Сверхпроводниковые квантовые биты: как построить квантовый компьютер

Ю.Махлин

1 Кубиты

Двухуровневые квантовые системы, $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ или $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a, b, \in \mathbb{C}$.

Логические операции: эволюция, уравнение Шредингера

$$i\frac{d}{dt}\,|\psi\rangle = \mathcal{H}\,|\psi\rangle\ .$$

$$|\psi_0\rangle \to U(t)\,|\psi_0\rangle\ , U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right)\ .$$

Спин-1/2, гамильтониан $\mathcal{H} = -\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$.

Пример 1. Сдвиг фазы, $B \parallel \hat{z}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\ ; \qquad \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) = \begin{pmatrix} e^{-iBt/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{iBt/\hbar} \end{pmatrix}$$

Пример 2. Поворот спина, $B \parallel \hat{x}$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -B & 0 \end{pmatrix}\ ; \qquad \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{Bt}{\hbar} & i\sin\frac{Bt}{\hbar} \\ i\sin\frac{Bt}{\hbar} & \cos\frac{Bt}{\hbar} \end{pmatrix}$$

Квантовое преобразование Фурье:
$\sum_{x=0}^{2^L-1} c_x\,|x\rangle \mapsto \sum_{k=0}^{2^L-1} c_k\,|k\rangle$, где $c_k = \frac{1}{2^L}\sum_{x=0}^{2^L-1} c_x \exp\left(2\pi ikx/2^L\right)$.

Квантовый алгоритм: инициализация, унитарная эволюция (обратимость), считывание (измерение)

Квантовый параллелизм: ускорение вычислений
N кубитов — 2^N состояний

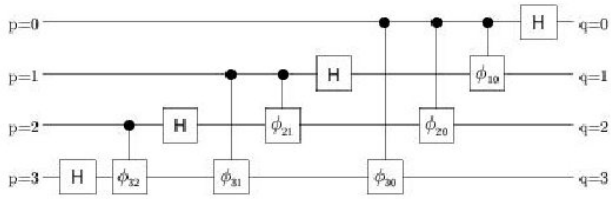


Рис. 1: Квантовое преобразование Фурье: $\varphi_{ij} = \pi/2^{|i-j|}$. Число операций $\propto L^2$, "классически" $\propto 2^L \cdot L$.

N кубитов можно приготовить в суперпозиции всех 2^N состояний, т.е. "обработать все их за один раз".

$$\sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle |0\rangle \mapsto \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle |f(x)\rangle$$

Почему не всегда быстрее? — Квантовое измерение. — <u>Но иногда!</u>

$$\mathcal{H} = -\sum_i \mathbf{B}_i(t)\boldsymbol{\sigma}_i + \sum_{i,j} J_{ij}(t)\left[\sigma_x^i\sigma_x^j + \sigma_y^i\sigma_y^j\right] + \mathcal{H}_{\text{diss}} + \mathcal{H}_{\text{meas}}(t)$$

2 Сверхпроводниковые кубиты

$$E_{\text{ch}}(Q = 2ne, V_{\text{g}}) = \frac{(Q - C_{\text{g}}V_{\text{g}})^2}{2(C_{\text{g}} + C_{\text{J}})}$$

Кулоновская блокада.
<u>Когерентная динамика заряда</u>
Джозефсоновское туннелирование

$$H = \sum_n \left[-\frac{E_{\text{J}}}{2}|n\rangle\langle n+1| + \text{h.c.}\right] + \sum_n E_{\text{ch}}(n)|n\rangle\langle n|$$

$|\varphi\rangle = \sum_n e^{i\varphi n}|n\rangle \quad \Rightarrow \quad -E_{\text{J}}\cos\varphi$

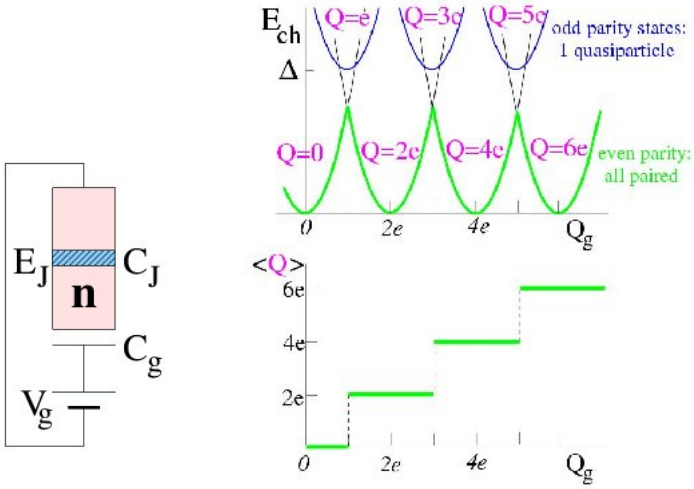
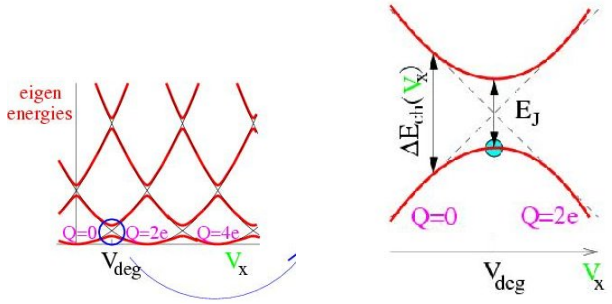


Рис. 2: Зарядовый сверхпроводниковый квантовый бит. Кулоновская лестница.



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Delta E_{\rm ch} & -E_{\rm J} \\ -E_{\rm J} & \Delta E_{\rm ch} \end{pmatrix} \begin{matrix} |n=0\rangle \\ |n=1\rangle \end{matrix} = -\frac{1}{2}\left[\Delta E_{\rm ch}\hat{\sigma}_z + E_{\rm J}\hat{\sigma}_x\right] ,$$

уровни $\varepsilon = \pm\sqrt{\Delta E_{\rm ch}^2 + E_{\rm J}^2}/2$.

3 Разрушение квантовой когерентности

3.1 Релаксация

$$\mathcal{H} = -\frac{\Delta E}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}\hat{X}(t)\hat{\sigma}_x + \mathcal{H}_{\text{рез}}$$

X — оператор в гильбертовом пространстве резервуара.
Золотое правило:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\downarrow &= \frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{4}\sum_{i,f}\rho_i|\langle i|X|f\rangle|^2\delta(E_i+\Delta E-E_f) = \\
&= \frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{4}\sum_{i,f}\rho_i\langle i|X|f\rangle\langle f|X|i\rangle\int\frac{dt}{2\pi\hbar}e^{it(E_i+\Delta E-E_f)/\hbar} = \\
&= \frac{1}{4\hbar^2}\int dt\sum_i\rho_i\langle i|X(t)X(0)|i\rangle e^{it\Delta E/\hbar} = \\
&= \frac{1}{4\hbar^2}\left\langle X^2_{\omega=\Delta E/\hbar}\right\rangle .
\end{aligned}$$

$$\Gamma_\uparrow = \frac{1}{4\hbar^2}\left\langle X^2_{\omega=-\Delta E/\hbar}\right\rangle .$$

$$\frac{1}{T_1} = \Gamma_\downarrow + \Gamma_\uparrow .$$

3.2 Сбой фазы T_2^*

$$\mathcal{H} = -\frac{\Delta E}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}\hat{X}(t)\hat{\sigma}_z + \mathcal{H}_{\text{рез}}$$

Случайная фаза $\int X(t')dt'$:

$$\rho_{\uparrow\downarrow} \propto e^{-i\Delta Et}\left\langle e^{i\int_0^t\hat{X}(t')dt'}\right\rangle_{\text{рез}}$$

Для гауссова шума:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{\frac{i}{\hbar}\int X(t')dt'}\right\rangle &= e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\langle(\int Xdt')^2\rangle} = \\
&= e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\int\int dt_1dt_2\langle\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)\rangle} = e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\int\int dt_1dt_2\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega(t_1-t_2)}\langle\hat{X}^2_\omega\rangle} = \\
&= e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\langle X^2_\omega\rangle\frac{\sin^2(\omega t/2)}{(\omega/2)^2}} .
\end{aligned}$$

Если $\langle X_\omega^2 \rangle$ гладкое по ω вблизи $\omega = 0$, то:

$$\left\langle e^{i\int \hat{X}(t')dt'} \right\rangle \approx e^{-t\langle X^2_{\omega=0}\rangle \int \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{dx}{2\pi\hbar^2}} = e^{-t/T_2^*}$$

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{2\hbar^2}\left\langle X^2_{\omega=0}\right\rangle .$$

4 Квантовое измерение

Взаимодействие кубита-спина с квантовым точечным контактом: $\mathcal{H}_{\text{int}} = (t_0 + t'\hat{\sigma}_z)(\hat{T} + \hat{T}^\dagger)$

$\hat{T} = \sum_{k_1,k_2} a^\dagger_{k_1} b_{k_2}$ — туннелирование направо, $\hat{N} = \sum_k a^\dagger_k a_k$ — заряд справа

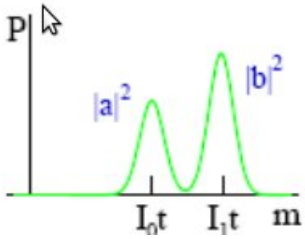
Ток $I = \frac{d}{dt}N = i[\mathcal{H}_{\text{int}}, N] = i(t_0 + t'\hat{\sigma}_z)(T - T^\dagger)$.

