

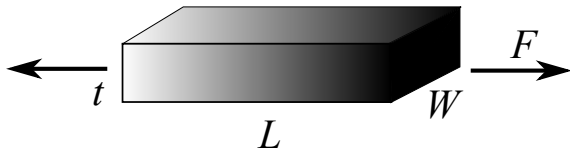
# Необычная упругость двумерных гибких материалов

Игорь Бурмистров

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН



## Закон Гука и модуль Юнга:



закон Гука:

$$\frac{F}{Wt} = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$E$  – объёмный модуль Юнга,  $\varepsilon$  – относительная деформация

Роберт Гук (1635 — 1703)

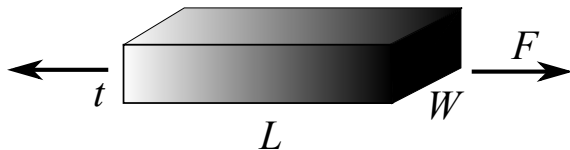
закон всемирного тяготения

интерференция света

постоянство температуры кипения

термин 'клетка'





закон Гука для тонкой пластины:

$$\sigma = \frac{F}{W} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

$Y = Et$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – натяжение

Томас Юнг (1773 — 1829)

волновая теория света

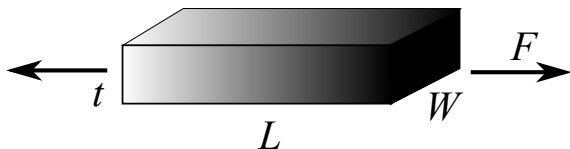
понятие 'механическая энергия'

астигматизм

термин 'индоевропейские языки'



## Закон Гука и модуль Юнга:



закон Гука для тонкой пластины:

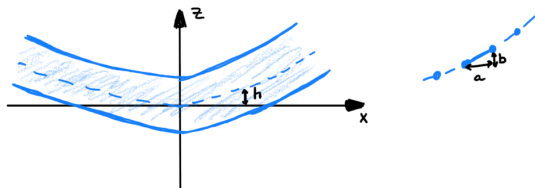
$$\sigma = \frac{F}{W} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

$Y = Et$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – натяжение

модуль Юнга для монокристаллических слоев ( $t \sim 1 \text{ \AA}$ ):

	сосна	алюминиевая фольга	графен
$Y$ , Н/м	1	7	340

$1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  метра, а толщина человеческого волоса примерно  $1000000 \text{ \AA}$   
чтобы растянуть лист графена на 1% нужно приложить давление 340 атм  
— давление на глубине 340 метров под водой



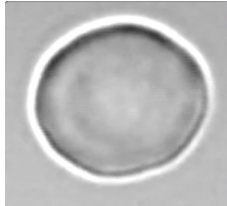
сохранение длины связи (теорема Пифагора):

$$a^2 + b^2 = \text{const} \Rightarrow a\delta a + b\delta b = 0$$

$$a = L, \quad \delta a = L\varepsilon, \quad b = z, \quad \delta b = h \Rightarrow \varepsilon = -z \frac{h}{L^2}$$

энергия изгиба ( $z \sim t$ ):  $\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim L^2 Y \varepsilon^2 \sim \kappa \frac{h^2}{L^2}$ ,  $\kappa = Y t^2$

для графена  $\kappa \sim 1 \text{ эВ} \sim 10^{-19} \text{ Дж}$ ,  $\kappa/k_B \sim 11000 \text{ K}$



Роберт Браун (1773 — 1858)  
клеточное ядро  
тепловое (броуновское) движение



характерный изгиб, связанный с тепловыми флуктуациями:

$$\mathcal{E}_{\text{bend}} \sim \kappa \frac{h^2}{L^2} \sim k_B T \Rightarrow h^2 \sim L^2 \frac{k_B T}{\kappa} \ln(L/t)$$

тепловые флуктуации важны, если

$$h > t = \sqrt{\kappa/Y} \Rightarrow L > L_* \sim \kappa / \sqrt{Y k_B T}$$

длина Гинзбурга  $L_* \sim t^{5/2}$

	бумага ( $t = 1$ мм)	графен ( $t = 1$ Å)
$L_*$	$10^3$ км	1 нм

Альберт Эйнштейн (1879 — 1955)

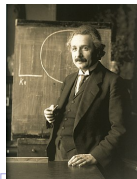
броуновское движение

фотоэффект

эффект Эйнштейна-де Гааза

специальная и общая теории

относительности



## отсутствие 2D кристаллов при конечных температурах

### Bemerkungen über Umwandlungstemperaturen

von R. PETERLS (Manchester).

In vielen, physikalisch voneinander sehr verschiedenen, aber formal analogen Erscheinungen findet man empirisch, dass sich bei einer bestimmten Temperatur ein Übergang von einem geordneten zu einem ungeordneten Zustand vollzieht<sup>1)</sup>. Typische Fälle hierfür sind der Schmelzpunkt fester Körper und der Curiepunkt des Ferromagnetismus.

