. to  $\mu$  results in the effective

Hamiltonian of the low-energy fermion mode  $\psi(\mathbf{p})$ :

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \psi^\dagger(\mathbf{p}) [\alpha_x p_x^2 + \alpha_y p_y^2 - \mu] \psi(\mathbf{p}) \quad \alpha_x \approx 0.87 \text{ and } \alpha_y \approx 1.44,$$

Positive  $\mu$   $\rightarrow$  spin metal state  $q_F = \sqrt{\mu}$

# Preliminary conclusion

- All kinds of spectra (gapful, point-like gapless, and Fermi-line) can be realized in the versions of the honeycomb spin model
- Yet it does not lead to spin liquids with nontrivial spin-spin correlations

# Квантовый компьютер и спиновые жидкости: что общего?

- Квантовый компьютер – это большая система, поведение которой не подчиняется законам классической физики.
- Спиновые (димерные) жидкости – большие квантовые системы, устойчивые к внешним возмущениям
- А.Китаев (1997): идея «топологически защищенного» квантового компьютера