(Дробовой) шум тока, $\langle \delta N^2 \rangle \sim N$.

С одной стороны, шум дефазирует кубит. Скорость дефазировки:

$$\frac{1}{t_\varphi} = \frac{4}{2}t'^2\left\langle (T+T^\dagger)^2_{\omega=0}\right\rangle = 2t'^2\langle (TT^\dagger + T^\dagger T)_{\omega=0}\rangle = \frac{2t'^2}{t_0^2}\langle I^2_{\omega=0}\rangle \overset{\text{shot noise}}{=} 2\left(\frac{t'}{t_0}\right)^2 \bar{I}\,.$$

С другой стороны, происходит измерение. Вероятность $P(m)$, что протуннелировало m электронов:



$\bar{I} \propto t_0^2 V$, а $I_{0,1} \propto (t_0 \pm t')^2 V$. Значит,

$$\frac{I_1 - I_0}{\bar{I}} = \frac{4t_0 t'}{t_0^2} = 4\frac{t'}{t_0}\,.$$

$I_1 t - I_0 t = 4\frac{t'}{t_0}\bar{I}t = 4\frac{t'}{t_0}\bar{N}$.

Следовательно, $4\frac{t'}{t_0}\bar{I}t_m = 2\sqrt{2\bar{I}t_m}$, а $16(t'/t_0)^2\bar{I}^2t_m^2 = 8\bar{I}t_m$, и время измерения определяется равенством

$$\frac{1}{t_m} = 2\left(\frac{t'}{t_0}\right)^2 \bar{I}\,.$$

Итак, $t_m \sim t_\varphi$. При неоптимальном измерении фаза может сбиваться и быстрее. Всегда

$$t_m \geq t_\varphi\,.$$

Нельзя измерить, не разрушив состояние.

Сверхпроводниковые квантовые биты

Топологические кубиты и майорановские нулевые моды

- Квантовые вычисления: концепция + требования к реализации
- Сверхпроводниковые кубиты: принцип работы
- Влияние шума, топологические кубиты
- Квантовые алгоритмы

Ю. Махлин

Квантовые компьютеры

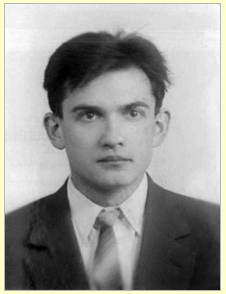
Квантовые биты (кубиты): 2-уровневые квантовые системы , $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$

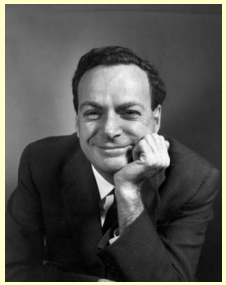
Логические операции: унитарная эволюция $|\psi_0\rangle \to U(t)\,|\psi_0\rangle$

$$U(t) = \exp\left(-i\mathcal{H}t/\hbar\right)$$

Квантовые алгоритмы: последовательность элементарных операций

Почему квантовые?





<u>компьютеры:</u>

- миниатюризация

- большая вычислительная мощность?
(**Р. Фейнман, Д. Дойч**)

алгоритм **П.Шора**: разложение на множители за полиномиальное время, 1994

<u>физика:</u>

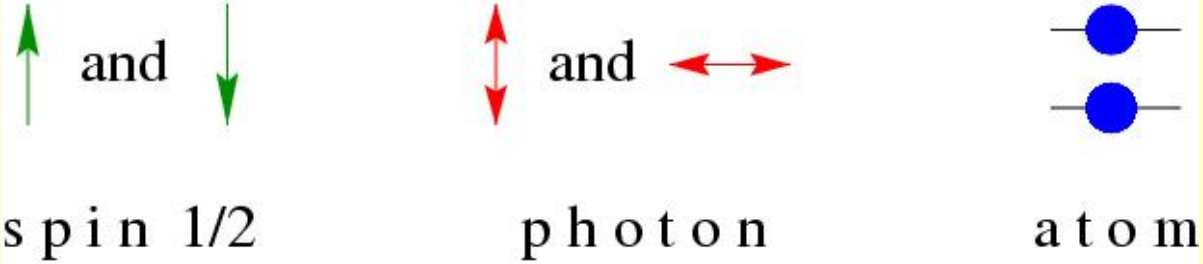
- фундаментальные явления в квантово-механических системах

- приборы: новые интересные вопросы

Требования к реализации квантовых компьютеров

(Д.ДиВинченцо 1997)

- **2-уровневые квантовые системы — кубиты**



суперпозиции: $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$

- с хорошо определенными физ. параметрами (гамильтониан, ...)

- без утечки в высшие состояния (3-е, 4-е, ...)

- масштабируемость (N кубитов)

Требования к реализации квантовых компьютеров

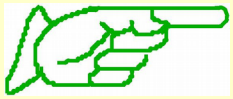
$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_i(t)\hat{\sigma}_i(t) + \sum_{i<j} J^{ij}(t)(\hat{\sigma}_x^i\hat{\sigma}_x^j + \hat{\sigma}_y^i\hat{\sigma}_y^j) + \mathcal{H}_{\text{meas}}(t) + \mathcal{H}_{\text{diss}}$$

регулируется регулируется регулируется слабое

- 2-уровневые квантовые системы — N кубитов
- управляемая динамика

- 1-кубитовые операции
- 2-кубитовые операции

- инициализация - охлаждение или измерение



- когерентность: $\tau_\varphi > 10^4 \tau_{\text{op}}$ достаточно для исправления ошибок

- считывание: квантовое измерение

Квантовые компьютеры

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{H}_i(t)\hat{\sigma}_i(t)$$

регулируется (вкл / выкл)

- 2-уровневые квантовые системы — N кубитов
- управляемая динамика

- 1-кубитовые (логические) операции

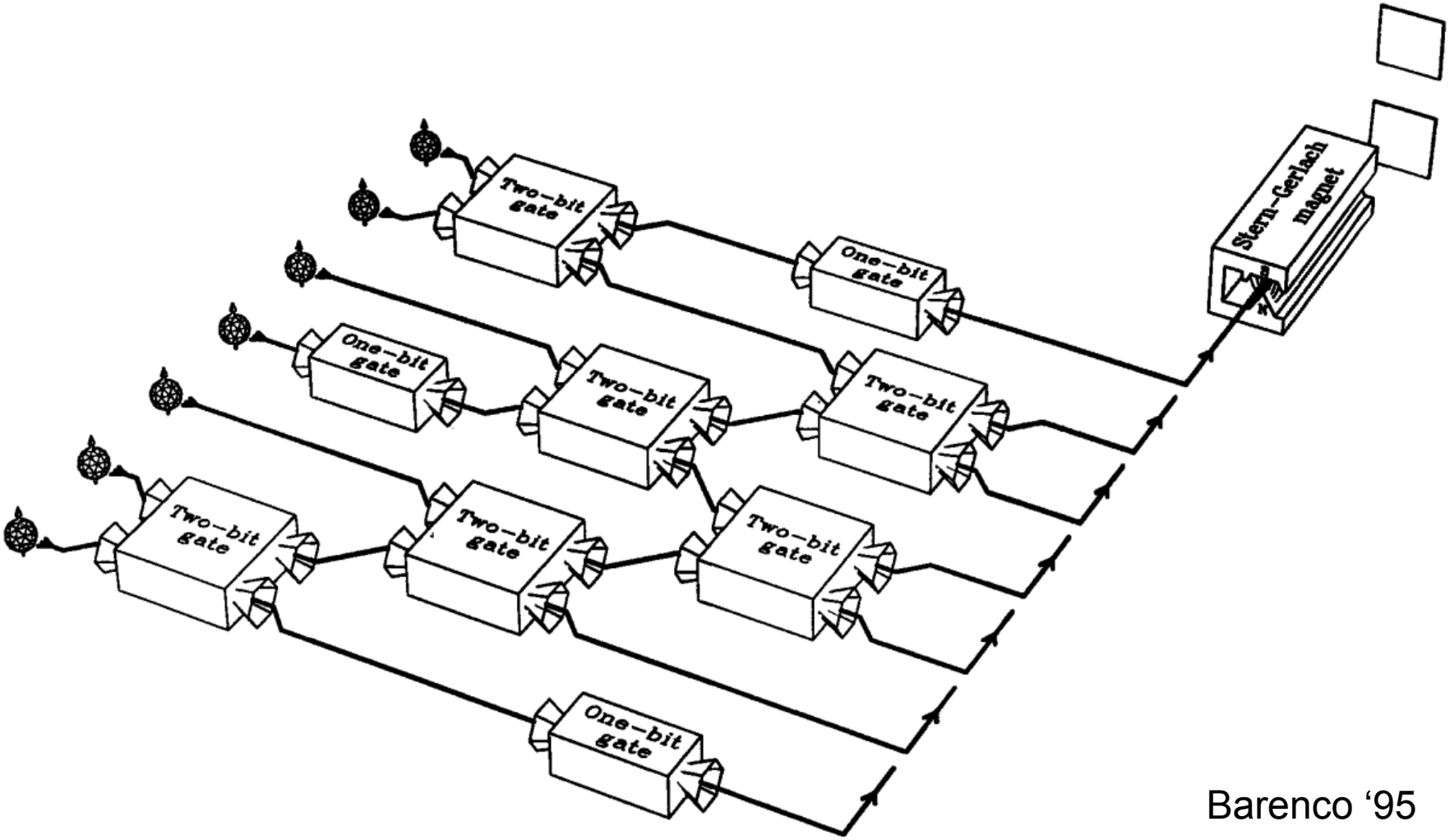
- поворот спина: $\mathcal{H} = -H_x^i \sigma_x^i$ for time τ

$$U_x^i = \exp(-iH_x^i \hat{\sigma}_x^i \tau/\hbar) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \frac{H_x^i \tau}{\hbar}$$