Es sind viele mathematische Methoden bekannt, um das Verhalten fester Körper für Temperaturen zu untersuchen, die entweder sehr hoch oder sehr niedrig sind, gemessen an der Umwandlungstemperatur. Dagegen versagen diese Methoden gewöhnlich für die Behandlung der Erscheinungen am Übergangspunkt selbst. Die Weiss'sche Theorie des Ferromagnetismus und ihr analoge Theorien anderer Erscheinungen sind zwar auch in diesem Gebiet näherungsweise richtig, jedoch wird dort der Typus des Verhaltens am Übergangspunkt im wesentlichen durch die Näherungsannahmen bestimmt, die man zur Vereinfachung der Theorie gemacht hat. Solche Verfahren sind daher sehr nützlich zur Beschreibung von Systemen, deren qualitatives Verhalten am Übergangspunkt man schon empirisch kennt, nicht aber zu einer theoretischen Untersuchung des Übergangspunktes selbst.

Man kann aber immerhin beweisen, dass eine definierte Übergangstemperatur existieren muss, und dass sich der Übergang nicht in jeder Beziehung kontinuierlich vollzieht, obwohl diese Überlegung nichts über die Art der Singularität aussagt (insbesondere nicht, ob eine Umwandlungswärme, ein Sprung oder ein Knick in der spezifischen Wärme auftritt).

Die — an sich wohl nicht neue — Überlegung<sup>2)</sup> beruht darauf, dass in einem geordneten Zustand durch kleine Abweichungen von der idealen Ordnung die Kohärenz der geordneten Gebiete nicht gestört wird.

Ein Beispiel soll dies erläutern: Zwischen einem Kristall und einer Flüssigkeit besteht ja bekanntlich der qualitative Unter-

<sup>1)</sup> Vgl. den vorstehenden Vortrag von R. H. FOWLER.

<sup>2)</sup> Die mitgeteilte Überlegung ist im wesentlichen identisch mit der, die von H. BETHE entwickelt. L. LANDAU ist durch eine unabhängige Überlegung zu denselben Resultaten gekommen.

29

### К ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ. II

ЖЭТФ. 7, 627, 1937

Phys. Zs. Sowjet.. 11, 545, 1937

Доказывается невозможность существования кристаллов с функцией плотности, зависящей только от одной или двух координат. Рассматривается вопрос о переходах между жидкостью и кристаллом и показывается, что между ними невозможен точки Кюри, лежащие на кривой на диаграмме  $p, T$ . Рассматриваются вопросы о природе жидких кристаллов.

В предыдущей работе [1] был рассмотрен с общей точки зрения вопрос о переходах, связанных с изменением симметрии тела. В этой работе мы рассмотрим с этой точки зрения вопрос о соотношении между различными состояниями вещества.

#### § 1. Невозможность существования кристаллов с плотностью $\rho$ , зависящей от одной или двух координат

Функция плотности  $\rho$  кристалла [1] есть функция всех трех координат:  $x, y, z$ . Возникает вопрос, возможны ли случаи, в которых  $\rho$  есть функция всего двух или даже одной переменной. Кристалл с  $\rho = \rho(x)$  можно было бы рассматривать как состоящий из атомов, расположенных в виде параллельных прямых линий, причем эти линии, будучи все одинаково ориентированы по оси  $x$ , расположены совершенно беспорядочно друг относительно друга. Кристалл с  $\rho = \rho(x, y)$  должен был бы состоять как бы из параллельных плоскостей, на каждой из которых атомы расположены в определенном порядке; однако положения самих этих плоскостей беспорядочны.



## отсутствие 2D кристаллов при конечных температурах

**Beobachtung über Grenzflächengeneration**  
von R. PAIERL

In einem flüssigkeitsähnlichen Zustand oder in einem anderen Zustand, der durch die Temperatur bestimmt ist, ist die Bewegung der Atome in einem Kristall durch die Temperatur bestimmt. In einem flüssigkeitsähnlichen Zustand sind die Atome in einem ungeordneten Zustand, während in einem anderen Zustand die Atome in einem geordneten Zustand sind. Die Bewegung der Atome ist durch die Temperatur bestimmt, und die Bewegung der Atome ist durch die Temperatur bestimmt.

**29** R. PAIERL, R. H. DICKSON, R. H. DICKSON

Die Bewegung der Atome in einem Kristall ist durch die Temperatur bestimmt. In einem flüssigkeitsähnlichen Zustand sind die Atome in einem ungeordneten Zustand, während in einem anderen Zustand die Atome in einem geordneten Zustand sind. Die Bewegung der Atome ist durch die Temperatur bestimmt, und die Bewegung der Atome ist durch die Temperatur bestimmt.