- сдвиг фазы: $\mathcal{H} = -H_z^i \sigma_z^i$ for time τ

$$U_z^i = \exp(iH_z^i \hat{\sigma}_z^i \tau/\hbar) = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \frac{H_z^i \tau}{\hbar}$$

Quantum computations

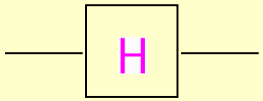


Barenco ‘95

универсальный набор квантовых операций

1-кубитные + CNOT (или почти любая 2-куб. операция)

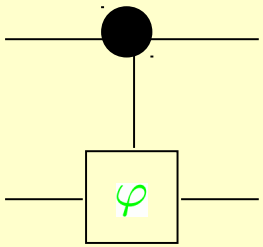
оператор Адамара



$$\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

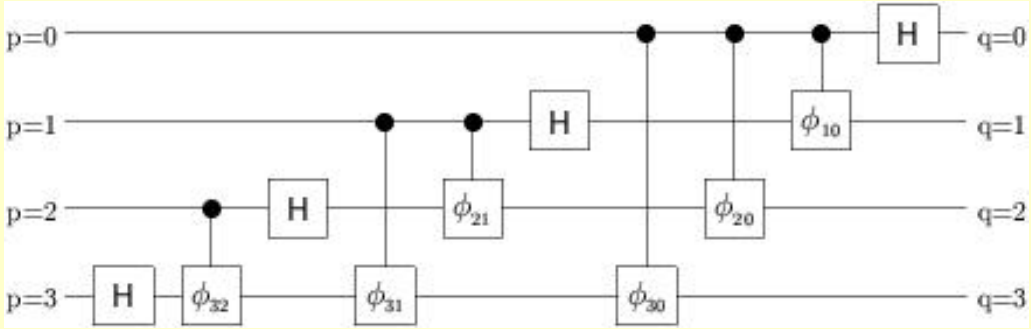
управляемый фазовый сдвиг

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{matrix} \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{matrix} \right\}$$



дискретное преобразование Фурье

L кубитов



$$\varphi_{ij} = \frac{\pi}{2^{|i-j|}}$$

$$\mathrm{DFT}: \sum_{x=0}^{2^L-1} c_x \,|x\rangle \longrightarrow \sum_{k=0}^{2^L-1} c_k \,|k\rangle$$

$$\#\ \text{ops.} \sim L^2$$

$$c_k = \frac{1}{2^L} \sum_{x=0}^{2^L-1} \exp\left(\frac{2\pi i k x}{2^L}\right) c_x$$

классически: $\sim 2^L \cdot L$

Квантовые алгоритмы

- приготовление начального состояния

$$\oplus$$

- унитарная эволюция

$$\oplus$$

- считывание
  (квантвое измерение: необратимость)

Почему быстрее?

Квантовый параллелизм

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |0\ldots000\rangle \\ |1\rangle &= |0\ldots001\rangle \\ |2\rangle &= |0\ldots010\rangle \\ |3\rangle &= |0\ldots011\rangle \\ &\ldots \\ |2^N-1\rangle &= |1\ldots111\rangle \end{aligned}$$

приготовим суперпозицию всех базисных состояний

$$\sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle\,|0\rangle \longrightarrow \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle\,|f(x)\rangle$$

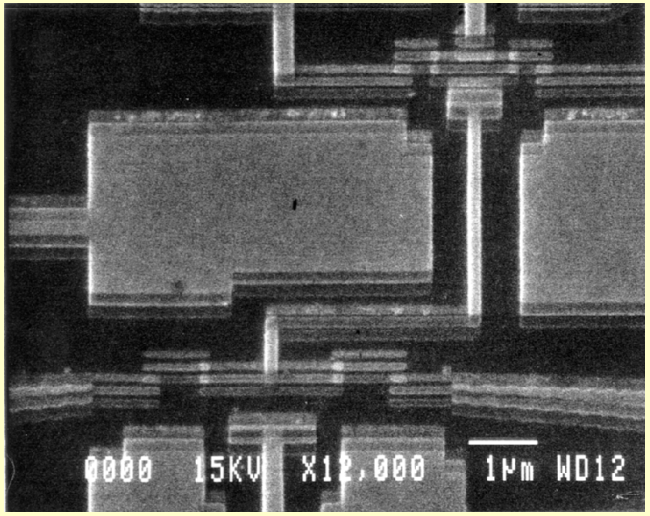
Почему не всегда быстрее?

Квантовое измерение !

Иногда удается удачно комбинировать параллелизм и измерение

Реализации

Джозефсоновские квантовые биты

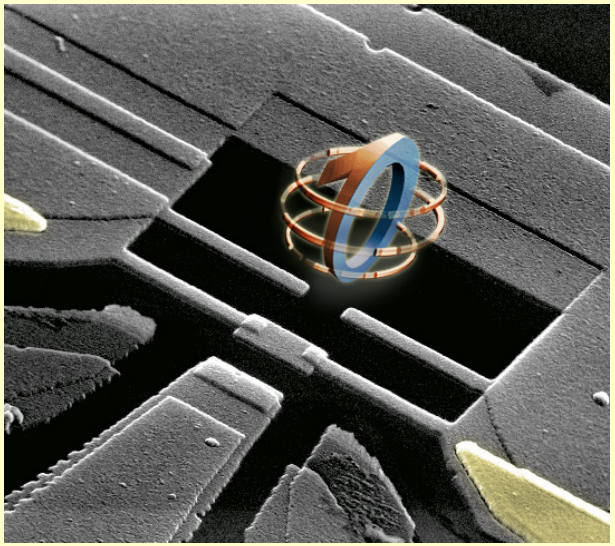


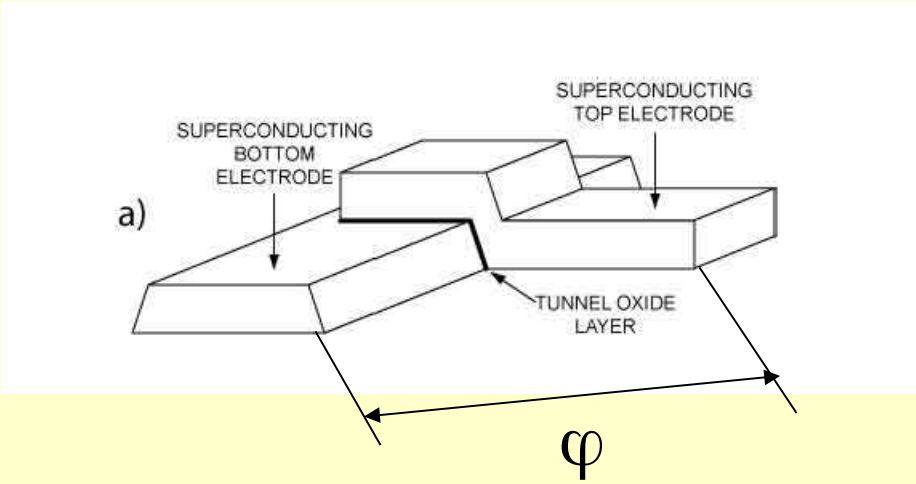
V. Bouchiat et al. (1996)

контакты малой площади 10nmx10nm

типичные емкости $C \approx 10^{-15}$ F

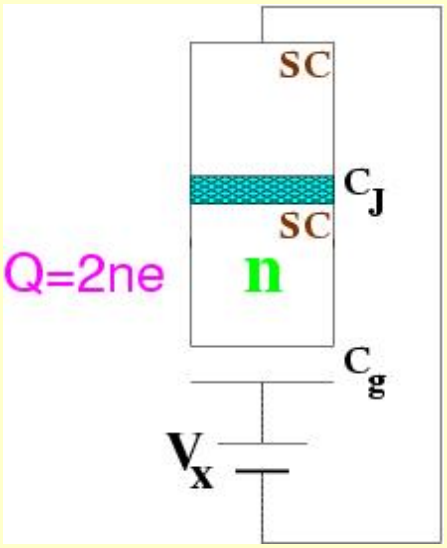
характерные энергии $E_C = e^2/2C \approx 1$ K

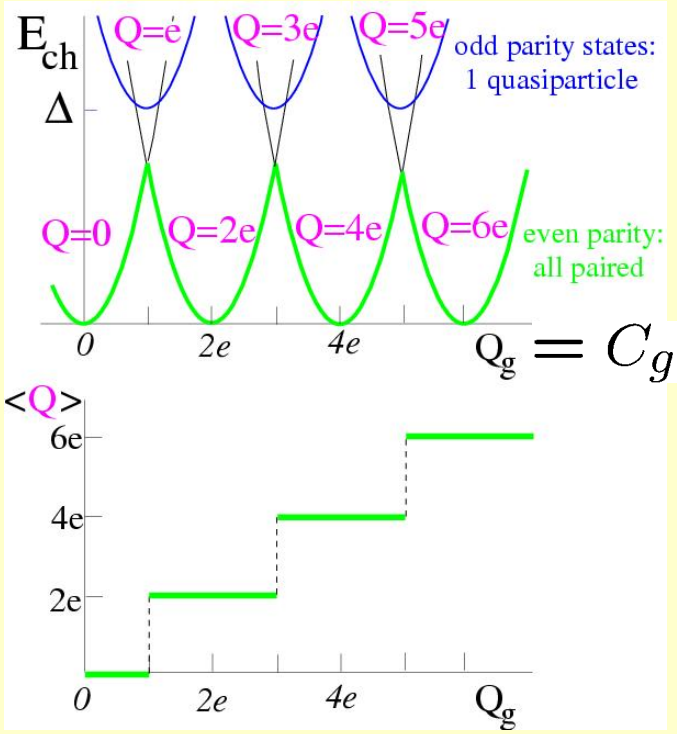




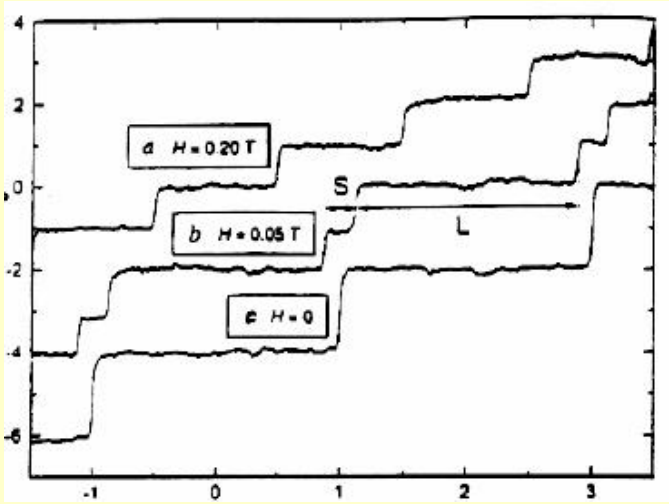
Зарядовые явления в сверхпроводящей одноэлектронной ловушке

зарядовая энергия: $$E_{\mathrm{ch}}(n, V_{\mathrm{x}}) = \frac{(2ne - C_{\mathrm{g}}V_{\mathrm{x}})^2}{2(C_{\mathrm{g}} + C_{\mathrm{J}})}$$



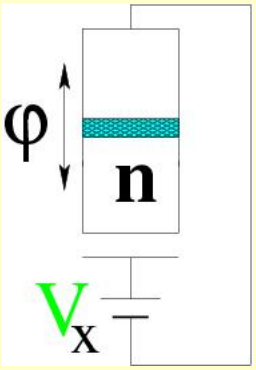


$$= C_g V_x$$

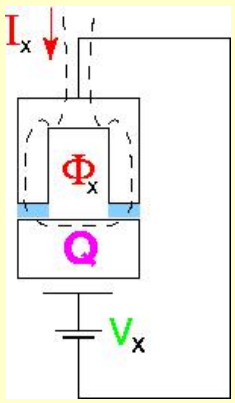


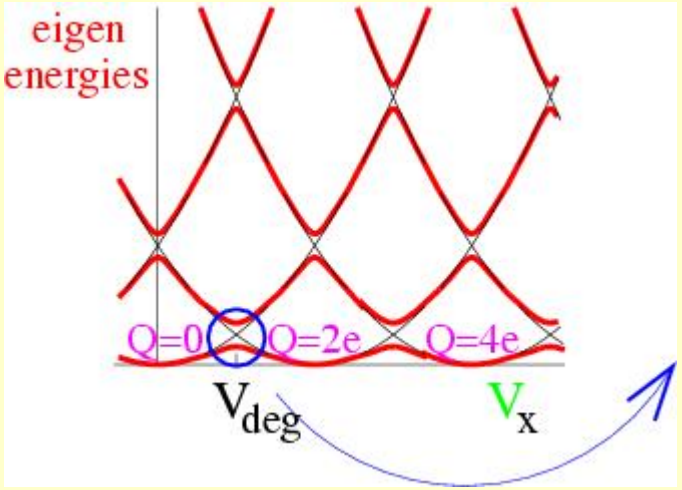
Когерентная динамика заряда

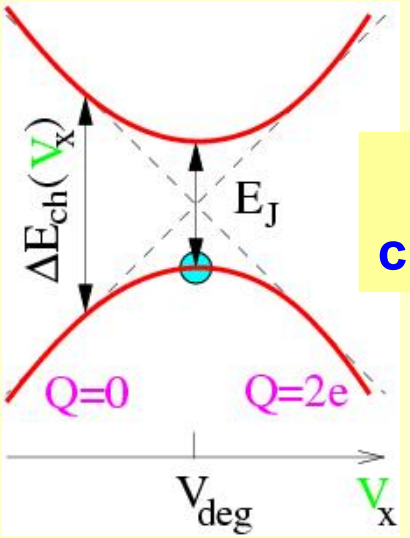
$$E_C = e^2/(2C_\Sigma) \gg E_J$$



зарядовая энергия + джозефсоновская энергия





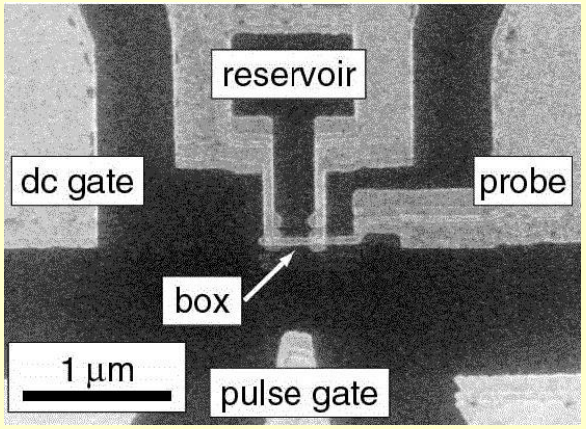


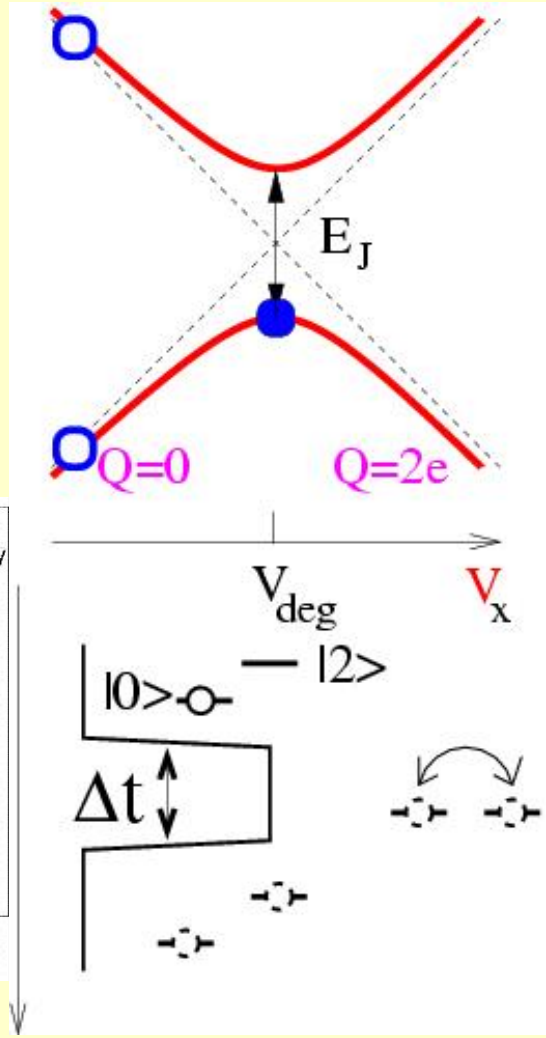
2-уровневая система = кубит

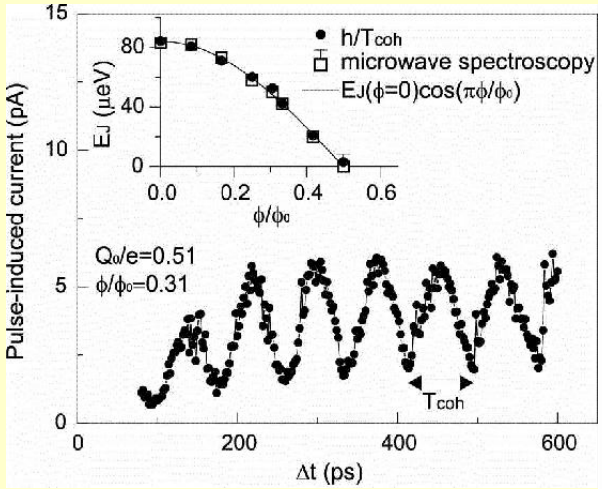
$$\mathcal{H} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} \Delta E_{\rm ch}(V_x) & E_J \\ E_J & \Delta E_{\rm ch}(V_x) \end{pmatrix} \begin{array}{l} Q = 0\rangle \\ Q = 2e\rangle \end{array}$$