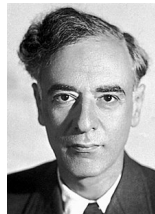
сэр Рудольф Пайерлс  
(1907 — 1995)

концепция 'дырок'  
зона Бриллюэна  
процессы переброса  
подстановка Пайерлса  
диамагнетизм металлов



Лев Ландау  
(1908 — 1968)

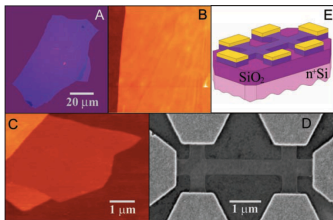
уровни Ландау  
теория переходов 2-ого  
рода  
теория сверхтекучести  
теория Ферми жидкости  
затухание Ландау



## Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films

K. S. Novoselov,<sup>1</sup> A. K. Geim,<sup>1\*</sup> S. V. Morozov,<sup>2</sup> D. Jiang,<sup>1</sup>  
Y. Zhang,<sup>1</sup> S. V. Dubonos,<sup>2</sup> I. V. Grigorieva,<sup>1</sup> A. A. Firsov<sup>2</sup>

22 October 2004 VOL 306 SCIENCE www.sciencemag.org



сэр Андрей Гейм



## LETTERS

### The structure of suspended graphene sheets

Jannik C. Meyer<sup>1</sup>, A. K. Geim<sup>2</sup>, M. I. Katsnelson<sup>3</sup>, K. S. Novoselov<sup>2</sup>, T. J. Booth<sup>2</sup> & S. Roth<sup>1</sup>

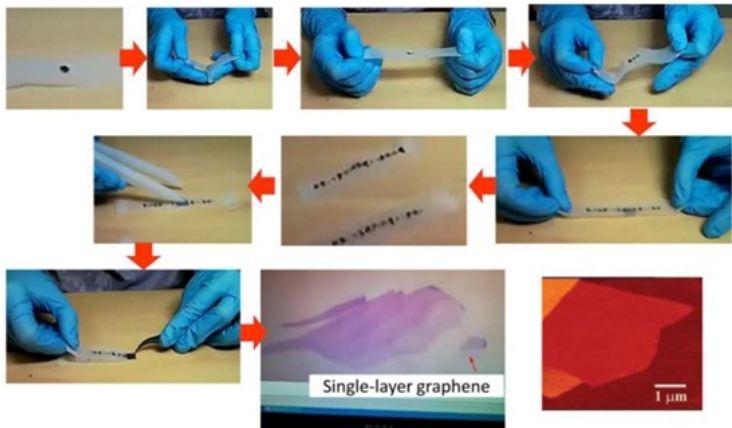


сэр Константин  
Новоселов



# Графен в лаборатории:

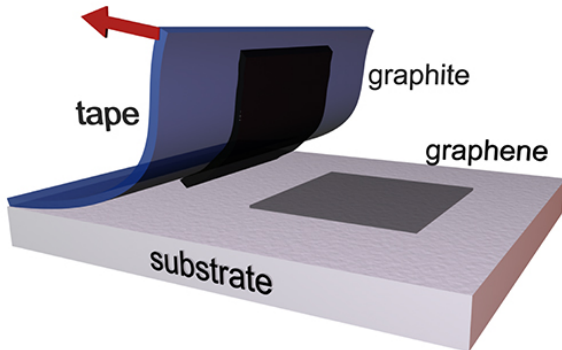
техника получения графена с помощью скотча



Source: *The Royal Society of Chemistry* 2013

## Графен в лаборатории:

техника получения графена с помощью скотча



<https://physicsworld.com/a/how-to-make-graphene/>

Graphene  
Scratching  
101

биомедицинские: сенсоры, доставщики лекарств

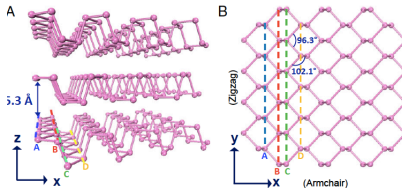
электроника: графеновые конденсаторы, графеновые транзисторы

сенсоры: детектирование примесных, потенциально вредных, молекул

мембраны: фильтрация воды от вредных примесей

[https://en.wikipedia.org/wiki/Potential\\_applications\\_of\\_graphene#Drug\\_delivery](https://en.wikipedia.org/wiki/Potential_applications_of_graphene#Drug_delivery)

- 2D materials with orthorhombic crystal structure
  - single layer black phosphorous (phosphorene)



orthorhombic crystal structure with  $D_{2h}$  (Pmna) point group

a figure adopted from Ling, Wang, Huang, Xia, Dresselhaus, PNAS (2015)

- metal monochalcogenide monolayers (SiS, SiSe, GeS, GeSe, SnS, SnSe)
- monolayers GeAs<sub>2</sub>, WTe<sub>2</sub>, ZrTe<sub>5</sub>, Ta<sub>2</sub>NiS<sub>5</sub>

[for a review, see Li et al., InfoMat (2019)]

## Почему же графен существует:

наивная причина: очень большая изгибная жесткость  $\kappa$

при комнатной температуре согласно Ландау и Пайерлсу тепловые флуктуации разрушат лист графена размера  $L \sim 10^{190}$  м