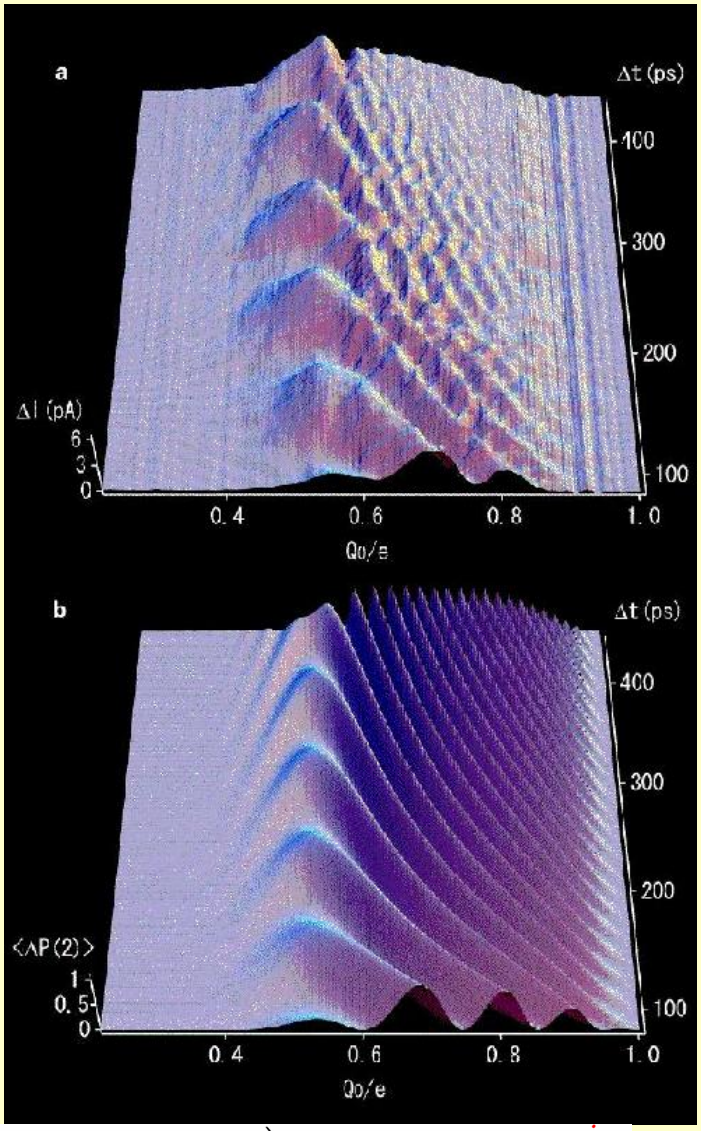
Эксперимент: когерентные колебания

Я. Накамура и др., 1999







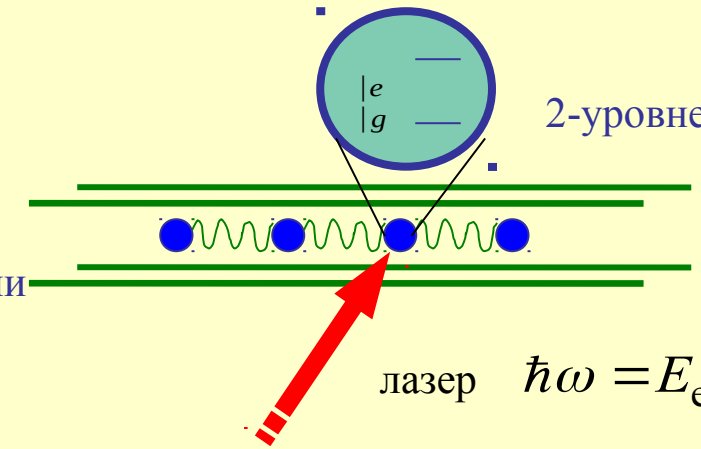


$$U_x^i = \exp(-iH_x^i \hat{\sigma}_x^i \tau/\hbar) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \frac{H_x^i \tau}{\hbar}$$

Физические реализации кубитов

Ионные ловушки

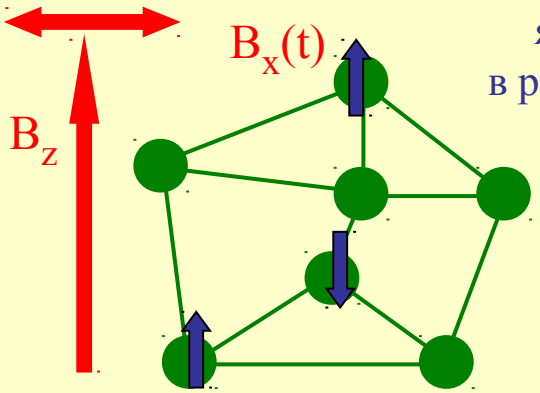
[Cirac & Zoller, …]



$$\hbar\omega = E_e - E_0 \pm \hbar\omega_{ph}$$

ЯМР

[Chuang et al., Cory et al.]

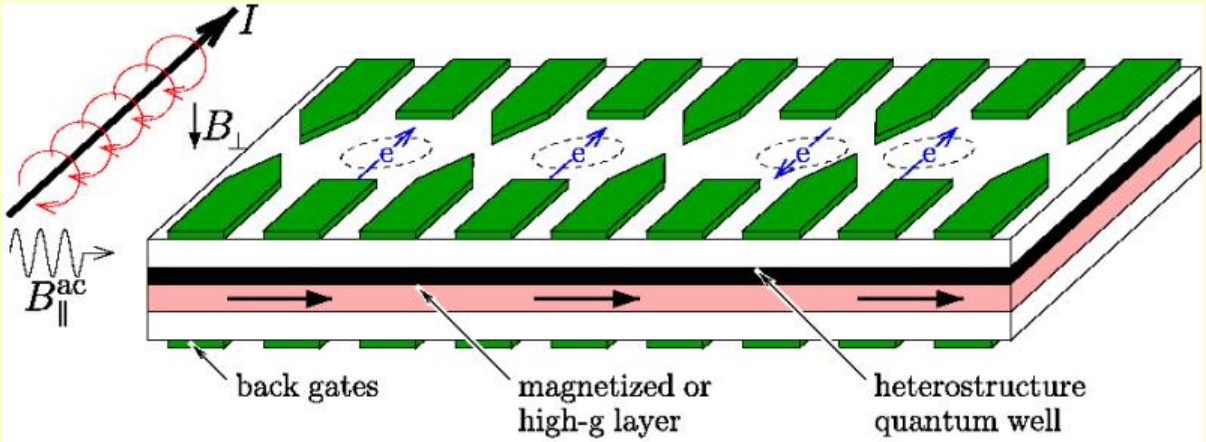


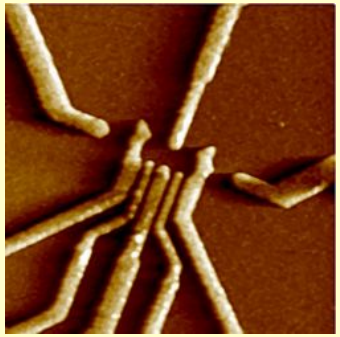
ядерные спины
в разном окружении

15 = 5 x 3

Электронные спины в полупроводниковых структурах

Loss & DiVincenzo, 1998



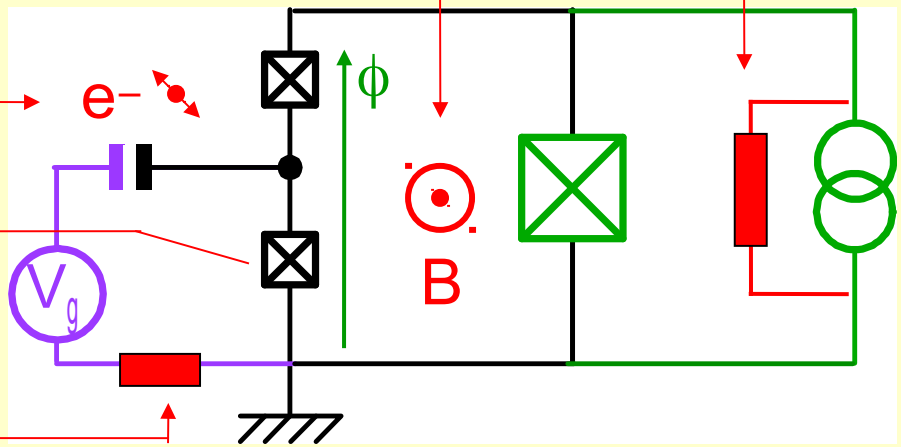


Kouwenhoven et al. (Delft)

Влияние окружения, шум

Потеря когерентности: источники шума

$$\hat{H} = 4E_C(n - n_g)^2 - E_J\cos(\phi/2)\cos\hat{\theta}$$



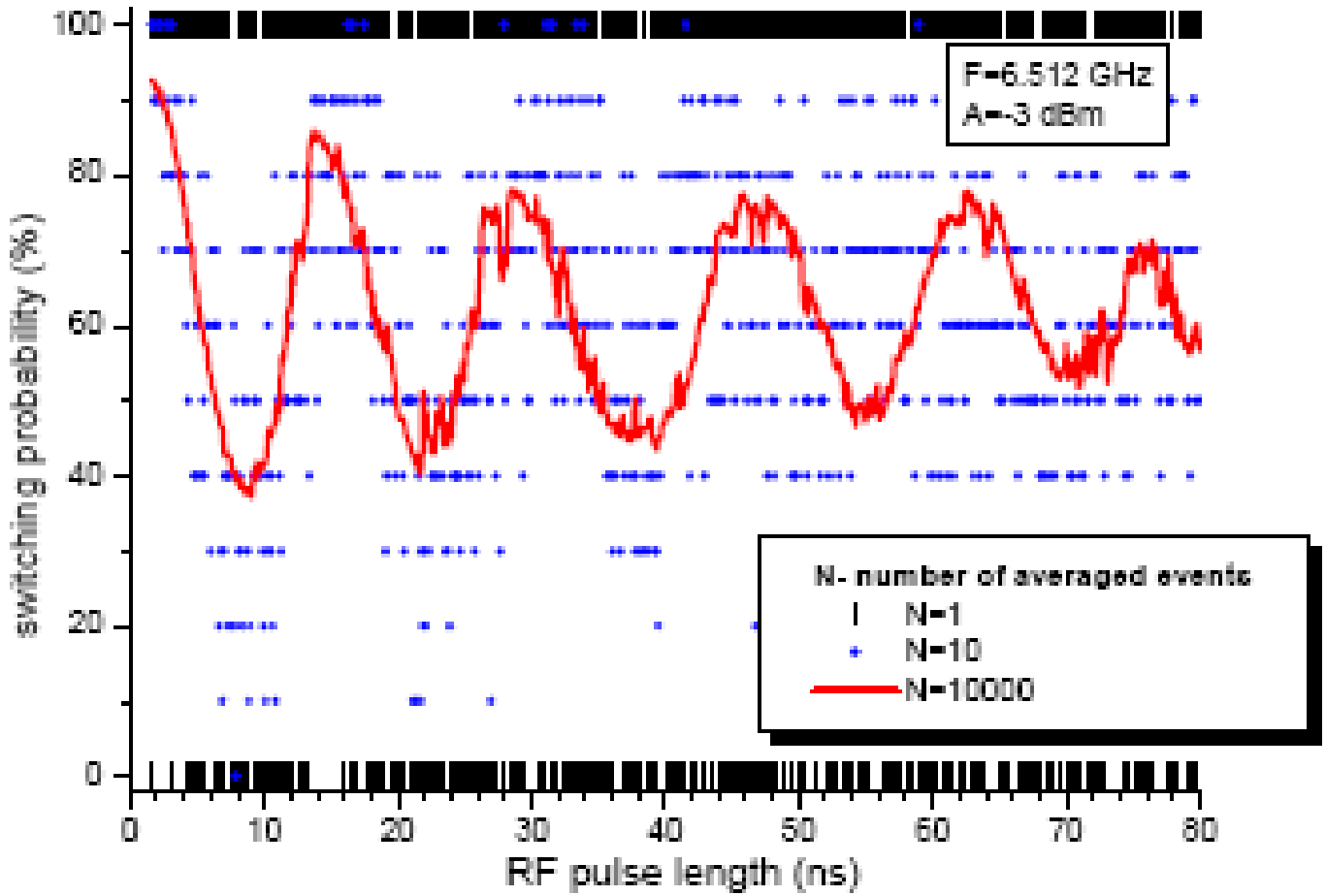
Подавление когерентности

- внешняя цепь, $Z(\omega)$
- низкочастотный шум, 1/f

Measurements: averaging over exp. runs

average values oscillate

flux qubit, Delft



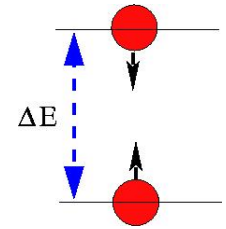
phase randomization $\longrightarrow$ decay of oscillations

Продольный шум => *чистая* дефазировка

$$\boxed{H = -\frac{1}{2}(\Delta E + X)\sigma_z + H_{bath}}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} a^2 & ab^* \\ a^*b & b^2 \end{pmatrix}$$

0



X – классическое или квантовое

$$\rho_{01} \propto \left\langle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t X(\tau)d\tau\right)\right\rangle = \left\langle \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^{\delta t} X(\tau)d\tau\right)\right]^{t/\delta t}\right\rangle \approx$$

$$\approx \left[\left\langle 1 - \cancel{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\delta t} X(\tau)d\tau} - \frac{1}{2\hbar^2}\left(\int_0^{\delta t} X(\tau)d\tau\right)^2\right\rangle\right]^{t/\delta t}$$

$$\int d\omega\, S_X(\omega)\, e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)}$$

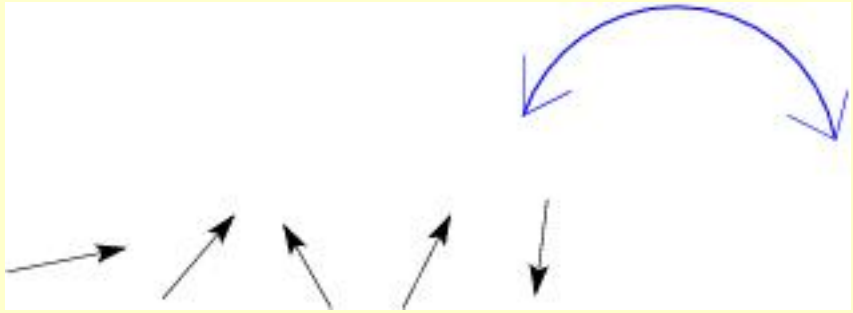
$$\rho_{01} \propto \left\langle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t X(\tau)d\tau\right)\right\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2\hbar^2}\int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \langle X(\tau_1)X(\tau_2)\rangle\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\hbar^2}\int \frac{d\omega}{2\pi} S_X(\omega)\frac{\sin^2(\omega t/2)}{(\omega/2)^2}\right)$$

$$\approx \exp\left(-\frac{1}{2\hbar^2} S_X(\omega \approx 0)\cdot t\right) = \exp\left(-\frac{t}{T_2^*}\right)$$

для гладкого спектра

Нарушение когерентности, ошибки вычислений



окруж. среда

квантовая когерентность теряется через некоторое время τ_φ

+ неточность выполнения операций

$$a\,|0\rangle + b\,|1\rangle \longrightarrow a\,|000> + b\,111>$$

Проблемы с исправлением ошибок:

1) аналоговый???
2) детектирование ошибок: измерение разрушает квантовое состояние

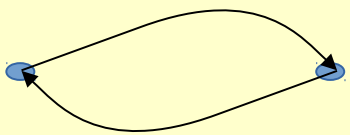
Quantum error correction

пороговая теорема

Shor 1995

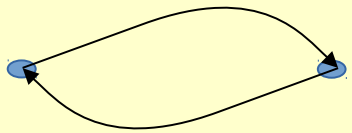
Топологические квантовые вычисления

Неабелева статистика



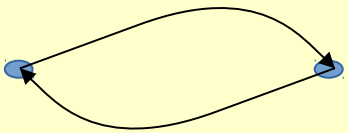
бозоны / фермионы

$$\Psi \to \pm\Psi$$



2D: anyons

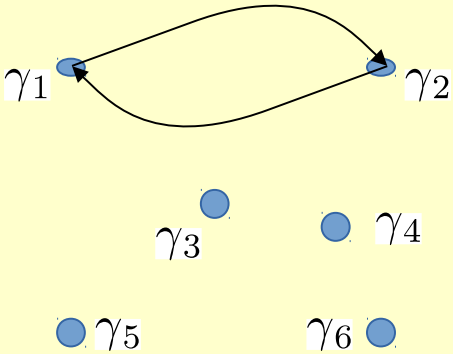
$$\Psi \to e^{i\alpha}\Psi$$



2D: non-Abelian

$$\Psi \to \hat{U}\Psi$$

нулевые моды: $[\gamma_i, H] = 0$



$$\gamma_1 \to \gamma_2$$
$$\gamma_2 \to -\gamma_1$$

$$\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_6 = \mathrm{const}$$

Majorana fermions:

$$\gamma^\dagger = \gamma$$
$$\gamma_i\gamma_j = \gamma_j\gamma_i$$
$$\gamma^2 = 1$$