более фундаментальная причина: длинно-коррелированное взаимодействие изгибных флуктуаций приводит к зависимости изгибной жесткости и модуля Юнга от размера мембраны,

$$\kappa(L) = \kappa_0 \begin{cases} 1, & L < L_*, \\ (L/L_*)^\eta, & L > L_*. \end{cases}$$
$$Y(L) = Y_0 \begin{cases} 1, & L < L_*, \\ (L/L_*)^{2-2\eta}, & L > L_*. \end{cases}$$

$\eta \approx 0.795$  — универсальный индекс для всех мембран



## Переход скомкования (crumpling):

характерный изгиб, связанный с тепловыми флуктуациями:

$$(h/L)^2 \sim \frac{k_B T}{\kappa_0}$$

нет  $\ln(L/t)$  из-за зависимости  $\kappa$  от длины  $L$ !

плоская фаза при  $T \lesssim \kappa_0$



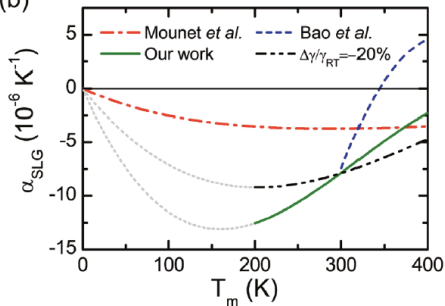
смятая фаза при  $T \gtrsim \kappa_0$



отрицательный коэффициент теплового расширения:

$$\alpha_T \simeq -\frac{k_B}{4\pi\eta\kappa_0}$$

для графена  $\alpha_T \approx 10^{-5} \text{ 1/K}$



натяжение  $\sigma$  приводит к появлению нового масштаба длины (по размерности):

$$[\sigma] \sim [Y], \quad [\varkappa] \sim [Y] [L]^2 \quad \Rightarrow \quad [L] \sim \sqrt{[\varkappa]/[\sigma]}$$

натяжение  $\sigma$  приводит к появлению нового масштаба длины (с учетом зависимости изгибной жесткости от масштаба):

$$L_\sigma = \sqrt{\varkappa(L_\sigma)/\sigma} \quad \Rightarrow \quad L_\sigma = L_* (\sigma_*/\sigma)^{1/(2-\eta)}$$

характерный масштаб натяжения:

$$L_\sigma \sim L_* \quad \Rightarrow \quad \sigma_* = Y_0 k_B T / \varkappa_0$$

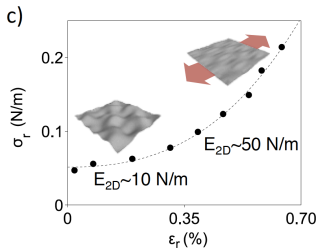
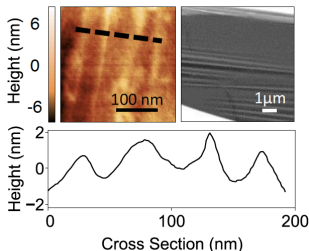
для графена  $\sigma_* \approx 0.1$  Н/м

## Аномальный закон Гука:

аномальный закон Гука при  $\sigma \ll \sigma_*$

$$\varepsilon \sim \frac{\sigma}{Y(L_\sigma)} \sim \frac{\sigma_*}{Y_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{\eta}{2-\eta} \approx 0.4$$

экспериментальное наблюдение аномального закона Гука в графене



эксперимент в группе К. Болотина (Свободный университет Берлина, Германия)

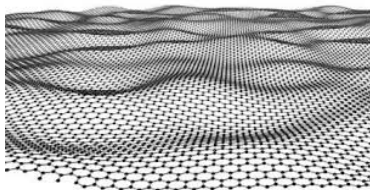
В эксперименте  $\alpha = 0.1$  вместо 0.4 как предсказывает теория. Это связано с влиянием беспорядка, что приводит к уменьшению  $\eta$  примерно в 4 раза.

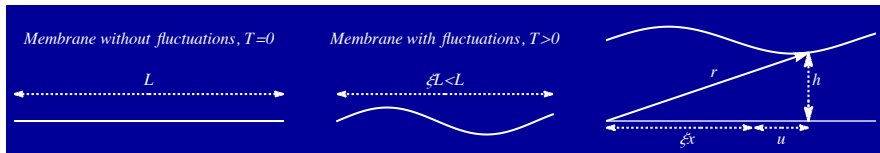
## Заключение:

---

необычные механические свойства графена: аномальный закон Гука, отрицательный коэффициент теплового расширения, отрицательный коэффициент Пуассона

интересная физика все еще существует вокруг нас!





- parametrization of the surface 3D vector  $\vec{r}(\mathbf{x})$  depending on 2D vector  $\mathbf{x}$ .
- surface is characterized by the internal metric tensor and curvature

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{\partial r_a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial r_a}{\partial x^\beta}, \quad K_{\alpha\beta} = n_a \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial r_a}{\partial x^\beta}$$

where  $\mathbf{n}$  is a normal vector to the surface.