«Обычный» дираковский фермион

$$a = \gamma_k + i\gamma_l$$

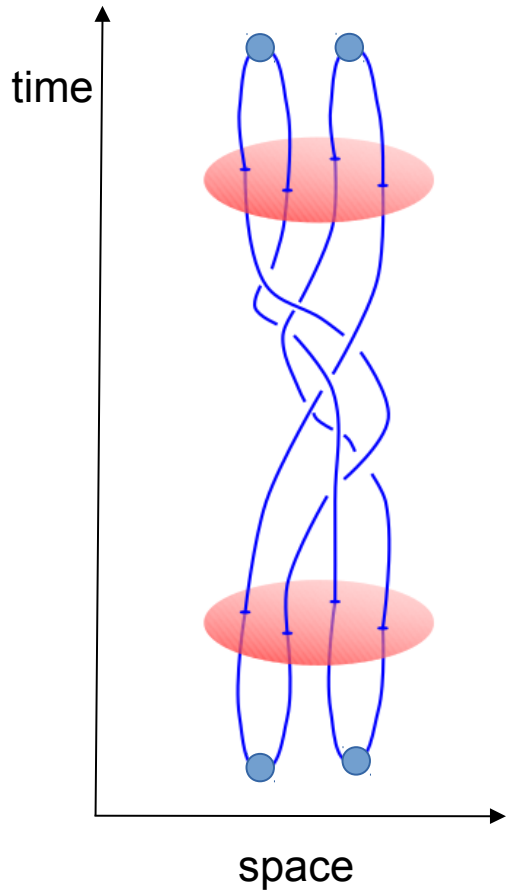
Quantum and Topological Entanglement

Majorana zero modes

measure

braid

create



Quantum Computation

quantum measurement

quantum gates

initialization

S.H.Simon, Topological Quantum

Majorana fermions in the Kitaev model

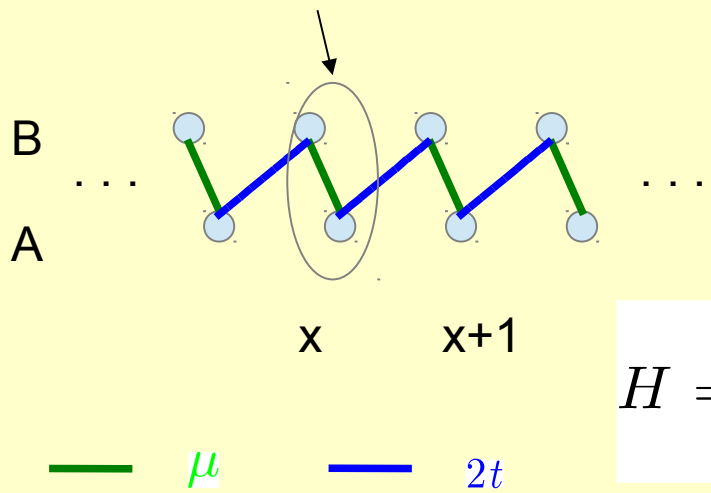
Majorana fermions at an interface of topological and trivial phases

Kitaev '00

Kitaev model

$$H = -\mu \sum_{x=1}^{N} c_x^\dagger c_x - t \sum_{x=1}^{N\ \ 1} \left[c_x^\dagger c_{x+1} + c_x c_{x+1} + \mathrm{h.c.} \right]$$

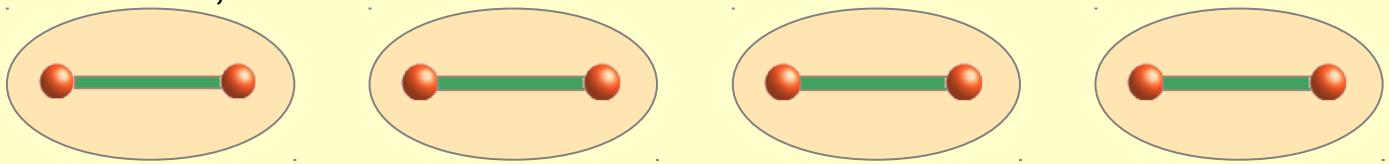
$$c_x = \frac{1}{2}(\gamma_x^A + i\gamma_x^B)$$



$$H = -\frac{i}{2}\mu \sum_{x=1}^{N} \gamma_x^A \gamma_x^B - it \sum_{x=1}^{N-1} \gamma_x^A \gamma_{x+1}^B$$

Ground-state degeneracy

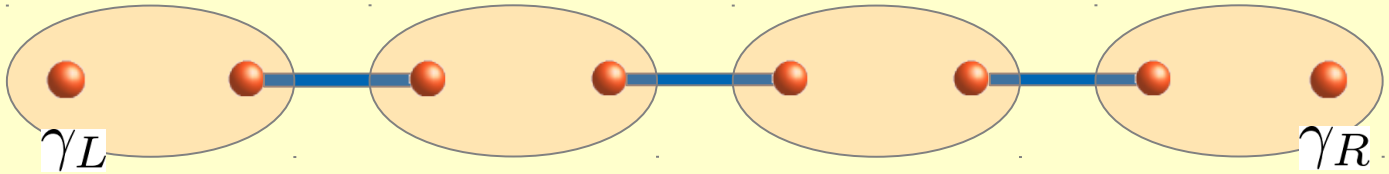
- trivial case, t=0



$\mu\, \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1$

non-degenerate ground state

- μ=0



MZM

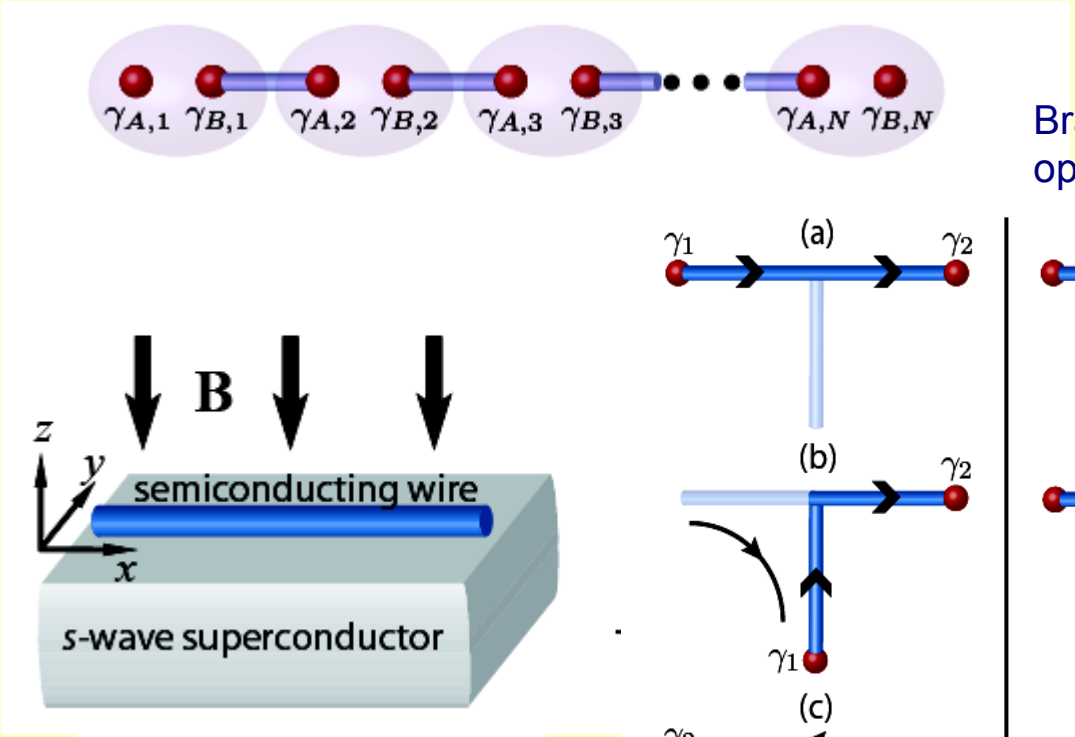
degenerate ground state

$$|\psi_0\rangle \text{ and } |\psi_1\rangle = \gamma_L |\psi_0\rangle$$

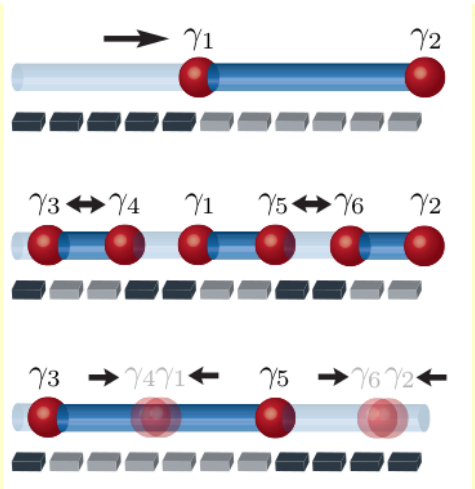
In a long finite chain: $H = i\tau\gamma_1\gamma_2, \qquad \tau \propto e^{-L/\xi}$