- free energy of the membrane

$$F = \int d^2 \mathbf{x} \sqrt{\det g} \left[ \frac{w}{2} (\text{tr } K)^2 + \tilde{w} \det K + \frac{t}{2} \text{tr } g + u \text{tr } g^2 + v (\text{tr } g)^2 + \dots \right]$$

[Paczuski, Kardar, Nelson (1988)]

- uniform stretching of the membrane  $\mathbf{r} = \xi_0 \mathbf{x}$ :

$$g_{\alpha\beta} = \xi_0^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad K_{\alpha\beta} = 0, \quad F/L^2 = t\xi_0^2 + 2(u + 2v)\xi_0^4$$

- mean-field Landau-type transition

$$\xi_0^2 = \begin{cases} -t/(u + 2v), & t < 0 \quad \text{flat phase} \\ 0, & t > 0 \quad \text{crumpled phase} \end{cases}$$

$$F_0/L^2 = t^2/(u + 2v)$$

- free energy of the membrane

$$F = \int d^2 \mathbf{x} \sqrt{\det g} \left[ \frac{w}{2} (\text{tr } K)^2 + \tilde{w} \det K + \frac{t}{2} \text{tr } g + u \text{tr } g^2 + v (\text{tr } g)^2 + \dots \right]$$

- parametrization of the position on the membrane  $\mathbf{R} = \xi_0 \mathbf{r}$ :

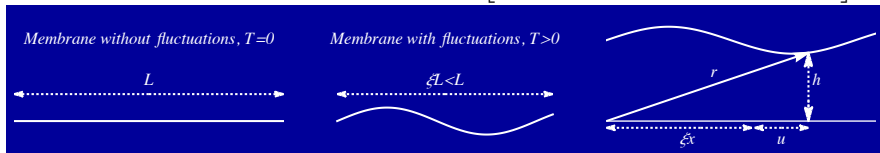
$$F = F_0 + \int d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{\varkappa}{2} (\text{tr } K)^2 + \tilde{\varkappa} \det K + \mu \text{tr } U^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr } U)^2 \right]$$

where  $\varkappa = w\xi_0^2$ ,  $\tilde{\varkappa} = \tilde{w}\xi_0^2$ ,  $\mu = 4u\xi_0^4$ ,  $\lambda = 8v\xi_0^4$ , and deformation tensor

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial r_a}{\partial x^\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right), \quad K_{\alpha\beta} = n_a \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial r_a}{\partial x^\beta}$$



- membrane's free energy  $F = \int d^2\mathbf{x} \left[ \frac{\kappa}{2} (\text{tr } K)^2 + \mu \text{tr } U^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr } U)^2 \right]$



- parametrization of the position on the membrane  $\mathbf{r} = \xi \mathbf{x} + \mathbf{u} + h \mathbf{e}_z$ :

$$\text{tr } K = \mathbf{n} \Delta \mathbf{r} \simeq \Delta h, \quad U_{\alpha\beta} = \frac{\xi^2 - 1}{2} \delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta},$$

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\xi \partial_\alpha u_\beta + \xi \partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\gamma \partial_\beta u_\gamma + \partial_\alpha h \partial_\beta h)$$

- final form of the free energy

$$F = L^2 (\lambda + \mu) \frac{(\xi^2 - 1)^2}{2} + (\lambda + \mu) \frac{\xi^2 - 1}{2} \int d^2\mathbf{x} [\partial_\alpha h \partial_\alpha h + \partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha u_\beta] \\ + \int d^2\mathbf{x} \left[ \frac{\kappa}{2} (\Delta h)^2 + \mu u_{\alpha\beta} u_{\beta\alpha} + \frac{\lambda}{2} u_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} \right]$$

- Helmholtz free energy

$$\mathcal{F} = -T \ln \int D[h, \mathbf{u}] e^{-F/T},$$

$$F = L^2(\lambda + \mu) \frac{(\xi^2 - 1)^2}{2} + (\lambda + \mu) \frac{\xi^2 - 1}{2} \int d^2 \mathbf{x} [\partial_\alpha h \partial_\alpha h + \partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha u_\beta] \\ + \int d^2 \mathbf{x} \left[ \frac{\kappa}{2} (\Delta h)^2 + \mu u_{\alpha\beta} u_{\beta\alpha} + \frac{\lambda}{2} u_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} \right]$$

- tension

$$\sigma = \frac{1}{L^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi^2}$$

- Gibbs free energy

$$\Phi = \mathcal{F} - \sigma(\xi^2 - 1), \quad \xi^2 - 1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$$

- Hooke's law in the absence of fluctuations ( $u_x = u_y = h = 0$ )

$$\sigma = (\lambda + \mu)(\xi^2 - 1)$$

- o Lagrangian for a membrane

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho \int d^2x \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \right] - F,$$

$$F = L^2(\lambda + \mu) \frac{(\xi^2 - 1)^2}{2} + (\lambda + \mu) \frac{\xi^2 - 1}{2} \int d^2\mathbf{x} [\partial_\alpha h \partial_\alpha h + \partial_\alpha u_\beta \partial_\alpha u_\beta] \\ + \int d^2\mathbf{x} \left[ \frac{\varkappa}{2} (\Delta h)^2 + \mu u_{\alpha\beta} u_{\beta\alpha} + \frac{\lambda}{2} u_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} \right]$$

where  $\rho$  is the mass density of a membrane

---

**NB**  $\varkappa(\Delta h)^2 \sim Y(\nabla h)^4$  or  $\varkappa/Y \sim \langle h^2 \rangle \sim T/(\varkappa L^2)$  hence  $L_*^2 \sim \varkappa^2/(YT)$

- Fourier transform to momentum and frequency space

$$h(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^2 \mathbf{q} d\omega}{(2\pi)^3} h(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x} - i\omega t}, \quad u_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^2 \mathbf{q} d\omega}{(2\pi)^3} u_\alpha(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x} - i\omega t}$$

- quadratic part of the Lagrangian

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q} d\omega}{(2\pi)^3} \left[ h(\mathbf{q}, \omega) (\rho\omega^2 - \kappa q^4) h(-\mathbf{q}, -\omega) + u_\alpha(\mathbf{q}, \omega) M_{\alpha\beta} u_\beta(-\mathbf{q}, -\omega) \right]$$

$$M_{\alpha\beta} = [(\rho\omega^2 - \kappa q^4 - \mu\xi^2 q^2 - (\lambda + \mu)(\xi^2 - 1)q^2)] \delta_{\alpha\beta} - (\lambda + \mu)\xi^2 q_\alpha q_\beta$$

- spectrum of in-plane transverse and longitudinal phonons (at  $q \rightarrow 0$ )

$$\det M = 0 \implies \omega_q^{(l)} = q \sqrt{[\sigma_0 + (2\mu + \lambda)\xi^2]/\rho},$$

$$\omega_q^{(t)} = q \sqrt{[\sigma_0 + \mu\xi^2]/\rho}$$

where  $\sigma_0 = (\lambda + \mu)(\xi^2 - 1)$ .

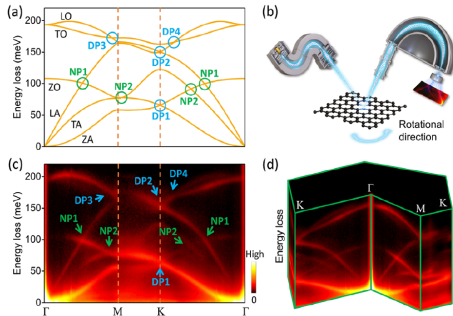
- spectrum of flexural phonons

$$\omega_q^{(f)} = \sqrt{[q^2(\lambda + \mu)(\xi^2 - 1) + q^4 \kappa]/\rho}$$

- out-of-plane (flexural) phonons with spectrum

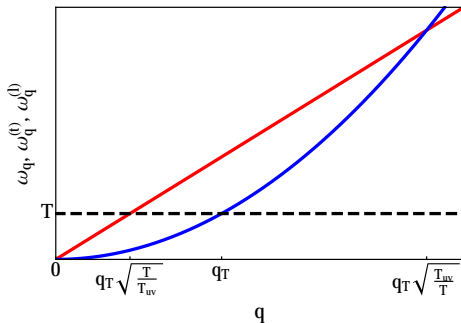
$$\omega_q^{(f)} = q^2 \sqrt{\kappa_0/\rho},$$

where  $\kappa_0$  is bending rigidity



measurements of the phonon spectrum in graphene by means of high-resolution electron energy-loss spectroscopy

a figure adopted from Jiade Li et al., Phys. Rev. Lett. (2023)



- temperature momentum:  $\hbar\omega_q \sim T \implies q_T = \frac{\rho^{1/4} T^{1/2}}{\hbar^{1/2} \varkappa^{1/4}}$
- ultra-violet energy scale:  $T_{uv} \approx g\varkappa$ ,  $g = \frac{\hbar\mu}{\rho^{1/2} \varkappa^{3/2}}$
- for graphene:  $q_T \approx 0.1 \text{ nm}^{-1}$ ,  $g \approx 0.05$ ,  $T_{uv} \approx 500 \text{ K}$

- stretching of 2D membrane at finite temperature in the absence of tension

$$0 = \frac{1}{L^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi^2} \implies \xi^2 = 1 - \frac{1}{2} \langle (\nabla h)^2 + (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle$$
$$\xi^2 = 1 - T \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{2\kappa q^4} = 1 - \frac{T}{4\pi\kappa} \ln \frac{L}{a}$$

- $\xi^2 = 0$  at any  $T > 0$  in the thermodynamic limit  $L \rightarrow \infty$ .  
[Peierls (1934), Landau (1937)]
- 2D crystal is unstable in harmonic approximation. But phonons do interact

---

**NB** for graphene  $\kappa \approx 1.1$  eV, so for  $L \sim 1$   $\mu\text{m}$  reduction of  $\xi^2$  is 2% at room temperature!