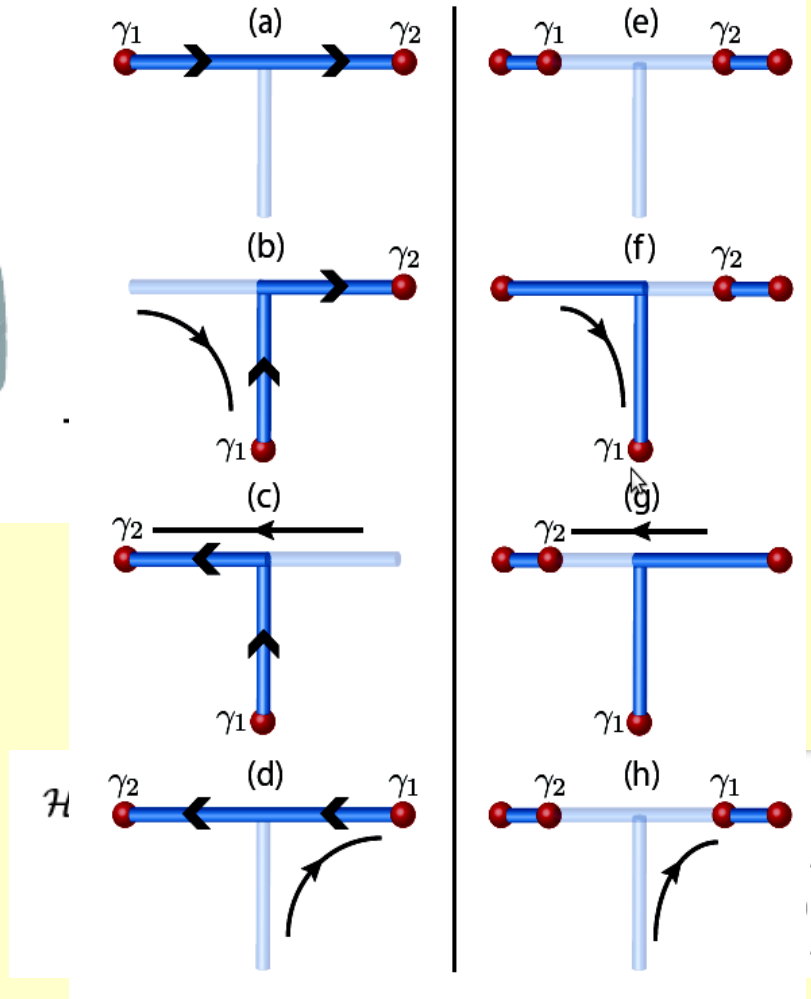
topological protection

Majorana zero modes and topologically protected qubits

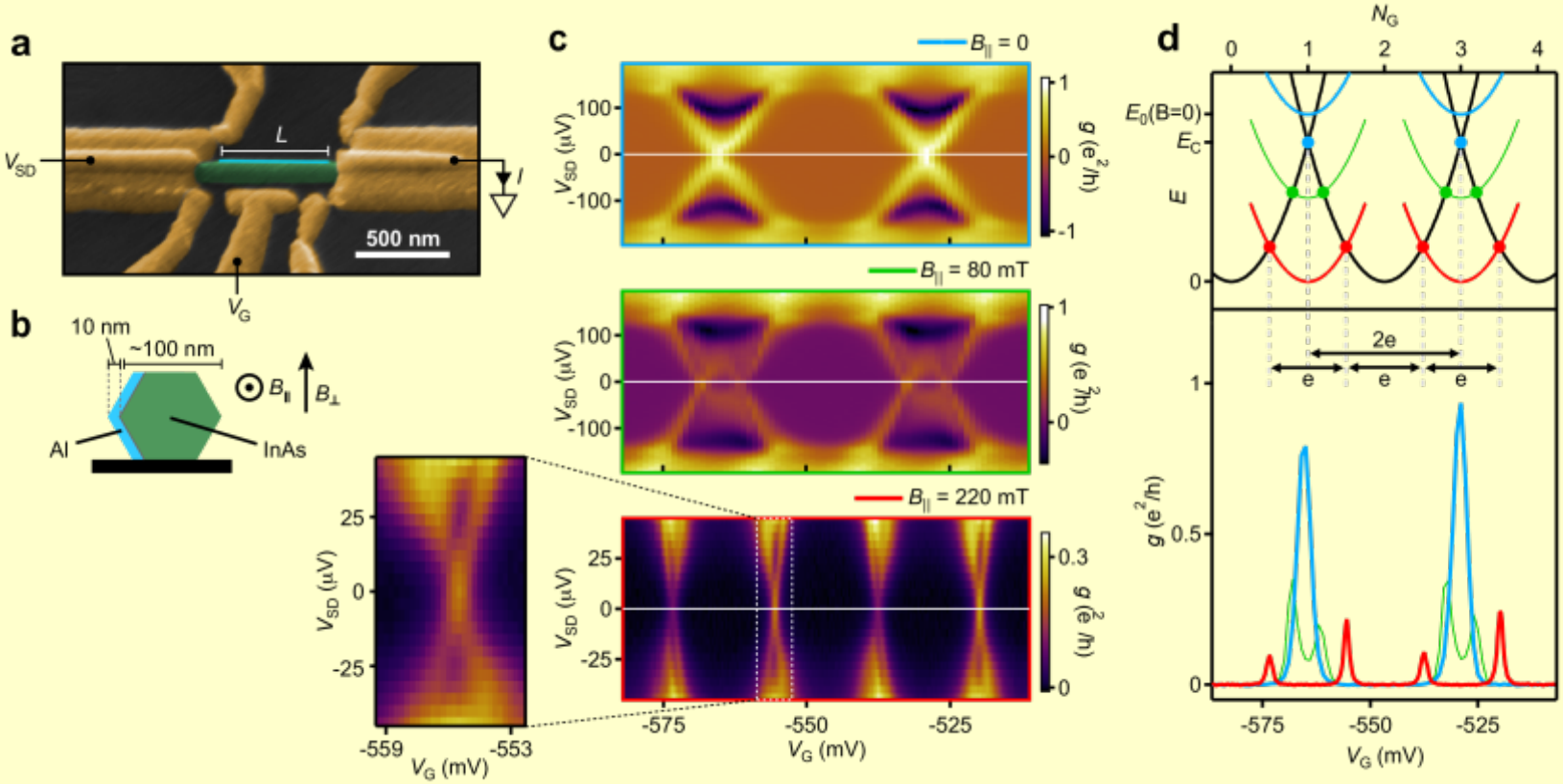


Braiding as a quantum logical operation for quantum computing



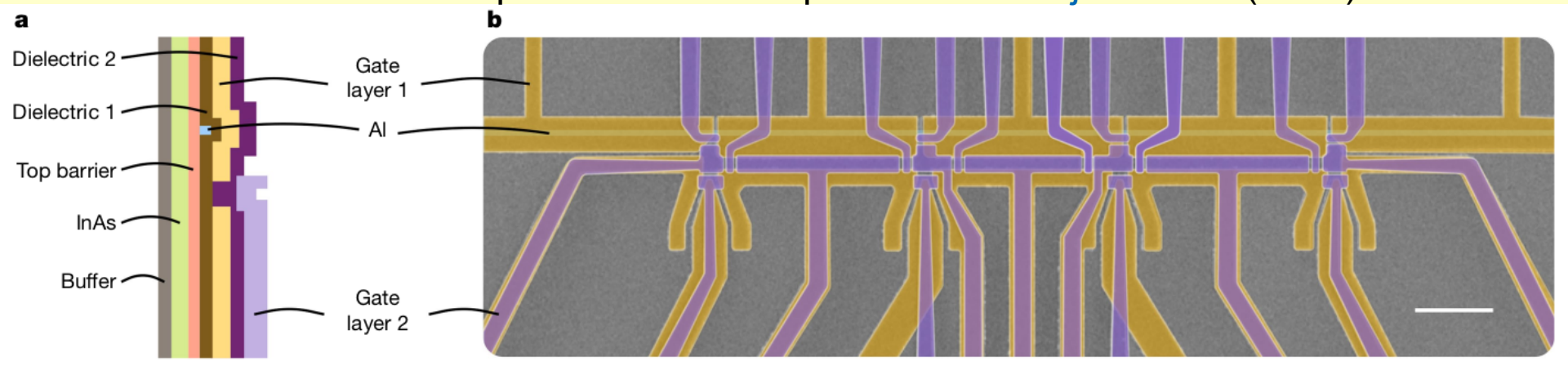


Alicea `10, `12



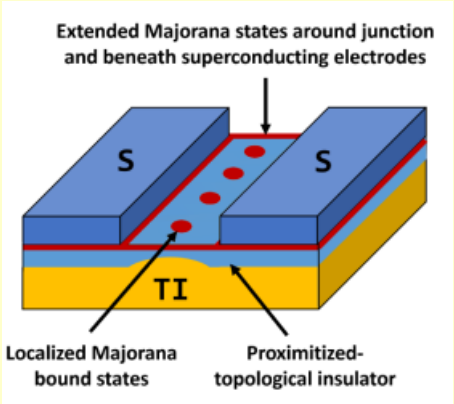
Albrecht et al. 2016

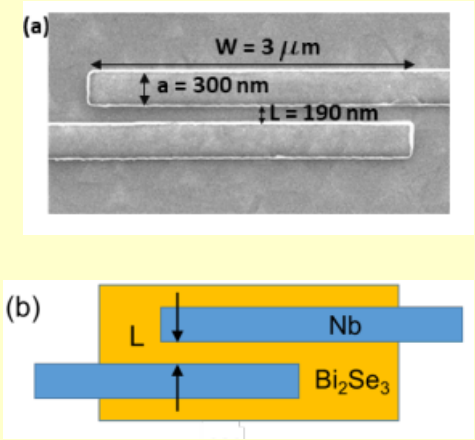
Майорановские нанопроволоки: Majorana 1 (2025)

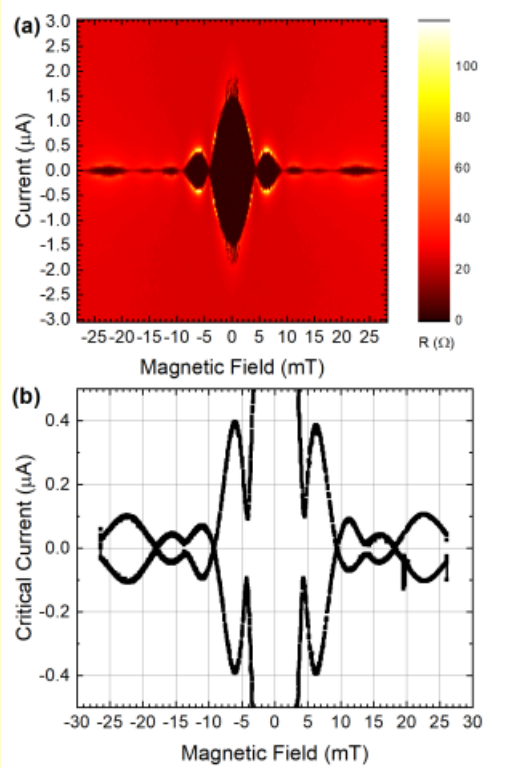


Топологический джозефсоновский STIS-контакт

эксперимент: Urbana, Harvard







Yue et al., UIUC (2024)