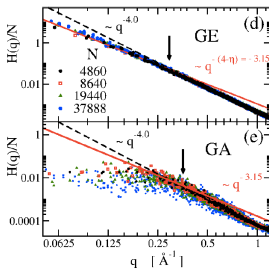
**NB** PROBLEM: to estimate the contribution from  $(\nabla \mathbf{u})^2$  term into  $\xi^2$ .

- renormalization in the absence of tension,  $\sigma = 0$ ,
- bending rigidity
- Young's modulus ( $Y = \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{(2\mu+\lambda)}$ )

$$\kappa(q) \simeq \kappa \begin{cases} 1, & q \gg q_* \\ (q_*/q)^\eta, & q \ll q_* \end{cases}$$

$$Y(q) \simeq Y \begin{cases} 1, & q \gg q_* \\ (q/q_*)^{2-2\eta}, & q \ll q_* \end{cases}$$

[Nelson, Peliti (1987); Aronovitz, Lubensky (1988)]



Costamagna, Neek-Amal, Los, Peeters (2012)

$$H(q) \sim \frac{T}{\kappa(q)q^4}$$

- Ginzburg length

$$q_*^{-1} \sim \frac{\kappa}{\sqrt{YT}}$$

numerical computations give  $\eta \approx 0.795 \pm 0.01$

[Tröster (2013)]

**NB** for graphene  $\kappa_0 \approx 1.1$  eV,  $Y \approx 340$  N/m, and  $q_*^{-1} \approx 1$  nm at room temperature



- stretching of 2D membrane at finite temperature in the absence of tension

$$0 = \frac{1}{L^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi^2} \implies \xi^2 = 1 - \frac{1}{2} \langle (\nabla h)^2 + (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle$$
$$\xi^2 = 1 - T \int_{q < q_*} \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{q^2}{2\kappa(q)q^4} = 1 - \frac{T}{4\pi\eta\kappa}$$

- crumpling transition at  $T_{\text{cr}} = 4\pi\eta\kappa$  ( $\xi^2 = 0$  at  $T \geq T_{\text{cr}}$ )

[Paczuski, Kardar, Nelson (1988); David, Gitter (1988)]



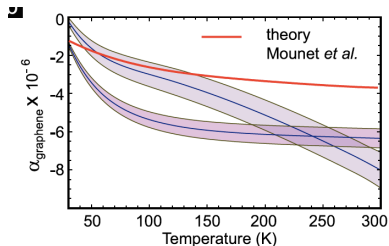
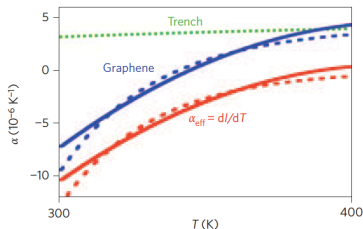
flat phase  
 $T < T_{\text{cr}}$



crumpled phase  
 $T > T_{\text{cr}}$

- negative thermal expansion coefficient (at  $T < T_{cr}$ )

$$\alpha_T = \frac{\partial \xi^2}{\partial T} = -\frac{1}{4\pi\eta\chi}$$



[adopted from Bao et al. (2009); Singh et al. (2010)]

- the effect of tension  $\sigma$  on the phonon spectrum (in harmonic approximation) for in-plane phonons

$$\omega_q^{(t)} = q\sqrt{(\mu + \sigma)/\rho}, \quad \omega_q^{(l)} = q\sqrt{(\lambda + \mu + \sigma)/\rho},$$

and for flexural phonons

$$\omega_q^{(f)} = \sqrt{(\kappa q^4 + \sigma q^2)/\rho} = \begin{cases} q^2 \sqrt{\kappa/\rho}, & q \gg q_\sigma^{(0)}, \\ q\sqrt{\sigma/\rho}, & q \ll q_\sigma^{(0)}, \end{cases}$$

where  $q_\sigma^{(0)} = \sqrt{\sigma/\kappa}$

- tension stops the renormalization of bending rigidity and Young's modulus

$$\kappa(q) \simeq \kappa \begin{cases} 1, & q_* \ll q, \\ (q_*/q)^\eta, & q_\sigma \ll q \ll q_*, \\ (q_*/q_\sigma)^\eta, & q \ll q_\sigma, \end{cases} \quad Y(q) \simeq Y \begin{cases} 1, & q_* \ll q, \\ (q/q_*)^{2-2\eta}, & q_\sigma \ll q \ll q_*, \\ (q_\sigma/q_*)^{2-2\eta}, & q \ll q_\sigma, \end{cases}$$

where  $q_\sigma = q_* (\sigma/\sigma_*)^{1/(2-\eta)}$  and  $\sigma_* = \kappa q_*^2 \sim TY/\chi$

- definition:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_l}$$

where  $\varepsilon_l$  - longitudinal stretching,  $\varepsilon_{\perp}$  - transverse deformation

- classical value

$$\nu_{\text{cl}} = \frac{\lambda}{2\mu + (D-1)\lambda}$$

where  $\mu$  and  $\lambda$  are Lamé coefficients

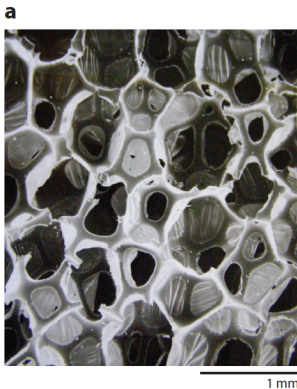
- thermodynamic stability:

$$-1 < \nu < 1/(D-1)$$

- for example,  $\nu = 0.33$  for aluminum

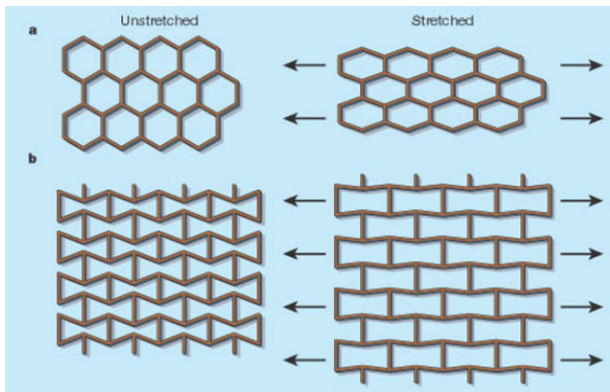
- polyurethane foam with reentrant structure:  $\nu = -0.7$

[Lakes, Science (1987)]



[adopted from Lakes, Annu. Rev. Mater. Res. (2017)]

- positive vs negative Poisson's ratio:



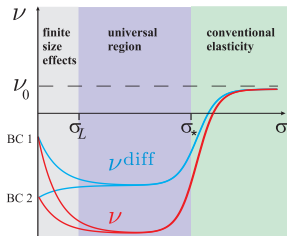
[adopted from Lakes, Nature (2001)]

## Results: differential and absolute Poisson's ratios

- differential Poisson's ratio,  $\sigma_x = \sigma + \delta\sigma$ ,  $\sigma_y = \sigma$ :

$$\nu_{\text{diff}} = -\delta\varepsilon_y / \delta\varepsilon_x$$

- absolute Poisson's ratio,  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ :  $\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_x$



$$\nu = \nu_{\text{diff}} = \nu_{\text{cl}} = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}, \sigma \gg \sigma_*$$

$$\nu \neq \nu_{\text{diff}}, \sigma_L \ll \sigma \ll \sigma_*$$

$$\nu = \nu_{\text{diff}}, \sigma \ll \sigma_L$$

$$\sigma_L = \sigma_* (q_* L)^{\eta-2} \text{ for } q_* L \gg 1$$

- for graphene  $\sigma_* = \kappa q_*^2 = YT / \kappa \approx 1 \text{ N/m}$  and  $\nu_{\text{cl}} \approx 0.1$

**NB** EXERCISE: using Hooke's law to derive the classical expression for the Poisson's ratio:

$$\nu_{\text{cl}} = \lambda / (2\mu + \lambda)$$

## Conclusions:

---

- 2D flexible crystalline materials have interesting unusual physical properties:
  - anomalous Hooke's law
  - negative thermal expansion
  - negative Poisson's ratio
- Future reading:
  - I.S. Burmistrov, I.V. Gornyi, V.Yu. Kachorovskii, M.I. Katsnelson, A.D. Mirlin, "Quantum elasticity of graphene: Thermal expansion coefficient and specific heat Phys. Rev. B 94, 195430 (2016)
  - I.S. Burmistrov, I.V. Gornyi, V.Yu. Kachorovskii, M.I. Katsnelson, J.H. Los, A. D. Mirlin, "Stress-controlled Poisson ratio of a crystalline membrane: Application to graphene Phys. Rev. B 97, 125402 (2018)
  - D.R. Saykin, V.Yu. Kachorovskii, and I.S. Burmistrov, "Phase diagram of a flexible two-dimensional material Phys. Rev. Research 2, 043099 (2020)
  - I.S. Burmistrov, V. Yu. Kachorovskii, M. J. Klug, J. Schmalian, "Emergent continuous symmetry in anisotropic flexible two-dimensional materials Phys. Rev. Lett. 128, 096101 (2022)



Уточнение закона физики: Почему существует графен: от Ландау и Пайерлса до Гейма и Новоселова, Коммерсант Наука <https://www.kommersant.ru/doc/483721>

Тимошенко С.П. - История науки о сопротивлении материалов (1957, ГИТТЛ)

Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, том. 7, Теория упругости.

Nelson, Piran, Weinberg, Statistical mechanics of membranes and surfaces.

Katsnelson, The Physics of Graphene.